РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-6-27

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В СЛОЕ С ПОЛИНОМАМИ В ПРАВЫХ ЧАСТЯХ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Алгазин О. Д.

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)*

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация. Цель работы – найти точные решения краевых задач для неоднородного уравнения Гельмгольца с полиномиальной правой частью в многомерном бесконечном слое, ограниченном двумя гипер плоскостями.

Процедура и методы исследования. Рассмотрены краевые задачи Дирихле и Дирихле-Неймана с полиномами в правых частях краевых условий. Применено преобразование Фурье для обобщённых функций медленного роста.

Результаты проведённого исследования. Показано, что краевые задачи Дирихле и Дирихле-Неймана с полиномами в правых частях краевых условий для неоднородного уравнения Гельмгольца с полиномиальной правой частью имеют решение, которое является квазиполиномом, содержащим кроме степенных функций ещё гиперболические или тригонометрические функции. Это решение единственно в классе функций медленного роста, если параметр уравнения не является собственным значением. Приведён алгоритм построения этого решения и рассмотрены примеры.

Теоретическая/практическая значимость заключается в получении точных решений краевых задач для одного из известных уравнений математической физики.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, задача Дирихле, задача Дирихле-Неймана, преобразование Фурье, обобщённые функции медленного роста

EXACT SOLUTIONS TO THE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE HELMHOLTZ EQUATION IN A LAYER WITH POLYNOMIALS IN THE RIGHT-HAND SIDES OF THE EQUATION AND OF THE BOUNDARY CONDITIONS

O. Algazin

Bauman Moscow State Technical University

ul. 2-ya Baumanskaya 5, stroenie 1, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. Purpose. We have found exact solutions to boundary-value problems for the inhomogeneous Helmholtz equation with the polynomial right-hand side in a multidimensional infinite layer bounded by two hyperplanes.

Methodology and Approach. The paper considers Dirichlet and Dirichlet–Neumann boundary-value problems with polynomials in the right-hand sides of the boundary conditions. The Fourier transform of generalized functions of slow growth is applied.

Results. It is shown that the Dirichlet and Dirichlet–Neumann boundary-value problems with polynomials in the right-hand sides of the boundary conditions for the inhomogeneous Helmholtz equation with the polynomial right-hand side have a solution that is a quasi-polynomial containing, in addition to power functions, hyperbolic or trigonometric functions. This solution is unique in the class of functions of slow growth if the parameter of the equation is not an eigenvalue. An algorithm for constructing this solution is presented and examples are considered.

Theoretical and Practical Implications. Exact solutions to boundary-value problems for one of the well-known equations of mathematical physics have been obtained.

Keywords: Helmholtz equation, Dirichlet problem, Dirichlet–Neumann problem, Fourier transform, generalized functions of slow growth.

Введение

К уравнению Гельмгольца приводят многие задачи математической физики, например, задачи, связанные с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, электромагнитными и т. д.), и задачи диффузии некоторых газов при наличии распада или цепных реакций. Также любое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами приводится к уравнению Гельмгольца [1].

В данной статье получены точные решения в виде квазиполиномов краевых задач Дирихле и Дирихле–Неймана для уравнения Гельмгольца в слое в случае, когда правая часть уравнения Гельмгольца и правые части краевых условий являются полиномами. Если параметр уравнения Гельмгольца стремится к нулю, то уравнение Гельмгольца переходит в уравнение Пуассона, а квазиполиномиальные решения краевых задач переходят в полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона [2]. Таким же способом получены точные полиномиальные решения краевых задач для уравнения Трикоми в полосе [3; 4]. Поиску решений уравнений с частными производными в виде полиномов или квазиполиномов посвящены работы многих авторов [5–11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца в неограниченной области (слое) с полиномиальной правой частью:

$$\Delta u(x, y) + v u(x, y) = P(x, y), \quad v \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$P(x, y)$ – полином от переменных x и y .

На границе слоя зададим краевые условия Дирихле:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

Далее в разделе 2 показано, что неоднородное уравнение Гельмгольца (1) имеет полиномиальные решения, и приведена формула получения такого решения. Если $\tilde{u}(x, y)$ – некоторое полиномиальное решение неоднородного уравнения Гельмгольца (1), то для функции $v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$ получаем однородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta v(x, y) + v v(x, y) = 0, \quad v \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a, \quad (3)$$

и краевые условия Дирихле:

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \tilde{u}(x, 0), \quad v(x, a) = \psi(x) - \tilde{u}(x, a), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Решив задачу Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца (3), (4), мы получим решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца (1), (2) по формуле:

$$u(x, y) = v(x, y) + \tilde{u}(x, y).$$

Аналогично рассматривается смешанная краевая задача Дирихле-Неймана с краевыми условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

которая также сводится к задаче для однородного уравнения (3) с краевыми условиями:

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \tilde{u}(x, 0), \quad v_y(x, a) = \psi(x) - \tilde{u}_y(x, a), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Решения $u(x, y)$ краевых задач (1), (2) и (1), (5) будем искать в классе функций медленного роста по переменной x при каждом фиксированном y из интервала $(0, a)$, то есть при $\forall y \in (0, a)$ найдётся такое $m \geq 0$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)| (1 + |x|^2)^{-m} dx < \infty, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (6)$$

Поэтому можно применять преобразования Фурье для обобщённых функций медленного роста по переменной x [12].

2. Полиномиальное решение неоднородного уравнения Гельмгольца

Неоднородное уравнение Гельмгольца (1) с полиномиальной правой частью $P(x, y)$,

$$\Delta u(x, y) + \nu u(x, y) = P(x, y), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R},$$

имеет полиномиальные решения, одно из которых можно получить по следующей непосредственно проверяемой формуле.

Для $\nu \neq 0$:

$$u(x, y) = \frac{P(x, y)}{\nu} + \sum_{j=1}^{[k/2]} \frac{(-1)^j}{\nu^{j+1}} \Delta^j P(x, y), \quad (7)$$

где k – наибольшая из степеней мономов полинома $P(x, y)$, $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$.

Для $\nu = 0$ мы имеем уравнение Пуассона, и его полиномиальные решения приведены в [2].

Пример 1.

$$x = (x_1, x_2), \quad P(x, y) = 3x_1^2 x_2 y^2 + 5x_1 x_2^2 y, \quad k = 5, \quad [k/2] = 2.$$

По формуле (7) получаем:

$$u(x, y) = \frac{1}{\nu} (3x_1^2 x_2 y^2 + 5x_1 x_2^2 y) - \frac{1}{\nu^2} (6x_2 y^2 + 10x_1 y + 6x_1^2 x_2) + \frac{1}{\nu^3} 24x_2.$$

3. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае $\nu = -\lambda^2$

Поскольку решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения сводится к решению задачи Дирихле для однородного уравнения, рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения:

$$\Delta u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = 0, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

Применим преобразование Фурье по x [12]:

$$\mathcal{F}_x [u(x, y)](t, y) = U(t, y), \quad \mathcal{F} [\varphi(x)](t) = \Phi(t), \quad \mathcal{F} [\psi(x)](t) = \Psi(t),$$

получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром $t \in \mathbb{R}^n$:

$$-(\lambda^2 + |t|^2) U(t, y) + U_{yy}(t, y) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a \quad (10)$$

$$U(t, 0) = \Phi(t), \quad U(t, a) = \Psi(t). \quad (11)$$

Единственное решение краевой задачи (10), (11) даётся формулой:

$$U(t, y) = L_n(|t|, a - y)\Phi(t) + L_n(|t|, y)\Psi(t), \quad (12)$$

где

$$L_n(|t|, y) = \frac{sh\left(y\sqrt{|t|^2 + \lambda^2}\right)}{sh\left(a\sqrt{|t|^2 + \lambda^2}\right)}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим единственное в классе функций медленного роста решение задачи Дирихле (8), (9) в виде свертки:

$$u(x, y) = l_n(|x|, a - y) * \varphi(x) + l_n(|x|, y) * \psi(x), \quad (13)$$

где $l_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[L_n(|t|, y)](x, y)$.

Чтобы найти свертку (13) с полиномами $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ достаточно рассмотреть случай монома.

3.1. Случай $n = 1$

Рассмотрим сначала плоский случай: $n = 1$, $x \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, a)$.

$L_1(|t|, y) = L_1(t, y)$ четная функция переменного t :

$$L_1(|t|, y) = L_1(t, y) = \frac{sh\left(y\sqrt{t^2 + \lambda^2}\right)}{sh\left(a\sqrt{t^2 + \lambda^2}\right)}.$$

Пусть $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^0 = 1$.

Решение задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= l_1(x, y) * \psi(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - t) l_1(t, y) dt = \int_{-\infty}^{\infty} l_1(t, y) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} l_1(t, y) e^{ixt} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}_t[l_1(t, y)](x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} L_1(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh\left(y\sqrt{x^2 + \lambda^2}\right)}{sh\left(a\sqrt{x^2 + \lambda^2}\right)} = \frac{sh(\lambda y)}{sh(\lambda a)}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^k$.

Соответствующее решение задачи Дирихле:

$$\begin{aligned}
 u_k(x, y) &= l_1(x, y) * \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t) l_1(t, y) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x-t)^k l_1(t, y) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^k C_k^j x^{k-j} t^j (-1)^j l_1(t, y) dt = \sum_{j=0}^k C_k^j x^{k-j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} t^j l_1(t, y) dt,
 \end{aligned}$$

где $C_k^j = k! / j!(k-j)!$ – биномиальные коэффициенты.

Поскольку последний интеграл для нечётных j равен нулю в силу чётности $l_1(t, y)$ относительно переменной t , то

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} l_1(t, y) dt = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y),$$

где $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$.

Пользуясь свойствами преобразования Фурье, получим:

$$\begin{aligned}
 p_{2m}(\lambda, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} l_1(t, y) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} l_1(t, y) e^{ixt} dt = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}_t [t^{2m} l_1(t, y)](x, y) = (-1)^m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} L_1(x, y).
 \end{aligned}$$

Функции $p_{2m}(\lambda, y)$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по x функции:

$$L_1(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(y\sqrt{x^2 + \lambda^2})}{\operatorname{sh}(a\sqrt{x^2 + \lambda^2})} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m}(\lambda, y) \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

то есть $L_1(x, y)$ является производящей функцией для $p_{2m}(\lambda, y)$. Эти функции можно вычислить по рекуррентной формуле:

$$p_0(\lambda, y) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)},$$

$$p_{2m}(\lambda, y) = -(2m-1) \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} p_{2m-2}(\lambda, y), \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Докажем эту формулу.

Поскольку

$$f(s) = \frac{\operatorname{sh}(ys)}{\operatorname{sh}(as)}, \quad s = \sqrt{x^2 + \lambda^2}$$

является чётной аналитической функцией комплексного переменного s , и её особые точки $\pm i\pi k/a$, $k \in \mathbb{N}$ лежат на мнимой оси, то в круге $|s| < \pi/a$ имеем разложение:

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (x^2 + \lambda^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \sum_{m=0}^n C_n^m \lambda^{2n-2m} x^{2m} = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} \sum_{n=m}^{\infty} a_{2n} C_n^m \lambda^{2n-2m}.
 \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 p_{2m}(\lambda, y) &= (-1)^m (2m)! \sum_{n=m}^{\infty} a_{2n} C_n^m \lambda^{2n-2m}, \\
 p_0(\lambda, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \lambda^{2n} = f(\lambda) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)}, \\
 p_{2m-2}(\lambda, y) &= (-1)^{m-1} (2m-2)! \sum_{n=m-1}^{\infty} a_{2n} C_n^{m-1} \lambda^{2n-2m+2}, \\
 &\quad -(2m-1) \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} p_{2m-2}(\lambda, y) = \\
 &= (-1)^m (2m)! \sum_{n=m}^{\infty} a_{2n} \frac{2n-2m+2}{2m} C_n^{m-1} \lambda^{2n-2m} = \\
 &= (-1)^m (2m)! \sum_{n=m}^{\infty} a_{2n} C_n^m \lambda^{2n-2m} = p_{2m}(\lambda, y),
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$p_{2m}(\lambda, y) = (2m-1)!! \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)}.$$

Например,

$$\begin{aligned}
 p_2(\lambda, y) &= -\frac{y \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda a)} + \frac{a \operatorname{sh}(\lambda y) \operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda \operatorname{sh}^2(\lambda a)}, \\
 p_4(\lambda, y) &= -\frac{3y \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^3 \operatorname{sh}(\lambda a)} + \frac{3y^2 \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda a)} - \frac{6ya \operatorname{ch}(\lambda y) \operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda^2 \operatorname{sh}^2(\lambda a)} + \\
 &\quad + \frac{3a \operatorname{sh}(\lambda y) \operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda^3 \operatorname{sh}^2(\lambda a)} + \frac{6a^2 \operatorname{sh}(\lambda y) \operatorname{ch}^2(\lambda a)}{\lambda^2 \operatorname{sh}^3(\lambda a)} - \frac{3a^2 \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda a)}.
 \end{aligned}$$

При λ , стремящемся к нулю, функции $p_{2m}(\lambda, y)$ переходят в полиномы $p_{2m}(y)$, которые рассмотрены в [2]. Например,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} p_0(\lambda, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)} = \frac{y}{a},$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} p_2(\lambda, y) = -\frac{y}{3a}(y^2 - a^2),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} p_4(\lambda, y) = \frac{y}{15a}(3y^4 - 10y^2a^2 + 7a^4).$$

Выпишем несколько первых решений задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y).$$

$$u_0(x, y) = \frac{\text{sh}(\lambda y)}{\text{sh}(\lambda a)}, \quad u_1(x, y) = x \frac{\text{sh}(\lambda y)}{\text{sh}(\lambda a)},$$

$$u_2(x, y) = x^2 \frac{\text{sh}(\lambda y)}{\text{sh}(\lambda a)} - \frac{y \text{ch}(\lambda y)}{\lambda \text{sh}(\lambda a)} + \frac{a \text{sh}(\lambda y) \text{ch}(\lambda a)}{\lambda \text{sh}^2(\lambda a)}.$$

При λ , стремящемся к нулю, они переходят в полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа [2]:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_0(x, y) = \frac{y}{a}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_1(x, y) = \frac{xy}{a}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_2(x, y) = \frac{y}{3a}(3x^2 - y^2 + a^2).$$

Функции $v_k(x, y) = u_k(x, a - y)$ являются решениями уравнения Гельмгольца, удовлетворяющими краевым условиям:

$$v_k(x, 0) = x^k, \quad v_k(x, a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = x^2 y^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad \lambda > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Частным решением неоднородного уравнения Гельмгольца является полином:

$$\tilde{u}(x, y) = -\frac{x^2 y^2}{\lambda^2} - \frac{2y^2}{\lambda^4} - \frac{2x^2}{\lambda^4} - \frac{8}{\lambda^6},$$

и задача Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца сводится к задаче Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца для функции $v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$:

$$\Delta v(x, y) - \lambda^2 v(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad \lambda > 0,$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \tilde{u}(x, 0) = \frac{2x^2}{\lambda^4} + \frac{8}{\lambda^6},$$

$$v(x, a) = u(x, a) - \tilde{u}(x, a) = \frac{x^2 a^2}{\lambda^2} + \frac{2a^2}{\lambda^4} + \frac{2x^2}{\lambda^4} + \frac{8}{\lambda^6}.$$

Решением этой задачи будет функция:

$$v(x, y) = \frac{2}{\lambda^4} u_2(x, a - y) + \frac{8}{\lambda^6} u_0(x, a - y) + \left(\frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^4} \right) u_2(x, y) + \\ + \left(\frac{2a^2}{\lambda^4} + \frac{8}{\lambda^6} \right) u_0(x, y).$$

Решением исходной задачи будет функция:

$$u(x, y) = \tilde{u}(x, y) + v(x, y) = \\ = -\frac{x^2 y^2}{\lambda^2} - \frac{2y^2}{\lambda^4} - \frac{2x^2}{\lambda^4} - \frac{8}{\lambda^6} + \frac{a^2 x^2 \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda a)} - \frac{a^2 y \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^3 \operatorname{sh}(\lambda a)} + \\ + \frac{a^3 \operatorname{sh}(\lambda y) \operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda^3 \operatorname{sh}^2(\lambda a)} + \\ + \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)(2x^2 + 2a^2 - 2x^2 \operatorname{ch}(\lambda a))}{\lambda^4 \operatorname{sh}(\lambda a)} + \frac{2y \operatorname{ch}(\lambda y)(\operatorname{ch}(\lambda a) - 1)}{\lambda^5 \operatorname{sh}(\lambda a)} + \\ + \frac{2a \operatorname{sh}(\lambda y) \operatorname{ch}(\lambda a)(1 - \operatorname{ch}(\lambda a))}{\lambda^5 \operatorname{sh}^2(\lambda a)} + \frac{8 \operatorname{sh}(\lambda y)(1 - \operatorname{ch}(\lambda a))}{\lambda^6 \operatorname{sh}(\lambda a)} + \frac{2x^2 \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^4} + \\ + \frac{2(a - y) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5} + \frac{8 \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^6}.$$

При $\lambda \rightarrow 0$ это решение переходит в полином:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(x, y) = \frac{1}{12} x^2 y^4 - \frac{1}{12} a^3 x^2 y - \frac{1}{180} y^6 + \frac{1}{36} a^3 y^3 - \frac{1}{45} a^5 y,$$

который является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона [2]

$$\Delta u(x, y) = x^2 y^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

3.2. Случай $n > 1$

Рассмотрим теперь случай: $n > 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, a)$.

Если

$$\Psi(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то решением задачи Дирихле с краевым условием:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

будет функция:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= l_n(|x|, y) * \Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x-t) l_n(|t|, y) dt = \int_{\mathbb{R}^n} l_n(|t|, y) dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} l_n(|t|, y) e^{ixt} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}_t[l_n(|t|, y)](x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} L_n(|x|, y) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|x|^2 + \lambda^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\sqrt{|x|^2 + \lambda^2}\right)} = \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)}. \end{aligned}$$

Если

$$\Psi(x) = x^k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k - \text{мультииндекс},$$

то решением задачи Дирихле с краевыми условиями:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = x^k, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

будет функция:

$$u_k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} (x-t)^k l_n(|t|, y) dt,$$

где

$$(x-t)^k = (x_1-t_1)^{k_1} \dots (x_n-t_n)^{k_n}, \quad (15)$$

и этот интеграл будет отличен от нуля только для тех мономов полинома (15), которые содержат t_j в чётных степенях. Поэтому

$$\begin{aligned} u_k(x, y) &= \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} \int_{\mathbb{R}^n} t^{2m} l_n(|t|, y) dt = \\ &= \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y), \end{aligned}$$

где $C_k^{2m} = C_{k_1}^{2m_1} C_{k_2}^{2m_2} \dots C_{k_n}^{2m_n}$, $[k/2] = ([k_1/2], [k_2/2], \dots, [k_n/2])$.

Пользуясь свойствами преобразования Фурье [12], получим:

$$\begin{aligned} p_{2m}(\lambda, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{2m} l_n(|t|, y) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} t^{2m} l_n(|t|, y) e^{ixt} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}_t[t^{2m} l_n(|t|, y)](x, y) = (-1)^{|m|} \lim_{x \rightarrow 0} \partial_x^{2m} \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|x|^2 + \lambda^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\sqrt{|x|^2 + \lambda^2}\right)}, \end{aligned}$$

где

$$\partial_x^{2m} = \frac{\partial^{2|m|}}{\partial x_1^{2m_1} \partial x_2^{2m_2} \dots \partial x_n^{2m_n}}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ имеем разложение:

$$L_n(x, y) = \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|x|^2 + \lambda^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\sqrt{|x|^2 + \lambda^2}\right)} = \sum_{|m|=0}^{\infty} p_{2|m|}(\lambda, y) \frac{(-1)^{|m|}}{|2m|!} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{|m|}.$$

Коэффициент при x^{2m} в этом разложении равен:

$$p_{2|m|}(\lambda, y) = \frac{(-1)^{|m|}}{|2m|!} \frac{1}{m!}, \quad m! = m! \dots m!.$$

Следовательно,

$$p_{2m}(\lambda, y) = \frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m!} p_{2|m|}(\lambda, y).$$

Например,

$$p_{2(2,1,1)}(\lambda, y) = \frac{1}{35} p_8(\lambda, y).$$

Функции $v_k(x, y) = u_k(x, a - y)$ являются решениями уравнения Лапласа, удовлетворяющими краевым условиям:

$$v_k(x, 0) = x^k, \quad v_k(x, a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k - \text{мультииндекс}.$$

4. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае $v = \mu^2$

Заменяя в (8), (9) λ на $i\mu$, $\mu > 0$, получим задачу Дирихле:

$$\Delta u(x, y) + \mu^2 u(x, y) = 0, \quad \mu > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a, \quad (16)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (17)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

Все формулы, полученные в разделе 3, сохраняются с заменой гиперболических функций на круговые и заменой знака минус на знак плюс в правой части рекуррентной формулы (14). А именно, решение задачи Дирихле (16), (17) записывается в виде свертки:

$$u(x, y) = l_n(|x|, a - y) * \varphi(x) + l_n(|x|, y) * \psi(x), \quad (18)$$

где

$$l_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1} [L_n(|t|, y)](x, y), \quad L_n(|t|, y) = \frac{\sin\left(y\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}{\sin\left(a\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}.$$

Если μ^2 не является собственным значением оператора Лапласа в слое с крайними условиями Дирихле, то это решение будет единственным в классе функций медленного роста.

Для $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, решением задачи Дирихле является функция:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\mu, y),$$

$$\text{где } p_{2m}(\mu, y) = (2m-1)!! \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^m \frac{\sin(\mu y)}{\sin(\mu a)}, \quad \mu \neq \pi k / a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Например,

$$u_2(x, y) = x^2 \frac{\sin(\mu y)}{\sin(\mu a)} + \frac{y \cos(\mu y)}{\mu \sin(\mu a)} - \frac{a \sin(\mu y) \cos(\mu a)}{\mu \sin^2(\mu a)}, \quad \mu \neq \pi k / a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При μ , стремящемся к нулю, $u_2(x, y)$, переходит в полиномиальное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_2(x, y) = \frac{y}{3a} (3x^2 - y^2 + a^2).$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, k – мультииндекс, то решения находятся по тем же формулам, в которых теперь

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad C_k^{2m} = C_{k_1}^{2m_1} C_{k_2}^{2m_2} \dots C_{k_n}^{2m_n}, \quad [k/2] = ([k_1/2], [k_2/2], \dots, [k_n/2]),$$

$$p_{2m}(\mu, y) = \frac{(2m)! |m|!}{|2m|! m!} p_{2|m|}(\mu, y).$$

4.1. Единственность решения задачи Дирихле

Решение задачи Дирихле (16), (17) будет единственным в классе функций медленного роста (соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальные решения в классе функций медленного роста), если

$$0 < \mu < \frac{\pi}{a}, \quad 0 < \mu^2 < \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Если же $\mu^2 \geq \pi^2 / a^2$, $\mu^2 = \pi^2 / a^2 + b^2$, $b^2 \geq 0$, то функции

$$\sin(b_1 x_1) \sin(b_2 x_2) \dots \sin(b_n x_n) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right),$$

где $b_1, b_2, \dots, b_n$ – произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие равенству $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = b^2$, являются нетривиальными решениями медленного роста соответствующей однородной краевой задачи.

Докажем, что в случае $0 < \mu < \pi/a$ соответствующая однородная краевая задача:

$$\Delta u(x, y) + \mu^2 u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

имеет только тривиальные решения в классе функций медленного роста.

Решение $u(x, y)$ как функцию переменного y можно разложить в ряд Фурье:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right),$$

где коэффициенты $b_n(x)$ – функции медленного роста. Подставив эту функцию $u(x, y)$ в уравнение (16), получим уравнения для коэффициентов $b_n(x)$:

$$\Delta b_n(x) + \left(\mu^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}\right) b_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если $0 < \mu < \pi/a$, $0 < \mu^2 < \pi^2/a^2$, то $\mu^2 - \pi^2 n^2/a^2 < 0$, $\forall n = 1, 2, \dots$ и эти уравнения имеют только тривиальные решения в классе функций медленного роста.

5. Решение смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Гельмгольца в случае $v = -\lambda^2$

Достаточно рассмотреть однородное уравнение:

$$\Delta u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = 0, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a, \quad (19)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (20)$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ – полиномы.

Так же, как в случае задачи Дирихле, имеем единственное решение в классе функций медленного роста:

$$u(x, y) = l_n(|x|, y) * \varphi(x) + k_n(|x|, y) * \psi(x),$$

где

$$l_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1} [L_n(|t|, y)](x, y), \quad k_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1} [K_n(|t|, y)](x, y),$$

$$L_n(|t|, y) = \frac{\operatorname{ch}\left((a-y)\sqrt{|t|^2 + \lambda^2}\right)}{\operatorname{ch}\left(a\sqrt{|t|^2 + \lambda^2}\right)},$$

$$K_n(|t|, y) = \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|t|^2 + \lambda^2}\right)}{\sqrt{|t|^2 + \lambda^2} \operatorname{ch}\left(a\sqrt{|t|^2 + \lambda^2}\right)}.$$

5.1. Случай $n = 1$

Если $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, то решением задачи (19), (20) является функция:

$$u_0(x, y) = \frac{\operatorname{ch}((a-y)\lambda)}{\operatorname{ch}(a\lambda)}.$$

Если $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, то решением задачи (19), (20) является функция:

$$v_0(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(y\lambda)}{\lambda \operatorname{ch}(a\lambda)}.$$

Если $\varphi(x) = x^k$, $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, то решением задачи (19), (20) является функция:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y),$$

где функции $p_{2m}(\lambda, y)$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по x функции:

$$L_1(x, y) = \frac{\operatorname{ch}\left((a-y)\sqrt{x^2 + \lambda^2}\right)}{\operatorname{ch}\left(a\sqrt{x^2 + \lambda^2}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m}(\lambda, y) \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

то есть $L_1(x, y)$ является производящей функцией для $p_{2m}(\lambda, y)$. Эти функции можно вычислить по рекуррентной формуле:

$$p_0(\lambda, y) = \frac{\operatorname{ch}(\lambda(a-y))}{\operatorname{ch}(\lambda a)}, \quad p_{2m}(\lambda, y) = -(2m-1) \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} p_{2m-2}(\lambda, y), \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$p_{2m}(\lambda, y) = (2m-1)!! \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m \frac{\operatorname{ch}(\lambda(a-y))}{\operatorname{ch}(\lambda a)}, \quad (21)$$

и, например,

$$u_1(x, y) = x \operatorname{ch}(\lambda y) - \frac{x \operatorname{sh}(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{ch}(\lambda a)},$$

$$u_2(x, y) = x^2 \operatorname{ch}(\lambda y) - \frac{x^2 \operatorname{sh}(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{y \operatorname{sh}(\lambda a) \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{a \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda} -$$

$$- \frac{y \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda} - \frac{a \operatorname{sh}^2(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda \operatorname{ch}^2(\lambda a)}.$$

При $\lambda \rightarrow 0$ функции $u_k(x, y)$ переходят в полиномы, являющиеся решениями краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа [2]. Например,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_0(x, y) = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_1(x, y) = x, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_2(x, y) = x^2 + 2ay - y^2.$$

Если $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^l$, $x \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, то решением задачи является функция:

$$v_l(x, y) = \sum_{m=0}^{[l/2]} C_l^{2m} x^{l-2m} q_{2m}(\lambda, y),$$

где функции $q_{2m}(\lambda, y)$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по x функции:

$$K_1(x, y) = \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{x^2 + \lambda^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \lambda^2} \operatorname{ch}\left(a\sqrt{x^2 + \lambda^2}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}(\lambda, y) \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

то есть $K_1(x, y)$ является производящей функцией для $q_{2m}(\lambda, y)$. Эти функции можно вычислить по рекуррентной формуле:

$$q_0(\lambda, y) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda a)}, \quad q_{2m}(\lambda, y) = -(2m-1) \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} q_{2m-2}(\lambda, y), \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Таким образом,

$$q_{2m}(\lambda, y) = (2m-1)!! \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda a)},$$

и, например,

$$v_1(x, y) = \frac{x \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda a)},$$

$$v_2(x, y) = \frac{x^2 \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda a)} - \frac{y \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^2 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^3 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{a \operatorname{sh}(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^2 \operatorname{ch}^2(\lambda a)}.$$

При $\lambda \rightarrow 0$ функции $v_l(x, y)$ переходят в полиномы, являющиеся решениями краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа [2].

Например,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} v_0(x, y) = y, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_1(x, y) = xy, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_2(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + a^2 y.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = x^2 y^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad \lambda > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Так же, как в случае задачи Дирихле, эта задача сводится к задаче для однородного уравнения:

$$\Delta v(x, y) - \lambda^2 v(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad \lambda > 0,$$

$$v(x, 0) = \frac{2x^2}{\lambda^4} + \frac{8}{\lambda^6}, \quad v_y(x, a) = \frac{2x^2 a}{\lambda^2} + \frac{4a}{\lambda^4}.$$

Решением исходной задачи будет функция:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\frac{x^2 y^2}{\lambda^2} - \frac{2y^2}{\lambda^4} - \frac{2x^2}{\lambda^4} - \frac{8}{\lambda^6} + \frac{2}{\lambda^4} u_2(x, y) + \\ & + \frac{8}{\lambda^6} u_0(x, y) + \frac{2a}{\lambda^2} v_2(x, y) + \frac{4a}{\lambda^4} v_0(x, y) = \\ = & -\frac{x^2 y^2}{\lambda^2} - \frac{2y^2}{\lambda^4} - \frac{2x^2}{\lambda^4} - \frac{8}{\lambda^6} + \frac{2x^2 \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^4} - \frac{2x^2 \operatorname{sh}(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^4 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{2y \operatorname{sh}(\lambda a) \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^5 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \\ & + \frac{2a \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5} - \frac{2y \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5} - \frac{2a \operatorname{sh}^2(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5 \operatorname{ch}^2(\lambda a)} + \frac{8 \operatorname{ch}((a-y)\lambda)}{\lambda^6 \operatorname{ch}(a\lambda)} + \frac{2a x^2 \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^3 \operatorname{ch}(\lambda a)} - \\ & - \frac{2ay \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^4 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{6a \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{2a^2 \operatorname{sh}(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^4 \operatorname{ch}^2(\lambda a)}. \end{aligned}$$

При $\lambda \rightarrow 0$ эта функция переходит в полином:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(x, y) = \frac{1}{12} x^2 y^4 - \frac{a^3}{3} x^2 y - \frac{1}{180} y^6 + \frac{a^3}{9} y^3 - \frac{3a^5}{10} y,$$

который является решением краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона [2]:

$$\Delta u(x, y) = x^2 y^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

5.2. Случай $n > 1$

Аналогично случаю задачи Дирихле получаем, что решением задачи Дирихле-Неймана при $\varphi(x) = x^k$, $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, будет функция:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y),$$

где $C_k^{2m} = C_{k_1}^{2m_1} C_{k_2}^{2m_2} \dots C_{k_n}^{2m_n}$, $[k/2] = ([k_1/2], [k_2/2], \dots, [k_n/2])$,

$$p_{2m}(\lambda, y) = \frac{(2m)! |m|!}{|2m|! m!} p_{2|m|}(\lambda, y).$$

При $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^k$ решением задачи Дирихле-Неймана будет функция:

$$v_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} q_{2m}(\lambda, y), \quad q_{2m}(\lambda, y) = \frac{(2m)! |m|!}{|2m|! m!} q_{2|m|}(\lambda, y).$$

Функции $p_{2|m|}(\lambda, y)$ и $q_{2|m|}(\lambda, y)$ находятся по формулам (21) и (22), соответственно.

6. Решение смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Гельмгольца в случае $v = \mu^2$

Все формулы, полученные в разделе 5, сохраняются с заменой гиперболических функций на круговые и заменой знака минус на знак плюс в правой части рекуррентных формул (21), (22). А именно, решение задачи Дирихле-Неймана:

$$\Delta u(x, y) + \mu^2 u(x, y) = 0, \quad \mu > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a, \quad (23)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (24)$$

записывается в виде свертки:

$$u(x, y) = l_n(|x|, y) * \varphi(x) + k_n(|x|, y) * \psi(x),$$

где

$$l_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1} [L_n(|t|, y)](x, y), \quad k_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1} [K_n(|t|, y)](x, y),$$

$$L_n(|t|, y) = \frac{\cos\left((a-y)\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}{\cos\left(a\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}, \quad K_n(|t|, y) = \frac{\sin\left(y\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}{\sqrt{\mu^2 - |t|^2} \cos\left(a\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}.$$

Если μ^2 не является собственным значением оператора Лапласа в слое с крайними условиями Дирихле-Неймана, то это решение будет единственным в классе функций медленного роста.

Для $\varphi(x) = x^k$, $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ решением задачи Дирихле-Неймана является функция:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\mu, y),$$

где

$$p_{2m}(\mu, y) = (2m-1)!! \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^m \frac{\cos(\mu(a-y))}{\cos(\mu a)}, \quad \mu \neq \pi/2a + \pi k/a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ решением задачи Дирихле-Неймана является функция:

$$v_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} q_{2m}(\mu, y),$$

где

$$q_{2m}(\mu, y) = (2m-1)!! \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^m \frac{\sin(\mu y)}{\mu \cos(\mu a)}, \quad \mu \neq \pi/2a + \pi k/a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Например,

$$v_2(x, y) = \frac{x^2 \sin(\mu y)}{\mu \cos(\mu a)} - \frac{y \cos(\mu y)}{\mu^2 \cos(\mu a)} + \frac{\sin(\mu y)}{\mu^3 \cos(\mu a)} + \frac{a \sin(\mu a) \sin(\mu y)}{\mu^2 \cos^2(\mu a)},$$

$$\mu \neq \pi/2a + \pi k/a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При μ , стремящемся к нулю, $v_2(x, y)$ переходит в полиномиальное решение задачи Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} v_2(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + a^2 y.$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, k, m – мультииндексы, то решения находятся по тем же формулам, в которых теперь

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad C_k^{2m} = C_{k_1}^{2m_1} C_{k_2}^{2m_2} \dots C_{k_n}^{2m_n}, \quad [k/2] = ([k_1/2], [k_2/2], \dots, [k_n/2]),$$

$$p_{2m}(\mu, y) = \frac{(2m)! |m|!}{|2m|! m!} p_{2|m|}(\mu, y), \quad q_{2m}(\mu, y) = \frac{(2m)! |m|!}{|2m|! m!} q_{2|m|}(\mu, y).$$

6.1. Единственность решения задачи Дирихле-Неймана

Аналогично случаю задачи Дирихле показывается, что решение задачи Дирихле-Неймана (23), (24) будет единственным в классе функций медленного роста, если

$$0 < \mu < \frac{\pi}{2a}, \quad 0 < \mu^2 < \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Если же $\mu^2 \geq \pi^2 / 4a^2$, $\mu^2 = \pi^2 / 4a^2 + b^2$, $b^2 \geq 0$, то функции

$$\sin(b_1 x_1) \sin(b_2 x_2) \dots \sin(b_n x_n) \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right),$$

где $b_1, b_2, \dots, b_n$ – произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие равенству $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = b^2$, являются нетривиальными решениями соответствующей однородной краевой задачи.

Пример 4. Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x, y) + \mu^2 u(x, y) = x^{(2,1,1)} y^3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \mu < \pi/2,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

По формуле (7) получаем полиномиальное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{\mu^2} x^{(2,1,1)} y^3 - \frac{2}{\mu^4} x^{(0,1,1)} y^3 - \frac{6}{\mu^4} x^{(2,1,1)} y + \frac{24}{\mu^6} x^{(0,1,1)} y,$$

и задача сводится к задаче для однородного уравнения:

$$\Delta v(x, y) + \mu^2 v(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \mu < \pi/2,$$

$$v(x, 0) = -\tilde{u}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$v_y(x, 1) = -\tilde{u}_y(x, 1) = -\frac{3}{\mu^2} x^{(2,1,1)} + \frac{6}{\mu^4} x^{(0,1,1)} + \frac{6}{\mu^4} x^{(2,1,1)} - \frac{24}{\mu^6} x^{(0,1,1)}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Решением этой задачи (единственным в классе функций медленного роста) является:

$$v(x, y) = -\frac{3}{\mu^2} v_{(2,1,1)}(x, y) + \frac{6}{\mu^4} v_{(0,1,1)}(x, y) + \frac{6}{\mu^4} v_{(2,1,1)}(x, y) - \frac{24}{\mu^6} v_{(0,1,1)}(x, y).$$

Решением исходной задачи будет квазиполином:

$$u(x, y) = \tilde{u}(x, y) + v(x, y) = \left(\frac{y^3}{\mu^2} - \frac{6y}{\mu^4} + \frac{6 \sin(\mu y)}{\mu^5 \cos(\mu)} - \frac{3 \sin(\mu y)}{\mu^3 \cos(\mu)} \right) x^{(2,1,1)} +$$

$$+ \left(-\frac{2y^3}{\mu^4} + \frac{24y}{\mu^6} + \frac{9 \sin(\mu y)}{\mu^5 \cos(\mu)} - \frac{30 \sin(\mu y)}{\mu^7 \cos(\mu)} + \frac{6y \cos(\mu y)}{\mu^6 \cos(\mu)} - \frac{3y \cos(\mu y)}{\mu^4 \cos(\mu)} + \frac{6 \sin(\mu y) \sin(\mu)}{\mu^6 \cos^2(\mu)} - \frac{3 \sin(\mu y) \sin(\mu)}{\mu^4 \cos^2(\mu)} \right) x^{(0,1,1)}.$$

При $\mu \rightarrow 0$ это решение переходит в полином:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u(x, y) = \left(\frac{1}{20} y^5 - \frac{1}{4} y \right) x^{(2,1,1)} + \left(-\frac{1}{420} y^7 + \frac{1}{12} y^3 - \frac{7}{30} y \right) x^{(0,1,1)},$$

который является решением задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона:

$$u(x, y) = x^{(2,1,1)} y^3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Заключение

В работе рассмотрены задачи Дирихле и Дирихле-Неймана в многомерном бесконечном слое для неоднородного уравнения Гельмгольца с полиномиальной правой частью и с полиномами в правых частях граничных условий. Показано, что единственным решением каждой из этих задач в классе функций медленного роста в случае, когда параметр уравнения не является собственным значением, будет квазиполином. Дан алгоритм построения этого квазиполинома и рассмотрены примеры.

Статья поступила в редакцию 27.11.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
2. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. №6. С. 1–18.
3. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Трикоми в полосе // Математика и математическое моделирование. 2018. №3. С. 1–12.
4. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Трикоми в полосе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 3. С. 8–21.
5. Никольский С. М. Краевая задача для многочленов // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 223–236.
6. Никольский С. М. Еще о краевой задаче с многочленами // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 286–288.
7. Карачик В. В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 7. С. 1149–1170.

8. Волков Е. А. Критерий разрешимости краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на специальных треугольниках и прямоугольнике в алгебраических многочленах // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 122–136.
9. Волков Е. А. О разрешимости в классе многочленов задачи Дирихле для уравнения Лапласа на произвольном многоугольнике // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 102–114.
10. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations // Methods and Applications of Analysis. 1999. Vol. 6. No. 1. P. 97–108.
11. Differential-symbol method of constructing the quasi-polynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation / Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Pukach P. Ya., Malanchuk O. M. // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 239. Iss. 1. P. 62–74.
12. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

REFERENCES

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 736 p.
2. Algazin O. D. [Polynomial Solutions of the Boundary-Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 1–18.
3. Algazin O. D. [Dirichlet problem polynomial solutions for the Tricomi equation in a strip]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2018, no. 3, pp. 1–12.
4. Algazin O. D. [Polynomial solutions to the mixed Dirichlet–Neumann boundary-value problem for the Tricomi equation in a strip]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics], 2018, no. 3, pp. 8–21.
5. Nikol'skii S. M. [A Boundary-Value Problem for Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1999, vol. 227, pp. 223–236.
6. Nikol'skii S. M. [More on a Boundary-Value Problem with Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2001, vol. 232, pp. 286–288.
7. Karachik V. V. [Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1149–1170.
8. Volkov E. A. [Criterion of Solvability for Boundary-Value Problems for the Laplace and Poisson Equations on Special Triangles and a Rectangle in Algebraic Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1999, vol. 227, pp. 122–136.
9. Volkov E. A. [On the Solvability, in the Class of Polynomials, of the Dirichlet Problem for the Laplace Equation on an Arbitrary Polygon]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2001, vol. 232, pp. 102–114.
10. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations. In: *Methods and Applications of Analysis*, 1999, vol. 6, no. 1, pp. 97–108.

11. Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Pukach P., Malanchuk O. M. Differential-symbol method of constructing the quasi-polynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation. In: *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 239, iss. 1, pp. 62–74.
12. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);

e-mail: mopi66@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg D. Algazin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;

e-mail: mopi66@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д. Точные решения краевых задач для уравнения Гельмгольца в слое с полиномами в правых частях уравнения и граничных условий // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 6–27. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-6-27

FOR CITATION

Algazin O. D. Exact solutions to the boundary-value problems for the Helmholtz equation in a layer with polynomials in the right-hand sides of the equation and of the boundary conditions. In: *Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 6–27.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-6-27