УДК 517.956.35
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-28-36

ОБ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ ХОПФА НАГРУЖЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Бозиев О. Л.[1,2]***, Абазоков М. А.***[1]

[1] *Кабардино-Балкарский государственный университет*
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173, Кабардино-Балкарская Республика, Российская Федерация

[2] *Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук*
360017, г. Нальчик, ул. Арманд, д. 37А, Кабардино-Балкарская Республика, Российская Федерация

Аннотация. **Цель** работы – исследовать на примере уравнения Хопфа способы редукции дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со степенной нелинейностью к нагруженным уравнениям. Применить решение редуцированного уравнения для последовательной аппроксимации решения нелинейного уравнения решениями линеаризованного уравнения.

Процедура и методы исследования. Рассмотрено два способа редукции. В первом из них искомая функция в нелинейном члене заменяется её средним значением по пространственной переменной. Для решения вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения возможна вторая редукция, на этот раз к алгебраическому уравнению. Во втором способе производится интегральный переход к нагруженному уравнению. Возникающее здесь вспомогательное уравнение решается с помощью частного решения соответствующего дифференциального неравенства.

Результаты проведённого исследования. Предложенные способы редукции после некоторых дополнительных преобразований позволяют получить начальные приближения для запуска итерационного процесса поиска приближенных решений нелинейной задачи. Показана возможность использования с этой целью частных решений дифференциальных неравенств, ассоциированных с уравнением.

Теоретическая/практическая значимость состоит в демонстрации возможности применения редукции к нагруженным уравнениям для нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со степенной нелинейностью.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, редукция к нагруженному уравнению, уравнение Хопфа, краевая задача, аппроксимация

APPROXIMATION OF THE HOPF EQUATION BY LOADED EQUATIONS

O. Boziev[1,2], M. Abazokov[1]

[1] *Kabardino-Balkarian State University*
ul. Chernyshevskogo 173, 360004 Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation

[2] *Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences*
ul. Armand 37A, 360017 Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation

Abstract. **Purpose.** We investigate the methods for reducing first-order partial differential equations with power nonlinearity to loaded equations using the example of the Hopf equation. The solution to the reduced equation is applied to a sequential approximation of the solution to a nonlinear equation by solutions to a linearized equation.
Methodology and Approach. Two methods of reduction are proposed. In the first of them, the desired function in the nonlinear term is replaced by its average value for the spatial variable. To solve an auxiliary ordinary differential equation, a second reduction is possible, namely, to an algebraic equation. In the second method, an integral transition is made to the loaded equation. The resulting auxiliary equation is solved using a partial solution to the corresponding differential inequality.
Results. The proposed methods of reduction after some additional transformations allow one to obtain initial approximations for starting the iterative process of searching for approximate solutions to a nonlinear problem. The possibility of using partial solutions associated with the differential inequality equation is shown.
Theoretical and Practical Implications. We have demonstrated the possibility of applying reduction to loaded equations to find approximate solutions to first-order partial differential equations with power nonlinearity.
Keywords: nonlinear equation, reduction to the loaded equation, Hopf equation, boundary-value problem, approximation.

Введение

Известно, что значительное количество физических, биологических, экологических и других процессов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Практически важные проблемы, вызывающие интерес к таким уравнениям, приводят к разного рода начально-краевым задачам для них. Наибольший интерес представляют аналитические решения дифференциальных уравнений, так как они позволяют получить формульные зависимости между параметрами задачи и её решением. При этом вид нелинейности существенно влияет на возможность получения такого решения.

В [1] предложен приближенно-аналитический метод решения первой начально-краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа второго порядка, содержащих натуральную степень решения, или его частной производной. Для нахождения приближенного решения нелинейного уравнения сначала производится его редукция к нагруженному уравнению [2, с. 17] путём замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной. Решение нагруженного уравнения ищется путём перехода к ассоциированному обыкновенному дифференциальному уравнению при использовании предварительно установленных априорных оценок нагруженного уравнения в соответствующих функциональных пространствах. Впоследствии оно используется для начала итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нелинейной задачи. В данной работе метод применяется к нелинейному уравнению первого порядка, при этом демонстрируются различные способы перехода к нагруженным уравнениям и нахождения начального приближения в итерационном процессе.

1. Постановка задачи

Как известно, квазилинейное уравнение Хопфа:

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1}$$

описывает динамику скорости течения жидкости $u(x,t)$, кинематическая вязкость которой равна нулю. Общим решением уравнения (1) является произвольная функция $\Phi(tu - x, u) = 0$ [3, с. 254]. Это же уравнение описывает и одномерное течение облака невзаимодействующих пылинок [4, с. 32], а также является частным случаем уравнение переноса:

$$q_t + Uq_x = 0,$$

где q – переносимая величина, U – скорость переноса.

Для (1) поставим условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \quad u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \quad \varphi(0) = \psi(0), \tag{2}$$

и будем рассматривать способы редукции (1) к нагруженному уравнению для приближенного решения задачи (1), (2).

2. Редукция к нагруженному уравнению

Применим метод редукции к нагруженным уравнениям, использованный в [1]. Для этого множитель $u(x,t)$ во втором слагаемом заменим его средним значением на некотором интервале $[0, l]$ по формуле

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l u(x,t)dx, \tag{3}$$

в результате чего уравнение (1) редуцируется к нагруженному уравнению:

$$u_t + \overline{u}u_x = 0. \tag{4}$$

Заметим, что (4) содержит ослабленную, по сравнению с уравнением (1), нелинейность, что позволяет произвести последующие преобразования. Проинтегрируем (4) по x:

$$\overline{u}\left(u(x,t) - u(0,t)\right) = -\int_0^x u_t(\xi,t)d\xi.$$

Применяя теорему о среднем значении интеграла, перейдём к нагруженному уравнению:

$$\overline{u}\left(u(x,t)-u(0,t)\right)=-\frac{x}{l}\int_{0}^{l}u_{t}(x,t)dx,$$

которое с учётом (2) и (3) перепишем в виде

$$u=\psi(t)-\frac{x}{l}\frac{\overline{u}'}{\overline{u}}. \tag{5}$$

Применим к последнему преобразование (3), что приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\overline{u}'+2\overline{u}^{2}-2\psi\overline{u}=0. \tag{6}$$

Необходимое для его интегрирования начальное условие получим из первого условия (2):

$$\overline{u}(0)=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}u(x,0)dx=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}\varphi(x)dx. \tag{7}$$

Подстановка функции $\overline{u}(t)$, найденной в результате решения задачи (6), (7), делает (4) линейным уравнением. Его решение при условиях (2) в свою очередь приводит к функции $u(x,t)$, принимаемой за начальное приближение в итерационном процессе решения последовательности задач вида:

$$u_{t}^{(k)}+u^{(k-1)}u_{x}^{(k)}=0,$$
$$u^{(k)}(x,0)=\varphi(x),\quad x\in[0,l],\quad u^{(k)}(0,t)=\psi(t),\quad t\in[0,T],\quad \varphi(0)=\psi(0), \tag{8}$$

где k = 1, 2, … – итерационный индекс. Процесс завершится при выполнении заданного условия его окончания.

Заметим, что от функций, входящих в условия (2), существенно зависит трудоёмкость процедуры интегрирования уравнения (6) и вид соответствующей функции $u^{(0)}$ которая, в свою очередь, влияет на интегрирование уравнения в (8). Для упрощения этих действий в развитие описанного способа произведём вторую редукцию [5]. На этот раз редуцируем нелинейное уравнение (6), для чего заменим в нём функцию $\overline{u}$ неопределённой константой:

$$\overline{\overline{u}}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\overline{u}(t)dt=\frac{1}{lT}\int_{0}^{T}\int_{0}^{l}u(x,t)dxdt. \tag{9}$$

Это приводит к линейному уравнению:

$$\overline{u}'=2\left(\psi\overline{\overline{u}}-\overline{\overline{u}}^{2}\right),$$

интегрирование которого даёт функцию:

$$\overline{u}(t)=2\overline{\overline{u}}\int\psi(t)dt-2\overline{\overline{u}}^{2}t+C. \tag{10}$$

Для определения $\overline{\overline{u}}$ применим к (10) преобразование (9). В результате придём к алгебраическому уравнению:

$$\overline{\overline{u}}^2+\frac{1}{T^2}\left(T-2\int_0^T\int\psi(t)dtdt\right)\overline{\overline{u}}-\frac{C}{T}=0. \qquad (11)$$

Найденное в результате решения (11) значение $\overline{\overline{u}}$ и подобранная константа C позволяют определить с помощью (10) функцию $\overline{u}(t)$, которая подставляется в (4) для того, чтобы найти $u^{(0)}$ для начала процесса (8).

Пример 1. Рассмотрим возможность нахождения начального приближения с помощью решения нелинейной задачи (6), (7). При условиях (2) простого вида, содержащих функции $\varphi(x)=1, \psi(t)=1,$ за решение (6) можно принять $\overline{u}(t)=th(2t+6)$ и найти с её помощью из (5) функцию:

$$u(x,t)=u^{(0)}(x,t)=cth(2t+6)\left(\psi(t)-\frac{4x}{ch(2t+6)-1}\right).$$

Очевидно, что она весьма неудобна для запуска итерационного процесса аналитического решения последовательности задач (8). Если условия (2) зависят соответственно от x и t, то $u^{(0)}$ имеет ещё более сложный вид. Для получения более простого вида этой функции применим вторую редукцию. Пусть $l = T = 1$. Решая (11), находим $\overline{\overline{u}}=\pm\sqrt{C}.$ Отсюда следует, что $C \geq 0$. Выберем $C = 1$, тогда $\overline{\overline{u}}=\pm 1.$ Выбирая $\overline{\overline{u}}=-1,$ по формуле (10) находим $\overline{u}(t)=1-4t,$ тогда (4) принимает вид:

$$u_t+(1-4t)u_x=0.$$

За решение данного уравнения примем линейную форму его первого интеграла, тогда:

$$u^{(0)}(x,t)=-2t^2+t-x.$$

Ниже приведены три первых приближения, полученные вследствие реализации процесса (8) средствами системы компьютерной математики Maple:

$$u^{(1)}(x,t)=(2t^2-5t+x+5)e^t,$$

$$u^{(2)}(x,t)=-\int(2t^2-5t+5)e^{t-e^t}dt+xe^{-e^t},$$

$$u^{(3)}(x,t)=xe^{Ei(e^t)}+\int e^{Ei(e^t)}\int(2t^2-5t+5)e^{t-e^t}dtdt. \qquad (12)$$

Полученные выражения последовательно аппроксимируют решение задачи (1), (2). Во всех приближениях, начиная с третьего, используется экспоненциальный интеграл $Ei(z)=\int_1^\infty\sigma^{-1}e^{-\sigma z}d\sigma.$

3. Интегральный переход к нагруженному уравнению

Рассмотрим способ, в котором нагруженное уравнение возникает «естественным» образом в процессе преобразований исходного уравнения, а не в результате замены нелинейного члена. Запишем (1) в виде:

$$2u_t + (u^2)_x = 0$$

и проинтегрируем по x:

$$u^2(x,t) = u^2(0,t) - 2\int_0^x u_t(\xi,t)d\xi.$$

Применяя теорему о среднем значении интеграла, получим нагруженное уравнение:

$$u^2(x,t) = u^2(0,t) - \frac{2x}{l}\int_0^l u_t(x,t)dx.$$

Используя (2) и обозначение (3), перепишем его в виде:

$$u^2(x,t) = \psi^2(t) - 2x\overline{u}' \qquad (13)$$

и проинтегрируем по $x \in [0, l]$:

$$\int_0^l u^2 dx = l\psi^2(t) - l^2\overline{u}'(t).$$

В силу неотрицательности левой части последнего приходим к дифференциальному неравенству:

$$\overline{u}'(t) \le \frac{1}{l}\psi^2(t). \qquad (14)$$

Пусть функция $\overline{u}(t)$ удовлетворяет следующему определению [6]: Функция $y(t)$, определенная на промежутке $[a,b]$, называется решением неравенства $y'(t) \le f(t,y)\ \forall t \in [a,b]$, где $f, f_y' \in C(G)$ в некоторой области $G \subset R^2$, если выполнены условия: 1) $y(t) \in C^1[a,b]$; 2) график $y(t)$ лежит в G при $t \in [a, b]$.

Согласно [7], все решения приведённого неравенства могут быть выражены через общее решение уравнения $y'(t) = f(t,y)$, зависящего от некоторой гладкой функции. Применяя к (14) эти результаты, можно определить функцию $\overline{u}(t)$, подстановка которой в (13) приводит к функции $u(x,t)$, принимаемой за начальное приближение в итерационном процессе (8).

Пример 2. По-прежнему $\varphi(x) = 1$, $\psi(t) = 1$. Тогда в соответствии с [6] и [7] решением (14) будет функция:

$$\overline{u}(t) = t + C(t),$$

где $C(t)$ – произвольная гладкая невозрастающая функция. Пусть $C(t) = -t$, тогда $\overline{u}(t) = 0$, а из (13) найдём $u = \pm 1$. Выберем для определённости положительный знак в правой части, и подставим в (4), что приводит к уравнению $u_t + u_x = 0$. Его решение, которым является «бегущая волна» $u(x,t) = t - x$ [8], примем за начальное приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе (8). Как и в предыдущем примере, в качестве решения на очередной итерации будем принимать линейную форму первого интеграла соответствующего уравнения. Воспользовавшись системой Maple, запишем первые три приближения:

$$u^{(1)}(x,t) = -(t - x - 1)e^{t},$$

$$u^{(2)}(x,t) = \int (t-1)e^{t-e^{t}}\,dt + xe^{-e^{t}},$$

$$u^{(3)}(x,t) = xe^{Ei(e^{t})} - \int e^{Ei(e^{t})} \int (t-1)e^{t-e^{t}}\,dtdt. \tag{15}$$

Получена последовательность функций, аппроксимирующих решение задачи (1), (2).

Заметим, что главным отличием соответствующих членов последовательностей (12) и (15) является степень многочлена, входящего в эти выражения. Нахождение последующих членов (12) и (15) демонстрирует тенденцию к их сближению, что может означать их стремление к одной и той же функции, являющейся точным решением исходной задачи.

Заключение

1. В работе на примере уравнения Хопфа впервые представлена методика нахождения приближенного решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка. Она состоит в редукции к ассоциированному нагруженному уравнению и решения последовательности линейных аппроксимирующих задач. Представлено два способа аппроксимации нелинейного уравнения нагруженным.
2. Реализован способ, состоящий в замене нелинейного члена уравнения его средним значением на отрезке изменения пространственной переменной, и в дальнейшем переходе к вспомогательному обыкновенному дифференциальному уравнению. Отмечено, что возможна вторая редукция, в результате которой вспомогательное уравнение сводится к алгебраическому.
3. Также применён способ, при котором аппроксимация является, главным образом, результатом интегрирования уравнения по пространственной переменной.
4. Получен новый результат, состоящий в использовании частного решения дифференциального неравенства, соответствующего нагруженному уравнению для начала итерационного процесса нахождения приближенных решений.
5. С помощью описанных способов построены первые члены последовательностей приближенных решений линейных аппроксимирующих задач.
6. Сформулировано предположение о сходимости указанных последовательностей к решению исходной нелинейной задачи.

Статья поступила в редакцию 16.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бозиев О. Л. О приближенно-аналитическом методе решения нелинейного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 3. С. 43–52.
2. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М: Наука, 2012. 232 с.
3. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 416 с.
4. Задачи по математическим методам физики / И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн, Е. В. Подивилов и др. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 288 с.
5. Бозиев О. Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2014. № 4 (60). С. 7–12.
6. Ильин Ю. А. Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). № 4. С. 597–607.
7. Ильин Ю. А. Об интегрировании дифференциальных неравенств в явном виде // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». 2015. № 1. С. 39–61. URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2015.1/article.1.3.html (дата обращения: 22.10.2019).
8. Лобанов А. И., Петров И. Б. Численные методы решения уравнений в частных производных [Электронный ресурс] // Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ» : [сайт]. URL: https://www.intuit.ru/studies/courses/1170/213/lecture/5493?page=2 (дата обращения: 12.11.2019).

REFERENCES

1. Boziev O. L. [On the approximate-analytic method of solving a nonlinear hyperbolic equation with homogeneous initial conditions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics – Mathematics], 2017, no. 3, pp. 43–52. 2. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012. 232 p.
3. Zaitsev V. F., Polyanin A. D. *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi* [Handbook of differential equations with partial derivatives]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003. 416 p.
4. Kolokolov I. V., Kuznetsov E. A., Mil'shtein A. I., Podivilov E. V. et al. *Zadachi po matematicheskim metodam fiziki* [Problems of mathematical methods of physics]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 288 p.
5. Boziev O. L. [Solving an initial boundary-value problem for the nonlinear hyperbolic equation using a double reduction to the loaded equations]. In: *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of Kabardino-Balkarian scientific center of the Russian academy of sciences], 2014, no. 4 (60), pp. 7–12.
6. Il'in Yu. A. [General problems of explicit integration of differential inequalities]. In: *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2017, vol. 4 (62), no. 4, pp. 597–607.
7. Il'in Yu. A. [On Explicit Integration of Differential Inequalities]. In: *Elektronnyi zhurnal 'Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya'* [Electronic journal "Differential equa-

tions and control processes"], 2015, no. 1, pp. 39–61. Available at: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2015.1/article.1.3.html (accessed: 22.10.2019).
8. Lobanov A. I., Petrov I. B. [Numerical methods for solving partial differential equations]. In: *Natsional'nyi Otkrytyi Universitet «INTUIT»* [The national Open University "INTUIT"]. Available at: https://www.intuit.ru/studies/courses/1170/213/lecture/5493?page=2 (accessed: 12.11.2019)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационной безопасности института информатики, электроники и робототехники Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН;
e-mail: boziev@yandex.ru

Абазоков Мухамед Адмирович – магистрант магистерской программы «Компьютерное моделирование» направления подготовки «Информатика и вычислительная техника» Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова;
e-mail: abazokov1997@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg L. Boziev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Security, Institute of Informatics, Electronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkarian State University; senior staff scientist of the Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: boziev@yandex.ru

Mukhamed A. Abazokov – master student of the Master's program "Computer Modeling" in the field of study "Computer Science and Computer Engineering", Kabardino-Balkarian State University;
e-mail: abazokov1997@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бозиев О. Л., Абазоков М. А. Об аппроксимации уравнения Хопфа нагруженными уравнениями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 28–36.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-28-36

FOR CITATION

Boziev O. L., Abazokov M. A. Approximation of the Hopf equation by loaded equations. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics – Mathematics,* 2020, no. 1, pp. 28–36.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-28-36