УДК 537.67
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-70-76

К ВОПРОСУ О МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ ЗЕМЛИ В УСЛОВИЯХ ЕЁ ВРАЩЕНИЯ

Гладков С. О.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация

Аннотация. Строго аналитически показано, что магнитные силовые линии Земли заполняют некоторый непрерывный класс поверхностей и получаются из решения уравнений магнитостатики при учёте эффекта вращения. Доказано, что их происхождение является следствием эффекта вращения Земли.

Ключевые слова: магнитостатика, частота вращения, силовые линии

MAGNETIC FORCE LINES OF THE EARTH UNDER THE CONDITIONS OF ITS ROTATION

S. Gladkov

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russian Federation

Abstract. Magnetic force lines of the Earth are shown strictly analytically to fill some continuous class of surfaces and are obtained from the solution to the equation of magnetostatics. It is proven that their origin is a consequence of the effect of the Earth's rotation.

Keywords: magnetostatics, rotation frequency, forces lines

Вопрос, поднимаемый в настоящей статье, относится к общим теоретическим вопросам геофизики и преследует единственную цель: представить подробное аналитическое описание стационарного пространственного распределения поля магнитной индукции Земли и его силовых линий, чтобы закрыть этот небольшой образовавшийся пробел. Решение этой задачи в литературных источниках по непонятной причине пока что не было освещено (во всяком случае, мы не смогли обнаружить какого–либо вразумительного объяснения её отсутствия ни в монографиях [1–4], ни во множестве оригинальных работ по этой тематике). Весьма возможно, что решение этой задачи для авторов упомянутых монографий показалось им слишком тривиальным и не заслуживающим внимания. Подобное простое объяснение и подтолкнуло нас остановиться на данном вопросе достаточно подробно, как с точки зрения его физической интерпретации, так и с целью изложения некоторых тонкостей чисто вычислительного характера, касающихся этой интересной проблемы.

Сама же физическая постановка вопроса довольно проста. Действительно, будем рассматривать Землю, как магнитный шар, вращающийся с постоянной угловой частотой $\vec{\omega}$.

Благодаря тому, что ось Земли претерпевает нутацию, приводящую к излучению длинных электромагнитных волн (сокращенно ЭМ) (наподобие того, как это было подробно описано, например, в работах [5–7] для обычных магнитных и сегнетоэлектрических шаров), то подобное обстоятельство свело бы задачу анализа распределения ЭМ полей вне Земли к решению нестационарных уравнений Максвелла.

Поскольку целью настоящего сообщения является аналитическое описание формы магнитных силовых линий, заполняющих некоторое семейство векторных поверхностей, то нас не будет интересовать вопрос, касающийся ЭМ излучения.

В свете этого, нутацией земной оси мы пренебрежём, что, конечно, сильно упростит нашу задачу, и будем решать её в магнитостатическом приближении.

В нашем распоряжении, таким образом, с формальной точки зрения имеется некоторый массивный ферромагнитный шар, вращающийся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. При этом возникает вполне закономерный вопрос, касающийся аналитического описания формы его магнитных силовых линий.

В условиях стационарности движения мы имеем право записать тогда следующую систему уравнений Максвелла, описывающих квазистационарное магнитное поле в веществе [8]:

$$\begin{aligned} &div\mathbf{B} = 0, \\ &rot\mathbf{H} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции, а $\mathbf{H}$ – напряжённость магнитного поля. Они связаны друг с другом простым линейным соотношением $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, где μ – средняя магнитная проницаемость Земли.

Из верхнего уравнения системы (1) следует, что $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал магнитной индукции. Поэтому из второго уравнения немедленно получаем:

$$rot\left(\frac{1}{\mu}rot\mathbf{A}\right) = 0.$$

Считая μ = const и учитывая условие калибровки ЭМ поля

$$div\mathbf{A} = 0, \tag{2}$$

немедленно находим уравнение:

$$\Delta\mathbf{A} = 0. \tag{3}$$

Решение этого уравнения легко написать, если воспользоваться аналогией с решением уравнения Лапласа, описывающего распределение давления P вблизи поверхности обтекаемого вязким стационарным потоком шара (так называемая задача Стокса, см., например, [9]), согласно которому $\Delta P = 0$, и для внешней задачи математической физики ($r \geq R$) решение будет иметь вид:

$$P = P_0 - \frac{3\eta R(\mathbf{ur})}{2r^3}, \tag{4}$$

где P_0 – атмосферное давление, **u** – скорость течения, R – радиус шара.

Легко проверить, что решение (4) удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому в полной аналогии с формулой (4) можно легко привести решение уравнения (3) с учётом конкретной специфики нашей проблемы.

Действительно, в рассматриваемом нами случае можно записать, что

$$\mathbf{A} = a\frac{[\vec{\omega} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \tag{5}$$

где a – некоторая константа, которую мы далее приведём, исходя из соображений размерности и её физического смысла, **r** – радиус-вектор, проведённый из центра шара в точку наблюдения при условии, что $r \geq R$.

Легко проверить прямой подстановкой решения (5) в уравнение (3) и в уравнение калибровки (2), что они автоматически удовлетворяются. Поэтому, в соответствии с равенством $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$, немедленно находим для интересующего нас поля магнитной индукции следующее пространственное распределение:

$$\mathbf{B} = \frac{a}{r^3}\left(\frac{3\mathbf{r}(\vec{\omega} \times \mathbf{r})}{r^2} - \vec{\omega}\right). \tag{6}$$

Теперь, что касается константы a. В силу нашего предположения, что магнитное поле (или индукция) появляется только благодаря вращению Земли, напрашивается вполне очевидный физический вывод о том, что это возможно лишь в том случае, если имеются электрические заряды, распределённые по объёму Земли с некоторой объёмной плотностью ρ_e. Поэтому, исходя из совершенно простых соображений размерности, мы можем сразу же написать:

$$a = \frac{4\pi\rho_e R^5\sqrt{\varepsilon\mu}}{3c}, \tag{7}$$

где c – скорость света в вакууме, ε – средняя диэлектрическая проницаемость Земли. Заметим здесь, что плотность ρ_e очень мала.

Если на поверхности сферы выбрать локальный ортонормированный единичный базис $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$, который тривиальным образом связан с единичными декартовыми ортами **i**, **j**, **k** линейными соотношениями:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\cos\varphi\sin\theta + \mathbf{j}\sin\varphi\sin\theta + \mathbf{k}\cos\theta,\\
\mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i}\cos\varphi\cos\theta + \mathbf{j}\sin\varphi\cos\theta - \mathbf{k}\sin\theta,\\
\mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi,
\end{aligned} \tag{8}$$

то в сферической системе координат для решения (6) с учётом (7) легко получим для компонент поля индукции $\mathbf{B} = \left(B_r, B_\theta, B_\varphi\right)$

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{2\rho_e R^2 V\sqrt{\varepsilon\mu}}{cr^3}\omega\cos\theta, \\ B_\theta &= \frac{\rho_e R^2 V\sqrt{\varepsilon\mu}}{cr^3}\omega\sin\theta, \\ B_\varphi &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где V – объём Земли.

В соответствии с верхним уравнением системы (1), мы имеем право написать соответствующие линейные уравнения, которые описывают магнитные силовые линии, лежащие на некоторой поверхности вращения, называемой векторной поверхностью, в следующем виде:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{0}. \tag{10}$$

Подставляя сюда (9), получаем в результате два интеграла, описывающие искомые векторные линии:

$$\begin{aligned} &\frac{r}{\sin^2\theta} = C_1, \\ &\varphi = C_2. \end{aligned} \tag{11}$$

где $C_{1,2}$ – константы интегрирования.

Таким образом, в соответствии с [10], уравнение векторных поверхностей будет:

$$r = \Phi\left(\varphi\right)\sin^2\theta, \tag{12}$$

где $\Phi(\varphi)$ некоторая произвольная функция от полярного угла φ.

Переходя здесь к декартовым координатам x, y, z согласно преобразованиям

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

получаем следующее семейство поверхностей:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = \Phi\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\left(x^2 + y^2\right)^2. \tag{13}$$

В соответствии с решением (13) можно теперь совершенно элементарно найти векторные линии магнитной индукции поля Земли.

Действительно, полагая, что φ = const получаем однопараметрическое уравнение прямой:

$$y = kx, \tag{14}$$

где коэффициент $k = \mathrm{tg}\varphi$.

Переобозначая в (13) функцию $\Phi(\varphi)$ через константу C^2 с учётом (14), находим:

$$z^2 = C^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} \left(1+k^2\right)^{\frac{2}{3}} - x^2 \left(1+k^2\right), \tag{15}$$

Дифференцируя (15) по x и полагая производную z' равной нулю, определяем точки экстремума векторной линии. В результате оказывается, что точки максимума функции $z(x)$ находятся при симметричных значениях:

$$x_0^{\pm} = \pm \frac{2C}{3\sqrt{1+k^2}} \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{16}$$

соответственно справа от центра Земли и слева (напомним, что начало координат выбрано в центре Земли), то есть между северным и южным полюсами.

Далее, считая, что максимум силовых линий находится при значениях $x_0^{\pm} = \pm R,$ где R – радиус Земли, получим из (16), что константа

$$C = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1+k^2}R. \tag{17}$$

И, следовательно, подставляя её в (15), найдём

$$z = \pm \sqrt{x\left(1+k^2\right)\left(\frac{3}{2}R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} - x\right)}. \tag{18}$$

Таким образом, из (18) следует вывод о том, что, во-первых, радиус действия магнитных силовых линий ограничен значением:

$$x_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}R, \tag{19}$$

которое приблизительно равно двум радиусам Земли, а, во-вторых, максимальное значение высоты векторной силовой линии будет таким:

$$z_{\max} = \pm R\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}. \tag{20}$$

Если теперь найти кривизну силовой линии $K = \frac{1}{\rho},$ где ρ – радиус кривизны в данной точке, при значении $x = R$, согласно известной формуле двухмерной дифференциальной геометрии

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{z''}{\left(1+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

то в результате тривиального дифференцирования зависимости (18), получим, что:

$$K = \frac{1}{\rho}\bigg|_{x=R} = z''(R) = \mp\frac{2\sqrt{2(1+k^2)}}{3R}. \qquad (21)$$

Согласно условию $\rho\big|_{x=R} \geq z_{\max}$, из выражений (20) и (21) немедленно следует, что угловой коэффициент k должен подчиняться неравенству:

$$|k| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (22)$$

Заметим, что качественно решение (18) адекватно соответствует магнитным силовым линиям, которые приводятся практически в любом учебнике, посвящённом описанию геофизических свойств Земли.

Формулой (22) мы закончим анализ сформулированной выше задачи и, подводя итог настоящего сообщения, ещё раз кратко сформулируем основные выводы, проведённого выше исследования.

1. Исходя из аналогии с гидродинамической задачей Стокса, найдено распределение поля магнитной индукции Земли в магнитостатическом приближении для внешней задачи математической физики.

2. Приведено строгое доказательство того факта, что магнитные силовые линии Земли являются следствием её вращения в предположении, что Земля представляет собой равномерно заряженный шар.

3. Результат чисто аналитического решения сформулированной проблемы качественно соответствуют экспериментально наблюдаемым силовым линиям.

Статья поступила в редакцию 06.11.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. М.: Недра, 1965. 379 с.
2. Стейси Ф. Физика Земли. М.: Мир, 1972. 342 с.
3. Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука, 1983. 416 с.
4. Жданов М. С., Матусевич В. Н., Френкель М. А. Сейсмическая электромагнитная миграция. М.: Наука, 1988. 376 с.
5. Гладков С. О. О вычислении интенсивности излучения электромагнитной энергии неподвижной ферромагнитной сферической частицей, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. № 7. С. 138–141.
6. Гладков С. О., Богданова С. Б. Вращающийся ферромагнитный шар как источник длинноволнового электромагнитного излучения // Радиотехника и электроника. 2017. Т. 62. № 7. С. 632–641.
7. Гладков С. О., Богданова С. Б. Об интенсивности излучения ЭМ поля вращающимся сегнетоэлектрическим шаром // Известия высших учебных заведений. Физика. 2018. Т. 61.№ 1 (721). С. 94–99.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука, 2004. 620 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 2004. 433 с.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

REFERENCES

1. Magnitskii V. A. *Vnutrennee stroenie i fizika Zemli* [Internal structure and physics of the Earth]. Moscow, Nedra Publ., 1965. 379 p.
2. Stacey F. D. *Physics of the Earth*. New York: Wiley, 1977.
3. Zharkov V. N. *Vnutrennee stroenie Zemli i planet* [The internal structure of the Earth and planets]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 416 p.
4. Zhdanov M. S., Matusevich V. N., Frenkel' M. A. *Seismicheskaya elektromagnitnaya migratsiya* [Seismic electromagnetic migration]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 376 p.
5. Gladkov S. O. [Intensity of electromagnetic energy radiation by a quiescent ferromagnetic spherical particle placed in a permanent magnetic field]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2015, vol. 85, no. 7, pp. 138–141.
6. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [A rotating ferromagnetic sphere as a source of long-wavelength electromagnetic radiation]. In: *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics], 2017, vol. 62, no. 7, pp. 632–641.
7. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [On the Intensity of Radiation of an Electromagnetic Field by a Rotating Ferroelectric Sphere]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Russian Physics Journal], 2018, vol. 61, no. 1 (721), pp. 94–99.
8. Landau L. D., Lifshits E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Vol. 8 of A Course of Theoretical Physics. Oxford, Pergamon Press, 1960.
9. Landau L. D., Lifshits E. M. *Fluid Mechanics*. Vol. 6 of A Course of Theoretical Physics. Oxford, Pergamon Press, 1959.
10. El'sgol'ts L. E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математическое моделирование № 311 Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Mathematical Modeling No. 311, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу о магнитных силовых линиях Земли в условиях её вращения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 4. С. 70–76.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-70-76

FOR CITATION

Gladkov S. O. Magnetic force lines of the Earth under the conditions of its rotation. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 4, pp. 70–76.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-70-76