УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-22-29

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ВЫРОЖДЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Лам Тхи Ньюнг, Юшканов А. А.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается поведение вырожденной электронной плазмы под действием электрического поля слабой интенсивности. Проведена линеаризация кинетического уравнения. Приведены аналитические выражения для всех входящих в линеаризованное кинетическое уравнение параметров. Показано, что линеаризованное уравнение описывает отклик плазмы на внешнее электрическое поле.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, электрическое поле, линеаризация, электрон, вырожденная плазма

LINEARIZATION OF THE KINETIC EQUATION FOR ELECTRONS IN A DEGENERATE PLASMA

Lam Thi Nhung, A. Yushkanov

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. The behavior of a degenerate electron plasma under the action of a weak electric field is considered. The linearization of the kinetic equation is performed. Analytical expressions are presented for all input parameters in the linearized kinetic equation. It is shown that the linearized equation describes the response of a plasma to an external electric field.

Key words: kinetic equation, electric field, linearization, electron, degenerate plasma

Введение

Рассматривается кинетическое уравнение для вырожденной электронной плазмы и уравнение для напряжённости электрического поля. Поле считается достаточно слабым для возможности линеаризации имеющихся уравнений. При этом будет рассмотрен случай, когда электроны после рассеяния в той или иной степени сохраняют информацию о своей первоначальной скорости. Это происходит при учёте электрон-электронного рассеяния, а также при рассмотрении сильно гранулированных сред. В последнем случае существенно рассеяние электронов на границе зерен, когда требуется учесть эффект отражения электронов от этих границ.

Линеаризованное кинетическое уравнение для вырожденного электронного газа широко используется для исследования различных явлений в металлах, например, для исследования скин-эффекта [1–5]. Также линеаризованное кинетическое уравнение используется для описания колебания электронной плазмы под действием электрического поля [6; 7].

Кинетическое уравнение и его линеаризация

Рассмотрим кинетическое уравнение для электронов Власова-Больцмана с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) для функции распределения электронов $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ [1; 8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=\nu\left(f_{eq}-f\right). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}$, e – скорость и заряд электронов, ν – частота рассеяния электронов, $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля.

Функция f_{eq} описывает локально равновесное распределение вырожденного Ферми-газа электронов:

$$f_{eq}\left(\mathbf{v},\mathbf{r},t\right)=\Theta\left[\mu\left(\mathbf{r},t\right)-\varepsilon\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}\left(\mathbf{r},t\right)\right)\right].$$

Здесь

$$\varepsilon\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}\left(\mathbf{r},t\right)\right)=\frac{m}{2}\left[\mathbf{v}-\mathbf{u}\left(\mathbf{r},t\right)\right]^2,$$

$\mu(\mathbf{r}, t)$ – химический потенциал электронного газа. Функция $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ учитывает тот факт, что равновесная скорость электронного газа при наличии явлений переноса может быть отлична от нуля.

Функция $\Theta(x)$ – единичная ступенька Хэвисайда:

$$\Theta\left(x\right)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Рассмотрим линеаризацию кинетического уравнения (1). Химический потенциал линеаризуем относительно некоторого его значения μ_0:

$$\mu\left(x,t\right)=\mu_0+\delta\mu\left(\mathbf{r},t\right),\quad \mu_0=\text{const}.$$

Равновесную функцию распределения линеаризуем относительно абсолютного (независящего от координат) распределения Ферми:

$$f_F\left(\mathbf{v}\right)\equiv f_0\left(\mathbf{v}\right)=\Theta\left[\mu_0-\varepsilon\left(\mathbf{v}\right)\right].$$

При линеаризации локально равновесной функции распределения получаем:

$$f_{eq}\left(\mathbf{v}\right)=f_0\left(\mathbf{v}\right)+\delta\left(\varepsilon_F-\varepsilon\right)\left[m\mathbf{v}\mathbf{u}\left(\mathbf{r},t\right)+\delta\mu\left(\mathbf{r},t\right)\right].$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Для вырожденного Ферми-газа электронов в металле:

$$\mu_0 = \varepsilon_F = \frac{m\upsilon_F^2}{2} = \frac{p_F^2}{2}, \quad \varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

υ_F – скорость электронов на поверхности Ферми, которая считается сферической, ε_F – энергия электронов на поверхности Ферми, $\varepsilon(\mathbf{v})$ – кинетическая энергия электронов.

Для вырожденного Ферми-газа электронов имеем:

$$\delta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \delta\left[\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_F^2}{2}\right] = \delta\left(\frac{m}{2}(\upsilon - \upsilon_F)(\upsilon + \upsilon_F)\right) =$$

$$= \frac{1}{m\upsilon_F}\delta(\upsilon - \upsilon_F) = \frac{1}{m\upsilon_F^2}\delta\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_F} - 1\right) = \frac{1}{2\varepsilon_F}\delta\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_F} - 1\right).$$

Импульс электрона равен $p = m\upsilon$. На поверхности Ферми $p_F = m\upsilon_F$.

Введём безразмерный импульс (скорость) электронов и безразмерный (приведённый) химический потенциал:

$$P = \frac{p}{p_F} = \frac{\upsilon}{\upsilon_F}, \quad \alpha(x,t) = \frac{\mu(x,t)}{m\upsilon_F^2},$$

тогда:

$$\delta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon_F}\delta\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_F} - 1\right) = \frac{1}{2\varepsilon_F}\delta(P - 1)$$

и линеаризованная локально равновесная функция распределения записывается в виде:

$$f_{eq} = \Theta(1 - P^2) + \delta(P - 1)\left[\delta\alpha(\mathbf{r},t) + P\mathbf{U}(\mathbf{r},t)\right]. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{u}}{\upsilon_F}.$$

Рассмотрим уравнение Гаусса для напряжённости электрического поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho(\mathbf{r},t),$$

где $\rho(\mathbf{r}, t)$ – плотность заряда.

Перепишем уравнение для напряжённости электрического поля в виде:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi\left[\rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r},t)\right].$$

Здесь ρ_0 – равновесное распределение заряда, равное нулю по причине электронейтральности материала, $\delta\rho(\mathbf{r}, t)$ – отклонение плотности заряда решётки от равновесной. Поэтому уравнение для напряжённости электрического поля можно переписать в виде:

$$\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=4\pi\delta\rho(\mathbf{r},t). \qquad (3)$$

При этом:

$$\delta\rho=\int(f-f_0)\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (4)$$

Рассмотрим уравнение непрерывности плотности заряда [8]:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=0.$$

Здесь $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ – плотность электрического тока:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=e\int f\mathbf{v}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Равновесную концентрацию электронов N можно представить в следующем виде:

$$\int f_0\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=N.$$

При этом:

$$\int f_0(P)d^3P=\int\Theta(1-P^2)d^3P=\int\limits_{P^2<1}d^3P=\frac{4\pi}{3}.$$

Это – объём шара единичного радиуса. Тогда:

$$\int f_0\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int f_0d^3p=\frac{2p_F^3}{(2\pi\hbar)^3}\int f_0d^3P=\frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3}.$$

Поэтому

$$N=\frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3}.$$

Данное соотношение позволяет найти связь между равновесной концентрацией электронов N и величинами p_F и μ_0.

В линейном приближении функцию распределения электронов можно искать в виде:

$$f=\Theta(1-P^2)+h(\mathbf{r},P,t)\delta(P-1). \qquad (5)$$

Здесь $f_0=\Theta(1-P^2)$ – абсолютный фермиан, $h(\mathbf{r}, P, t)$ – функция, описывающая отклонение функции распределения от равновесного значения.

С помощью (5) запишем кинетическое уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\upsilon_F P\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e}{m\upsilon_F}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\frac{\partial f}{\partial P}=$$

$$=\nu\delta(P-1)\left[\delta\alpha(\mathbf{r},t)+P\mathbf{U}(\mathbf{r},t)-h(\mathbf{r},P,t)\right]. \qquad (6)$$

Очевидно, что:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}}=0.$$

В линейном приближении по электрическому полю можно записать:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\frac{\partial f}{\partial P}=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_0}{\partial P}=-P\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\delta(P-1).$$

При выводе этого уравнения было учтено, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial P}=\Theta'(1-P^2)(-2P)=-P\delta(P-1).$$

Учитывая эти соотношения, кинетическое уравнение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\upsilon_F P\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e}{m\upsilon_F}\mathbf{PE}(\mathbf{r},t)=\nu\left[\delta\alpha(\mathbf{r},t)+P\mathbf{U}(\mathbf{r},t)-h(\mathbf{r},P,t)\right]. \qquad (7)$$

Для нахождения безразмерного отклонения химического потенциала от равновесного значения воспользуемся законом сохранения числа частиц (концентрации):

$$\int (f_{eq}-f)\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=0.$$

Из этого равенства получаем:

$$\int\delta(P-1)\left[\delta\alpha(\mathbf{r},t)+P\mathbf{U}(\mathbf{r},t)-h(\mathbf{r},P,t)\right]d^3P=0.$$

Отсюда получаем:

$$\delta\alpha(\mathbf{r},t)=\int\delta(P-1)h(\mathbf{r},P,t)d^3P.$$

Величина $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ связана с дрейфовой скоростью электронов $\mathbf{u}_d(\mathbf{r}, t)$ соотношением:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t)=\beta\mathbf{u}_d(\mathbf{r},t), \qquad (8)$$

где β – некоторый коэффициент. Впервые такая модель была предложена для учета электрон-электронных столкновений в [9]. Для электрон-электронных столкновений $\beta > 0$. Для поликристаллических (сильно гранулированных) материалов $\beta > 0$.

Величина $\mathbf{u}_d(\mathbf{r}, t)$ связана с плотностью тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ соотношением:

$$\mathbf{u}_d\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t\right)}{eN}.$$

Или

$$\mathbf{u}_d\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{1}{N}\int f\mathbf{v}\frac{2d^3p}{\left(2\pi\hbar\right)^3}.$$

В линейном приближении отсюда получаем:

$$\mathbf{u}_d\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{1}{N}\int\mathbf{v}h\left(\mathbf{r},P,t\right)\delta\left(P-1\right)\frac{2d^3p}{\left(2\pi\hbar\right)^3}.$$

Данное выражение можно представить в виде:

$$\mathbf{u}_d\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{2p_F^4}{Nm\left(2\pi\hbar\right)^3}\int Ph\left(\mathbf{r},P,t\right)\delta\left(P-1\right)d^3P.$$

Учитывая связь между величинами N и p_F, получаем:

$$\mathbf{u}_d\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{2p_F^4}{m\left(2\pi\hbar\right)^3}\frac{3\left(2\pi\hbar\right)^3}{8\pi p_F^3}\int Ph\left(\mathbf{r},P,t\right)\delta\left(P-1\right)d^3P= \tag{9}$$

$$=\frac{3p_F}{4m\pi}\int Ph\left(\mathbf{r},P,t\right)\delta\left(P-1\right)d^3P.$$

Заключение

1. Проведена линеаризация кинетического уравнения для вырожденного электронного газа и уравнения Гаусса для электрического поля. Все выражения представлены в виде соотношений для функции, описывающей отклонение функции распределения электронов от равновесной функции распределения.

2. Проведён учёт возможности того, что после столкновения электроны частично сохраняют информацию о своей скорости до столкновения.

3. Отдельно рассмотрены случаи электрон-электронных столкновений и сильно гранулированных сред, когда необходимо учитывать эффект рассеяния электронов от границ зерен этих сред.

Статья поступила в редакцию 14.05.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А. Основы теории металла. М.: Наука, 1977. 520 с.
2. Reuter G. E. H., Sondheimer E. H. Theory of the anomalous skin effect in metals // Proceedings of the Royal Society A. 1948. Vol. 195. Iss. 1042. P. 336–352.
3. Латышев А. В., Юшканов А. А. Применение метода Кейза к аналитическому решению обобщенной задачи о скин-эффекте в металле // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39. № 6. С. 989–1005.

4. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитическое решение задачи о скин-эффекте при произвольном коэффициенте аккомодации тангенциального импульса электронов // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 1–7.
5. Kliewer K. L., Fuchs R. Anomalous skin effect for specular electron scattering and optical experiments at non–normal angles of incidence // Physical Review. 1968. Vol. 172. Iss. 3. P. 607–624.
6. Платцман Ф., Вольф П. Волны и взаимодействия в плазме твердых тел. М.: Мир, 1975. 436 с.
7. Латышев А. В., Юшканов А. А. Вырожденная плазма в полупространстве во внешнем электрическом поле вблизи резонанса // Физика твердого тела. 2006. Т. 48. Вып. 12. С. 2113–2118.
8. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 536 с.
9. De Gennaro S., Rettory A. The low-temperature electrical resistivity of potassium: size and role of normal electron-electron scattering // Journal of Physics F: Metal Physics. 1984. Vol. 14. No. 12. P. 237–242.

REFERENCES

1. Abrikosov A. A. *Fundamentals of the Theory of Metals*. Amsterdam, North Holland, 1988. 640 p.
2. Reuter G. E. H., Sondheimer E. H. Theory of the anomalous skin effect in metals. In: *Proceedings of the Royal Society A*, 1948, vol. 195, iss. 1042, pp. 336–352.
3. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Application of the case method in the analytical solution of a generalized problem of skin effect in a metal]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1999, vol. 39, no. 6, pp. 989–1005.
4. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Analytical solution to the skin-effect problem for an arbitrary accommodation coefficient of electron tangential momentum]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2000, vol. 70, iss. 8, pp. 1–7.
5. Kliewer K. L., Fuchs R. Anomalous skin effect for specular electron scattering and optical experiments at non-normal angles of incidence. In: *Physical Review*, 1968, vol. 172, iss. 3, pp. 607–624.
6. Plattsman F., Vol'f P. *Volny i vzaimodeistviya v plazme tverdykh tel* [Waves and interactions in plasma of solids]. Moscow, Mir Publ., 1975. 436 p.
7. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Degenerate plasma in a half-space under an external alternating electric field near resonance]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2006, vol. 48, iss. 12, pp. 2113–2118.
8. Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Physical Kinetics*. Oxford, Pergamon Press, 1981. 452 p.
9. De Gennaro S., Rettory A. The low-temperature electrical resistivity of potassium: size and role of normal electron-electron scattering. In: *Journal of Physics F: Metal Physics*, 1984, vol. 14, no. 12, pp. 237–242.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Лам Тхи Ньюнг – аспирант кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: nhunglam279@gmail.com

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Lam Thi Nhung – Postgraduate Student at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: nhunglam279@gmail.com

Aleksandr A. Yushkanov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Лам Тхи Ньюнг, Юшканов А. А. Линеаризация кинетического уравнения для электронов в вырожденной плазме // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 4. С. 22–29.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-22-29

FOR CITATION

Lam Thi Nhung, Yushkanov A. A. Linearization of the kinetic equation for electrons in a degenerate plasma. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 4, pp. 22–29.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-22-29