УДК 537.632

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-57-76

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СТИМУЛИРОВАННОЙ АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНОЙ КОНВЕРСИИ С УЧАСТИЕМ ДВУХ ИМПУЛЬСОВ РЕЗОНАНСНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ИМПУЛЬСА МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СИСТЕМЕ АТОМОВ ОДНОГО СОРТА

Зинган А. П., Васильева О. Ф.

*Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
3300, г. Тирасполь, ул. 25 Октября, д. 107, Республика Молдова*

Аннотация: Цель статьи в исследовании динамики атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате.

Процедура и методы исследования. Исследовано поведение потенциальной энергии некоего нелинейного осциллятора в зависимости от величины плотности фотонов второго импульса.

Результаты проведенного исследования. Найдено уравнение для плотности фотонов второго импульса в системе бозе-конденсированных атомов и молекул.

Теоретическая/практическая значимость состоит в том, что получены решения и найдены критические значения параметров, при которых сменяются режимы эволюции.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновский конденсат, атомно-молекулярная конверсия, го-моядерные молекулы.

FEATURES OF DYNAMICS OF STIMULATED ATOMIC–MOLECULAR CONVERSION INVOLVING TWO PULSES OF RESONANT LASER RADIATION AND A PULSE OF MICROWAVE RADIATION IN A SYSTEM OF ATOMS OF ONE SPECIES

A. Zingan, O. Vasilieva

*Pridnestrovian State University
ul. 25 Oktyabrya 107, 3300 Tiraspol, Republic of Moldova*

Abstract. Purpose. We study of the dynamics of atomic-molecular conversion in a Bose–Einstein condensate.

Methodology and Approach. The paper explores the behavior of the potential energy of some nonlinear oscillator as a function of the magnitude of the photon density of the second pulse.

Results. An equation is found for the density of photons of the second pulse in the system of Bose-condensed atoms and molecules.

Theoretical and Practical Implications. We have obtained the solutions and found critical values of parameters at which evolution modes change.

Keywords: Bose–Einstein condensate, atomic-molecular conversion, homonuclear molecules.

Введение

В последние годы образование гомо- и гетероядерных молекул из бозе-конденсированных атомов при сверхнизких температурах представляет большой интерес, так как предсказывается синтез более сложных молекул – трёх- и четырёхатомных [1]. В [2] представлено подробное исследование рассеивающих свойств ультрахолодных смесей бозонных атомов калия, найдено двадцать ранее ненаблюдаемых резонансов Фешбаха в изотопных смесях $K^{39} - K^{41}$. В частности, авторы [2] характеризуют параметры выбранного резонанса Фешбаха для K^{39} радиочастотной ассоциацией молекул Фешбаха. Эти результаты могут быть использованы для уточнения модельных потенциалов рассеяния калия. Кроме того, эти новые резонансы Фешбаха расширяют диапазон возможных экспериментов с вырожденными бозе-бозе-смесями.

Ранее были изучены свойства основного состояния расстроенной смеси двух видов твёрдых бозонов на треугольной решётке в зависимости от перестраиваемых амплитуд для туннелирования и взаимодействий.

Комбинируя три различных метода: самосогласованное среднее поле кластера, точную диагонализацию и эффективные теории, авторы [3] получили очень богатую фазовую диаграмму динамики системы бозонов.

Чин (C. Chin) и др. [4] наблюдали связывание молекул Cs_2 при сверхнизких температурах, которые рождались из атомного бозе-конденсата, и классифицировали их как фешбах-резонансы для ультрахолодных молекул Cs_2 с образованием гомоядерных молекул Cs_4 .

В экспериментальных исследованиях бозе-конденсатов получены гомоядерные K_2 [5], Li_2 [6], Cs_2 [7], Na_2 [8], Rb_2 [9], Yb_2 [10] и гетероядерные 7LiH [11], $^6Li^{40}K$ [12], $^6Li^{23}Na$ [13], $^6Li^{133}Cs$ [14], $^{39}K^{85}Rb$ [15] двухатомные молекулы. Наблюдались трехатомная гетероядерная молекула $^6Li^{40}K^{87}Rb$ [16] и гомоядерная четырехатомная молекула Cs_4 [17]. Данные этих экспериментальных исследований говорят о возможности образования и более сложных гомо- и гетероядерных молекул в условиях бозе-конденсации.

В [18] вычислено уравнение состояния бозе-бозе-газов в одном и в трёх измерениях в рамках эффективной квантовой теории поля. Выведено нелинейное уравнение Шредингера для описания одномерных и трёхмерных бозе-бозе-смесей, и получено его аналитическое решение в одномерном случае. При низкой температуре обнаружено, что давление и число частиц симметричных квантовых капель имеют нетривиальную зависимость от химического потенциала и разности констант внутри- и межвидовой связи. Также в [19] предложен тип резонанса Фешбаха, возникающий, когда два различных ультрахолодных атома в их основном состоянии сталкиваются с s -волной под действием лазерного излучения. Столкновительные уровни пары атомов связаны лазером с ровибрационным молекулярным уровнем того же электронного основного состояния (лазерный самоиндуцированный резонанс Фешбаха). Этот механизм действует для всех гетероядерных квантовых газовых смесей и был рассмотрен на примере ультрахолодных атомов Rb^{87} и Sr^{84} , для которых резонансная частота лазера находится в субтерагерцовом диапазоне. Было показано, что медленное изме-

нение частоты допускает адиабатическое образование ультрахолодных молекул $Rb^{87}Sr^{84}$ способом, очень похожим на магнитный резонанс Фешбаха.

В работе [20] сообщается о достижении бозе-эйнштейновской конденсации атомов эрбия и о наблюдении магнитных резонансов Фешбаха в слабых магнитных полях. Путём охлаждения в оптической дипольной ловушке получены чистые конденсаты Er^{168} , содержащие до $7 \cdot 10^4$ атомов, и продемонстрировано применение низкочастотного резонанса Фешбаха для получения перестраиваемого дипольного бозе-эйнштейновского конденсата. В [21] Нуп (Knoor S.) и др. говорят о наблюдении элементарного процесса обмена в оптически захваченной ультрахолодной смеси атомов и молекул Фешбаха. Доказана возможность магнитного контроля процесса конверсии атомов и молекул, что позволяет наблюдать ярко выраженное пороговое поведение. В отличие от релаксации к более глубоко связанным молекулярным состояниям, обменный процесс не приводит к потере ловушки. В данной работе показано согласие между экспериментальными наблюдениями и расчётами, основанными на решениях трёхчастичного уравнения Шредингера в адиабатическом гиперсферическом представлении. Высокая эффективность процесса обмена объясняется разнообразием как начальных, так и конечных молекулярных состояний.

В [22] предложен метод получения состояний заданной квантованной циркуляции в кольцевых бозе-эйнштейновских конденсатах (БЭК), замкнутых в кольцевой ловушке, с использованием метода «впечатывания фазы» без опоры на двухфотонный перенос углового момента. Требуемый фазовый профиль отпечатывается на атомной волновой функции с помощью короткого светового импульса с заданной диаграммой интенсивности, генерируемой с помощью пространственного модулятора света. Исследован эффект отпечатывания профиля интенсивности, сглаженного конечным оптическим разрешением, на кольцевой БЭК с численным моделированием зависящего от времени уравнения Гросса-Питаевского. Это позволило оптимизировать диаграмму интенсивности для заданной целевой циркуляции, чтобы компенсировать ограниченное разрешение. Авторами [23] показано, что реакции изотопного обмена между гетероядерными димерами щелочного металла, щелочноземельного металла и лантанида, состоящими из двух изотопов одного и того же атома, являются экзотермическими с изменением энергии в диапазоне 1–8000 МГц, что приводит к образованию холодных или ультрахолодных молекул. Для этих химических реакций существует только один колебательный и не более нескольких возможных сверхтонких состояний. Предложено лазерно-индуцированное изотопно-селективное управление штарковским сдвигом, чтобы настроить экзотермические реакции изотопного обмена на эндотермические, тем самым создавая основу для тестирования моделей химической реактивности. Данная модель открывает путь для изучения динамики состояния ультрахолодных химических реакций контролем квантовых состояний как реагентов, так и молекул.

Оптический контроль атомных взаимодействий в квантовых газах является целью исследований ультрахолодных атомов. В [24] разработана и реализована общая схема оптического управления резонансами Фешбаха, которая даёт боль-

шие квантовые времена жизни. Показано, что быстрое и локальное управление взаимодействиями приводит к интересной квантовой динамике в новых режимах, выделенных образованием молекул Ван-дер-Ваальса и локализованным коллапсом бозе-конденсата.

Ранее были получены условия равновесия для термической смеси атомов и молекул вблизи резонанса Фешбаха. В предположении о низких потерях при столкновении были рассчитаны термодинамические свойства и проведены сравнения с результатами эксперимента на термических фермионных атомах лития. Также оценены возможные механизмы столкновения, которые могут привести к преобразованию атома в молекулу и предложена новая схема испарительно-го охлаждения для эффективного охлаждения молекул в бозе-эйнштейновском конденсате [25].

В [26] представлены результаты теоретического исследования явления фотоассоциации бозе-конденсированных ультрахолодных атомов и трёхатомных молекул с образованием двухатомных гетероядерных димеров и атомов. Показана возможность существования синфазного и антифазного режимов эволюции системы, при которых возможен как периодический, так и аперриодический режим превращения атомов в молекулы.

Учитывая актуальность изучения бозе-конденсатов, нами представлены результаты исследования процесса стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии с участием двух импульсов резонансного лазерного излучения и импульса микроволнового излучения в системе одинаковых атомов с образованием гомоядерных молекул.

Постановка задачи. Основные результаты

Процесс атомно-молекулярной конверсии в бозе-конденсате под действием двух импульсов резонансного лазерного излучения и импульса микроволнового излучения можно представить в виде $a + a + c_1 + c \leftrightarrow b + c_2$, где обозначены через a – атомы одного и того же сорта, c_1 и c_2 – фотоны с частотами ω_1 и ω_2 , b – гомоядерная молекула и c – фотон микроволнового излучения (рис. 1).

Два бозе-конденсированных атома одного сорта, с нулевыми кинетическими энергиями и с полной энергией $E_i = 2\hbar\omega_0$, переходят через возбуждённое молекулярное состояние с энергией E_u в основное состояние гомоядерной молекулы с энергией $E_m = \hbar\Omega_0$. Для этого перехода используются два коротких фазово-когерентных импульса и один микроволновый с энергиями фотонов $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ и $\hbar\omega'$. В этом случае пара атомов aa образует гомоядерную молекулу b (рис. 1).

Промежуточное возбуждённое состояние образованной молекулы с энергией E_u можно не рассматривать, используя принцип адиабатического следования [27]. В [28–31] показано, что населённости двух нижних уровней на много порядков больше населённости верхнего возбуждённого. Поэтому мы можем рассматривать атомно-молекулярную конверсию не как двухступенчатый процесс, а как одноступенчатый. Тогда гамильтониан взаимодействия H_{int} можно представить в виде:

Рисунок 1 / Figure 1

Энергетическая схема квантовых переходов атомов и молекул под действием импульсов резонансного лазерного излучения и микроволнового.

Energy diagram of quantum transitions of atoms and molecules under the action of pulses of resonant and microwave laser radiation.

Источник: составлено авторами.

$$H_{\text{int}} = \hbar g (\hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{b} \hat{c}_1^+ \hat{c}_2 + \hat{a} \hat{a} \hat{b}^+ \hat{c}_1 \hat{c}_2^+) + \hbar \kappa (\hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{b} \hat{c} + \hat{a} \hat{a} \hat{b}^+ \hat{c}^+), \quad (1)$$

где a и b – бозонные операторы уничтожения атомных и молекулярных состояний; $c_{1,2}$ и c – операторы уничтожения фотонов; g, κ – константы взаимодействия.

Используя гамильтониан (1), получают систему уравнений для операторов $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}_1, \hat{c}_2$ и $\hat{c}$. Используя приближение среднего поля (mean field approximation) и усредняя эту систему гайзенберговских уравнений [32], можно получить систему нелинейных уравнений для амплитуд материального $\langle a \rangle = a, \langle b \rangle = b$ и электромагнитного $\langle c_{1,2} \rangle = c_{1,2}, \langle c \rangle = c$ полей:

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= 2ga^*bc_1c_2 + 2\kappa a^*cb; \\ i\dot{b} &= gaac_1c_2^* + \kappa aac^*; \\ i\dot{c}_1 &= ga^*a^*bc_2; \\ i\dot{c}_2 &= gaab^*c_1; \\ i\dot{c} &= \kappa aab^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем искать решение системы (2) в виде $a = Ae^{i\omega t}$; $b = Be^{i\omega t}$; $c_1 = C_1e^{i\varphi_1}$; $c_2 = C_2e^{i\varphi_2}$; $c = Ce^{i\varphi}$, тогда получаем систему уравнений для амплитуд и разностей фаз:

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= 2gABC_1C_2 \sin \theta + 2\kappa ABC \sin \Gamma \\
\dot{B} &= -gA^2C_1C_2 \sin \theta - \kappa A^2C \sin \Gamma \\
\dot{C}_1 &= gA^2BC_2 \sin \theta \\
\dot{C}_2 &= -gA^2BC_1 \sin \theta \\
\dot{C} &= -\kappa A^2B \sin \Gamma
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{\theta} = g \left(4BC_1C_2 - \frac{A^2C_1C_2}{B} + \frac{A^2BC_2}{C_1} - \frac{A^2BC_1}{C_2} \right) \cos \theta + \kappa \left(4BC - \frac{A^2C}{B} \right) \cos \Gamma,$$

$$\dot{\Gamma} = g \left(4BC_1C_2 - \frac{A^2C_1C_2}{B} \right) \cos \theta + \kappa \left(4BC - \frac{A^2C}{B} - \frac{A^2B}{C} \right) \cos \Gamma,$$

где $\theta = -\varphi + \psi - \varphi_1 + \varphi_2$, $\Gamma = -2\varphi + \Phi + \psi$.

Приведём данную систему уравнений к более простому виду, для чего проверим, при каких условиях это возможно. Очевидно, что решение $\theta = \pm\pi/2$; $\Gamma = \pm\pi/2$ удовлетворяет системе уравнений (3). Подставляя $\theta = \pi/2$ и $\Gamma = \pi/2$ в (3), получаем:

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= 2gABC_1C_2 + 2\kappa ABC \\
\dot{B} &= -gA^2C_1C_2 - \kappa A^2C \\
\dot{C}_1 &= gA^2BC_2 \\
\dot{C}_2 &= -gA^2BC_1 \\
\dot{C} &= -\kappa A^2B
\end{aligned} \tag{4a}$$

Будем считать, что это уравнение описывает так называемую синфазную эволюцию системы. Тогда из системы уравнений (3) легко получить ещё три системы уравнений для случаев синфазной и антифазной эволюций, когда разности фаз θ и Γ принимают конкретные значения:

синфазный режим $\theta = \Gamma = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= -2gABC_1C_2 - 2\kappa ABC \\
\dot{B} &= gA^2C_1C_2 - \kappa A^2C \\
\dot{C}_1 &= -gA^2BC_2 \\
\dot{C}_2 &= gA^2BC_1 \\
\dot{C} &= \kappa A^2B,
\end{aligned} \tag{4б}$$

антифазный режим $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\Gamma = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= 2gABC_1C_2 - 2\kappa ABC \\
\dot{B} &= -gA^2C_1C_2 + \kappa A^2C \\
\dot{C}_1 &= gA^2BC_2 \\
\dot{C}_2 &= -gA^2BC_1 \\
\dot{C} &= \kappa A^2B,
\end{aligned} \tag{4в}$$

антифазный режим $\theta = -\frac{\pi}{2}, \Gamma = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= -2gABC_1C_2 + 2\kappa ABC \\
\dot{B} &= gA^2C_1C_2 - \kappa A^2C \\
\dot{C}_1 &= -gA^2BC_2 \\
\dot{C}_2 &= gA^2BC_1 \\
\dot{C} &= -\kappa A^2B.
\end{aligned} \tag{4г}$$

Из (4а) – (4г) легко получить следующие интегралы движения:

$$A^2 + 2B^2 = A_0^2 + 2B_0^2,$$

$$C_1^2 + C_2^2 = C_{10}^2 + C_{20}^2,$$

$$C_1 = \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2} \cdot \sin \left[\frac{g}{\kappa} (C_0 - C) + \arcsin \left(\frac{C_{10}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right],$$

$$C_2 = \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2} \cdot \sin \left[\frac{g}{\kappa} (C - C_0) + \arcsin \left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right].$$

Рассмотрим простейший случай. Пусть в начальный момент времени отсутствуют фотоны второго импульса, микроволнового излучения и гомоядерные молекулы $C_{20} = 0, C_0 = 0, B_0 = 0, C_{10} \neq 0, A_0 \neq 0$. Тогда интегралы движения приводятся к виду:

$$A^2 = A_0^2 - 2B^2; \tag{5}$$

$$C_1^2 = C_{10}^2 - C_2^2; \tag{6}$$

Из (4а) следует, что уравнение для C_2 в этом случае имеет вид:

$$\dot{C}_2 = -gA^2BC_1; \tag{7}$$

Система исходных уравнений (4а) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{B} &= -A^2 (gC_1C_2 + \kappa C) \\
 \dot{C}_2 &= -g(A_0^2 - 2B^2)B\sqrt{C_{10}^2 - C_2^2} \\
 \dot{C} &= -\kappa(A_0^2 - 2B^2)B.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Проинтегрировав, получим решение (7) в виде:

$$C_2 = C_{10} \sin\left(\frac{g}{\kappa}C\right). \tag{9}$$

Из (6) и (9) получаем, что плотность фотонов первого импульса изменяется по закону косинуса:

$$C_1 = C_{10} \cos\left(\frac{g}{\kappa}C\right). \tag{10}$$

Подставив (5), (9) и (10) в уравнение для плотности молекул B , из системы уравнений (8) получаем:

$$\dot{B} = -2g\left(\frac{1}{2}A_0^2 - B^2\right)\left(C_2\sqrt{C_{10}^2 - C_2^2} + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right). \tag{11}$$

В этом случае удаётся записать ещё один интеграл движения:

$$B^2 = C_2^2 + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) \tag{12}$$

и свести задачу к одному дифференциальному уравнению для плотности фотонов второго импульса C_2 , которое является существенно нелинейным:

$$\frac{dC_2}{dt} = \pm 2g\left(\frac{1}{2}A_0^2 - C_2^2 - \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right)\sqrt{C_2^2 + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)} \cdot \sqrt{C_{10}^2 - C_2^2}. \tag{13}$$

После введения подстановок $C_2 = C_{10}\sin(y)$, $\frac{A_0^2}{2C_{10}^2} = \alpha^2$, $\frac{\kappa^2}{g^2C_{10}^2} = K^2$, $\tau = 2gC_{10}^3t$

уравнение (13) запишется в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \pm(\alpha^2 - \sin^2(y) - K^2y^2)\sqrt{\sin^2(y) + K^2y^2}. \tag{14}$$

Представим уравнение (13) в более удобном для интерпретации виде:

$$\left(\frac{dC_2}{dt}\right)^2 + W(C_2) = 0, \quad (15)$$

где $W(C_2)$ – потенциальная энергия некоторого нелинейного осциллятора при полной энергии, равной нулю:

$$W(C_2) = -4g^2 \left(\frac{1}{2} A_0^2 - C_2^2 - \frac{\kappa^2}{g^2} \arcsin^2 \left(\frac{C_2}{C_{10}} \right) \right)^2 \left(C_2^2 + \frac{\kappa^2}{g^2} \arcsin^2 \left(\frac{C_2}{C_{10}} \right) \right) \times (16) \\ \times (C_{10}^2 - C_2^2).$$

При введении подстановки $\sin^2(y) + K^2 y^2 = z$ уравнение для потенциальной энергии примет вид:

$$W = -(\alpha^2 - z)^2 z. \quad (17)$$

Обозначим $C_2 = C_{10} \cdot f_2$, $A_0 = C_{10} \cdot \sqrt{a_0}$, $K = \frac{\kappa}{gC_{10}}$, тогда нормированная кон-

станта взаимодействия K и нормированная плотность атомов a_0 будут зависеть от плотности фотонов f_2 следующим образом:

$$K^2 = \frac{\frac{1}{2} a_0^2 - f_2^2}{\arcsin^2(f_2)}, \quad (18)$$

$$a_0^2 = 2 \cdot (f_2^2 + K^2 \arcsin^2(f_2)). \quad (19)$$

Из (18) и (19) видно, что нормированная плотность фотонов f_2 монотонно растёт с ростом плотности атомов a_0 при фиксированной константе взаимодействия K и монотонно убывает с ростом K при фиксированном a_0 .

Изучая зависимость потенциальной энергии W нелинейного осциллятора, можно установить качественно характер изменения плотности фотонов второго импульса во времени $f_2(t)$. Если полная энергия осциллятора равна нулю, то изменение плотности $f_2(t)$ со временем возможно в той области значений f_2 , где $W(f_2) \leq 0$. Из рис. 2 видно, что потенциальная энергия W в зависимости от плотности фотонов f_2 сначала монотонно убывает, достигает своего минимума и затем растёт до нуля, оставаясь меньше нуля при $0 < f_2 < 1$.

На рис. 2 также возникают две области значений $W \leq 0$, в которых функция W оказывается отрицательной. Поэтому движение изображающей точки может быть (в зависимости от начального состояния системы) как в первой, так и во второй области. Причём из графика $W(f_2)$ видно, что возможен только апериодический режим эволюции.

Рисунок 2 / Figure 2

Зависимость потенциальной энергии W от плотности фотонов второго импульса f_2 при различных значениях нормированной константы взаимодействия K и нормированной плотности атомов a_0 при $C_0 = C_{20} = B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Dependence of the potential energy W on the photon density of the second pulse f_2 for various values of the normalized interaction constant K and the normalized atomic density a_0 for $C_0 = C_{20} = B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

Рассмотрим далее случай, когда в начальный момент времени отсутствуют фотоны второго импульса и гомоядерные молекулы $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$, $C_0 \neq 0$. Тогда получаем интегралы движения в виде:

$$A^2 = A_0^2 - 2B^2;$$

$$C_1^2 = C_{10}^2 - C_2^2; \quad (20)$$

$$C = C_0 + \kappa \arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right);$$

$$B^2 = \left(C_2^2 + 2 \frac{\kappa C_0}{g} \arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) + \frac{\kappa^2}{g^2} \arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) \right).$$

Окончательно получаем уравнение для C_2 , которое является существенно нелинейным:

$$\begin{aligned} \frac{dC_2}{dt} = & \pm 2g \left(\frac{1}{2} A_0^2 - C_2^2 - 2 \frac{\kappa C_0}{g} \arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) - \frac{\kappa}{g^2} \arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) \right) \times \\ & \times \sqrt{C_2^2 + 2 \frac{\kappa C_0}{g} \arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) + \frac{\kappa^2}{g^2} \arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)} \cdot \sqrt{C_{10}^2 - C_2^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Как и ранее, вводим подстановку $C_2 = C_{10} \sin(y)$. Тогда из (21) получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \pm 2g \left(\frac{1}{2} A_0^2 - C_{10}^2 \sin^2(y) - 2 \frac{\kappa C_0}{g} y - \frac{\kappa^2}{g^2} y^2 \right) \cdot \sqrt{C_{10}^2 \sin^2(y) + 2 \frac{\kappa C_0}{g} y + \frac{\kappa^2}{g^2} y^2}. \quad (22)$$

При этом потенциальная энергия нелинейного осциллятора при полной энергии, равной нулю, имеет вид:

$$W(C_2) = -4g^2 \left(\frac{1}{2} A_0^2 - C_2^2 - 2 \frac{\kappa C_0}{g} \arcsin \left(\frac{C_2}{C_{10}} \right) - \frac{\kappa^2}{g^2} \arcsin^2 \left(\frac{C_2}{C_{10}} \right) \right)^2 \times \\ \times \left(C_2^2 + 2 \frac{\kappa C_0}{g} \arcsin \left(\frac{C_2}{C_{10}} \right) + \frac{\kappa^2}{g^2} \arcsin^2 \left(\frac{C_2}{C_{10}} \right) \right) \cdot (C_{10}^2 - C_2^2). \quad (23)$$

Нормированная константа взаимодействия K и нормированная плотность атомов a_0 выражается через плотность фотонов f_2 следующим образом:

$$K = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} a_0^2 - f_2^2 + f_0^2 - f_0}}{\arcsin(f_2)}, \quad (24)$$

$$a_0^2 = 2 \cdot \left(f_2^2 - f_0^2 + (f_0 + K \arcsin(f_2))^2 \right). \quad (25)$$

Как и в предыдущем случае, плотность фотонов второго импульса f_2 монотонно растёт с ростом a_0 при фиксированных значениях K и монотонно убывает с ростом K при фиксированном a_0 . Потенциальная энергия также имеет минимум и две области значений $W \leq 0$. Эволюция может быть как в первой, так и во второй области (рис. 3).

Рисунок 3 / Figure 3

Зависимость потенциальной энергии W от плотности фотонов второго импульса f_2 при различных значениях нормированной константы взаимодействия K и нормированной плотности атомов a_0 при $C_{20} = B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Dependence of the potential energy W on the photon density of the second pulse f_2 for various values of the normalized interaction constant K and the normalized atomic density a_0 for $C_{20} = B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

На рис. 4 представлена временная эволюция плотности фотонов второго импульса $f_2(t)$ при заданных начальных условиях $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$, $C_0 \neq 0$. Видно, что в этом случае имеет место аperiодический режим изменения плотности фотонов по второму каналу. Плотность фотонов растёт и на больших временах приходит к насыщению.

Рисунок 4 / Figure 4

Эволюция плотности фотонов в зависимости от времени $f_2(t)$ в случае $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Evolution of the photon density as a function of time $f_2(t)$ in the case of $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

Рассмотрим далее случай, когда в начальный момент времени отсутствуют только гомоядерные молекулы $B_0 = 0$, а остальные плотности частиц отличны от нуля $C_{10} \neq 0$, $C_{20} \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $A_0 \neq 0$. Тогда интегралы движения приводятся к виду:

$$A^2 = A_0^2 - 2B^2;$$

$$C_1^2 = C_{10}^2 + C_{20}^2 - C_2^2; \quad (26)$$

$$C_2 = \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2} \cdot \sin \left[\frac{g}{\kappa} (C - C_0) + \arcsin \left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right];$$

$$B^2 = C_2^2 - C_{20}^2 - C_0^2 + \left[C_0 + \frac{\kappa}{g} \left(\arcsin \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right) \right]^2.$$

Таким образом, окончательно получаем нелинейное дифференциальное уравнение для плотности фотонов C_2 в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dC_2}{dt} = & \pm 2g \left\{ \frac{1}{2} A_0^2 + C_0^2 + C_{20}^2 - C_2^2 - \left[C_0 + \frac{\kappa}{g} \left(\arcsin \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \arcsin \left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right) \right]^2 \right\} \cdot \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2 - C_2^2} \times \\ & \times \sqrt{C_2^2 - C_{20}^2 - C_0^2 + \left[C_0 + \frac{\kappa}{g} \left(\arcsin \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right) \right]^2}. \quad (27) \end{aligned}$$

Уравнение для потенциальной энергии примет вид:

$$\begin{aligned} W = & -4g^2 \left\{ \frac{1}{2} A_0^2 + C_0^2 + C_{20}^2 - C_2^2 - \right. \\ & \left. - \left[C_0 + \frac{\kappa}{g} \left(\arcsin \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right) \right]^2 \right\}^2 \times \\ & \times \left(C_2^2 - C_{20}^2 - C_0^2 + \left[C_0 + \frac{\kappa}{g} \left(\arcsin \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}} \right) \right) \right]^2 \right) \times \quad (28) \\ & \times (C_{10}^2 + C_{20}^2 - C_2^2). \end{aligned}$$

В этом случае нормированная константа взаимодействия K и нормированная плотность атомов a_0 выражается через плотность фотонов f_2 следующим образом:

$$K = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} a_0^2 - f_2^2 + f_{20}^2 + f_0^2 - f_0}}{\arcsin \left(\frac{f_2}{\sqrt{1 + f_{20}^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{f_{20}}{\sqrt{1 + f_{20}^2}} \right)}, \quad (29)$$

$$a_0^2 = 2 \cdot \left(f_2^2 - f_{20}^2 - f_0^2 + \left[f_0 + K \left(\arcsin \left(\frac{f_2}{\sqrt{1+f_{20}^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{f_{20}}{\sqrt{1+f_{20}^2}} \right) \right) \right]^2 \right). \quad (30)$$

На рис. 5 представлены графики потенциальной энергии, которые дают качественное представление об эволюции. Как видно, потенциальная энергия нелинейного осциллятора характеризуется наличием минимума, в пределах которого изображающая точка располагается в начальный момент времени и может со временем колебаться, что соответствует периодическому режиму эволюции системы, в отличие от предыдущего случая (рис. 2, 3).

Рисунок 5 / Figure 5

Зависимость потенциальной энергии W от плотности фотонов второго импульса f_2 при различных значениях нормированной константы взаимодействия K и нормированной плотности атомов a_0 при $B_0 = 0$, $C_{20} \neq C_0 \neq C_{10} \neq A_0 \neq 0$.

Dependence of the potential energy W on the photon density of the second pulse f_2 for various values of the normalized interaction constant K and the normalized atomic density a_0 for $B_0 = 0$, $C_{20} \neq C_0 \neq C_{10} \neq A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

На основе этих результатов, на рис. 6а и 6б показана временная эволюция плотности фотонов второго импульса $f_2(t)$ и фазовая траектория на плоскости $(\dot{f}_2, f_2)$.

Рисунок 6 / Figure 6

- Случай $B_0 = 0$, $C_{20} \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$ а) эволюция плотности фотонов $f_2(t)$; б) фазовая траектория для значения константы взаимодействия κ равном 0,1; в) период колебаний в зависимости от значения константы взаимодействия κ ; г) фазовая траектория для критического значения константы взаимодействия κ равном 0,18.
 (a) Evolution of the photon density $f_2(t)$; (b) phase trajectory for the value of the interaction constant κ equal to 0.1; (c) period of oscillations as a function of the value of the interaction constant κ ; (d) phase trajectory for the critical value of the interaction constant κ equal to 0.18 for $B_0 = 0$, $C_{20} \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

Видно, что плотность фотонов $f_2(t)$ демонстрирует двупериодическое поведение в зависимости от времени. Фазовая траектория (рис. 6б) состоит из двух замкнутых кривых, которые соприкасаются при $\dot{f}_2(t) = 0$. Периоды колебаний функций существенно зависят от параметров системы и от начальных условий. Существуют такие значения параметров, при которых период функции $f_2(t)$ начинает быстро расти и обращается в бесконечность при $f_2 \rightarrow 0$ (рис. 6в, 6г).

Из рис. 6а также видно, что при малых значениях параметра κ имеет место двупериодическая эволюция плотности фотонов второго импульса $f_2(t)$, амплитуда колебаний которой растёт с ростом константы взаимодействия κ . Однако, при некотором критическом значении κ (рис. 6в, 6г) плотность $f_2(t)$ переходит из периодического в аperiodический режим эволюции.

Выводы

Таким образом, из представленных результатов следует, что изучаемая система демонстрирует как периодическую, так и аperiodическую эволюцию при изменении параметров системы (например, константы взаимодействия или начальных плотностей частиц), причём существуют критические значения па-

раметров, при которых происходят срывы из одного типа эволюции в другой. Изменением параметров системы можно гибко контролировать её эволюцию.

Статья поступила в редакцию 06.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджи П. И., Зинган А. П. Особенности динамики стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии в смеси двух бозе-газов с образованием бозе-конденсированных гетероядерных молекул // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 139. № 4. С. 645–665.
2. Feshbach resonances in potassium Bose–Bose mixtures / Tanzi L., Cabrera C. R., Sanz J., Cheiney P., Tomza M., Tarruell L. // Physical Review A. 2018. Vol. 98. Iss. 6. P. 062712.
3. Trouselet F., Rueda-Fonseca P., Ralko A. Competing supersolids of Bose–Bose mixtures in a triangular lattice // Physical Review B. 2014. Vol. 89. Iss. 8. P. 085104.
4. Observation of Feshbach-Like Resonances in Collisions between Ultracold Molecules / Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Nдgerl H.-C., Grimm R. // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94. Iss. 12. P. 123201.
5. Creation of ultracold molecules from a Fermi gas of atoms / Regal C. A., Ticknor G., Bohn J. L., Jin D. S. // Nature. 2003. No. 424. P. 47–50.
6. Strecker K. E., Partridge G. B., Hulet R. G. Conversion of an Atomic Fermi Gas to a Long-Lived Molecular Bose Gas // Physical Review Letters. 2003. Vol. 91. Iss. 8. P. 080406.
7. Preparation of a Pure Molecular Quantum Gas / Herbig J., Kraemer T., Mark M., Weber T., Chin C., Nдgerl H.-C., Grimm R. // Science. 2003. Vol. 301. Iss. 5639. P. 1510–1513.
8. Formation of Quantum-Degenerate Sodium Molecules / Xu K., Mukaiyama T., Abo-Shaer J. R., Chin J. K., Miller D. E. // Physical Review Letters. 2003. Vol. 91. Iss. 21. P. 210401.
9. Coherent Optical Transfer of Feshbach Molecules to a Lower Vibrational State / Winkler K., Lang F., Thalhammer G., Straten P., Grimm R., Denschlag J. H. // Physical Review Letters. 2007. Vol. 98. Iss. 4. P. 043201.
10. Two-color photoassociation spectroscopy of ytterbium atoms and the precise determinations of s-wave scattering lengths / Kitagawa M., Enomoto K., Kasa K., Takahashi Y., Ciurylo R., Naidon P., Julienne P.S. // Physical Review A. 2008. Vol. 77. Iss. 1. P. 012719.
11. Stark deceleration of lithium hydride molecules / Tokunaga S. K., Dyne J. M., Hinds E. A., Tarbutt M. R. // New Journal of Physics. 2009. Vol. 11. No. 5. P. 055038.
12. Erratum: Ultracold Heteronuclear Fermi–Fermi Molecules / Voigt A.-C., Taglieber M., Costa L., Aoki T., Wieser W., Hdnsch T.W., Dieckmann K. // Physical Review Letters. 2010. Vol. 105. Iss. 26. P. 269904.
13. Observation of Feshbach Resonances between Two Different Atomic Species / Stan C. A., Zwiерlein M. W., Schunck C. H., Raupach S. M. F., Ketterle W. // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. Iss. 14. P. 143001.
14. Soderberg K.-A. B., Gemelke N., Chin C. Ultracold molecules: vehicles to scalable quantum information processing // New Journal of Physics. 2009. Vol. 11. No. 5. P. 055022.
15. Spectroscopy of $^{39}\text{K}^{85}\text{Rb}$ triplet excited states using ultracold a $^3\Sigma^+$ state molecules formed by photoassociation / Kim J. T., Wang D., Eyler E. E., Gould P. L., Stwalley W. C. // New Journal of Physics. 2009. Vol. 11. No. 5. P. 055020.

16. Quantum Degenerate Two-Species Fermi–Fermi Mixture Coexisting with a Bose–Einstein Condensate / Taglieber M., Voight A.-C., Aoki T., Händsch T. W., Dieckmann K. // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. Iss. 1. P. 010401.
17. Observation of Feshbach-like resonances in collisions between ultracold molecules / Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Nöcker H.-C., Grimm R. // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 94. Iss. 12. P. 123201.
18. Chiquillo E. Equation of state of the one- and three-dimensional Bose–Bose gases // *Physical Review A*. 2018. Vol. 97. Iss. 7. P. 063605.
19. Laser-assisted self-induced Feshbach resonance for controlling heteronuclear quantum gas mixtures / Devolder A., Luc-Koenig E., Atabek O., Desouter-Lecomte M., Dulieu O. // *Physical Review A*. 2019. Vol. 100. Iss. 5. P. 052703.
20. Bose–Einstein Condensation of Erbium / Aikawa K., Frisch A., Mark M., Baier S., Rietzler A., Grimm R., Ferlaino F. // *Physical Review Letters*. 2012. Vol. 108. Iss. 21. P. 210401.
21. Magnetically Controlled Exchange Process in an Ultracold Atom–Dimer Mixture / Knoop S., Ferlaino F., Berninger M., Mark M., Nöcker H., Grimm R., D’Incao J. P., Esry B. D. // *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 104. Iss. 5. P. 053201.
22. Producing superfluid circulation states using phase imprinting / Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., Goll de Herve M., Longchambon L., Perrin H. // *Physical Review A*. 2018. Vol. 97. Iss. 4. P. 043615.
23. Tomza M. Energetics and Control of Ultracold Isotope-Exchange Reactions between Heteronuclear Dimers in External Fields // *Physical Review Letters*. 2015. Vol. 115. Iss. 6. P. 063201.
24. Quantum Dynamics with Spatiotemporal Control of Interactions in a Stable Bose–Einstein Condensate / Logan W., Li-Chung Ha, Chen-Yu Xu, Chin C. // *Physical Review Letters*. 2015. Vol. 115. Iss. 15. P. 155301.
25. Chin C., Grimm R. Thermal equilibrium and efficient evaporation of an ultracold atom–molecule mixture // *Physical Review A*. 2004. Vol. 69. Iss. 3. P. 033612.
26. Зинган А. П., Васильева О. Ф., Хаджи П. И. Динамика бозе-конденсированных ультрахолодных атомов и тримерных молекул с образованием атомно-молекулярных пар // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2019. Т. 156. № 5 (11). С. 843–852.
27. Lu L.-H., Li Y.-Q. Atom-to-molecule conversion efficiency and adiabatic fidelity // *Physical Review A*. 2008. Vol. 77. Iss. 5. P. 053611.
28. Tsukada N. Complete population transfer between two Bose–Einstein condensates induced by nonlinear laser coupling // *Physical Review A*. 2000. Vol. 61. Iss. 6. P. 063602.
29. Keeling J. Polarized polariton condensates and coupled XY models // *Physical Review B*. 2008. Vol. 78. Iss. 20. P. 205316.
30. Reply to “Comment on ‘Stimulated Raman adiabatic passage from an atomic to a molecular Bose–Einstein condensate’ ” / Drummond P. D., Kheruntsyan K. V., Heinzen D. J., Wynar R. A. // *Physical Review A*. 2005. Vol. 71. Iss. 1. P. 017602.
31. Jing H., Deng Y., Zhang W. Quantum control of light through an atom-molecule dark state // *Physical Review A*. 2009. Vol. 80. Iss. 2. P. 025601.
32. Хаджи П. И., Ткаченко Д. В. Динамика стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2006. Т. 83. Вып. 3. С. 120–124.

REFERENCES

1. Khadzhi P. I., Zingan A. P. [Dynamic features of stimulated Raman atomic-molecular conversion in a mixture of two Bose gases with the formation of Bose condensates of heteronuclear molecules]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2011, vol. 139, no. 4, pp. 645–665.
2. Tanzi L., Cabrera C. R., Sanz J., Cheiney P., Tomza M., Tarruell L. Feshbach resonances in potassium Bose–Bose mixtures. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 98, iss. 6, pp. 062712.
3. Trouselet F., Rueda-Fonseca P., Ralko A. Competing supersolids of Bose–Bose mixtures in a triangular lattice. In: *Physical Review B*, 2014, vol. 89, iss. 8, pp. 085104.
4. Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Ngerl H.-C., Grimm R. Observation of Feshbach-Like Resonances in Collisions between Ultracold Molecules. In: *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 12, pp. 123201.
5. Regal C. A., Ticknor G., Bohn J. L., Jin D. S. Creation of ultracold molecules from a Fermi gas of atoms. In: *Nature*, 2003, no. 424, pp. 47–50.
6. Strecker K. E., Partridge G. B., Hulet R. G. Conversion of an Atomic Fermi Gas to a Long-Lived Molecular Bose Gas. In: *Physical Review Letters*, 2003, vol. 91, iss. 8, pp. 080406.
7. Herbig J., Kraemer T., Mark M., Weber T., Chin C., Ngerl H.-C., Grimm R. Preparation of a Pure Molecular Quantum Gas. In: *Science*, 2003, vol. 301, iss. 5639, pp. 1510–1513.
8. Xu K., Mukaiyama T., Abo-Shaer J. R., Chin J. K., Miller D. E. Formation of Quantum-Degenerate Sodium Molecules. In: *Physical Review Letters*, 2003, vol. 91, iss. 21, pp. 210401.
9. Winkler K., Lang F., Thalhammer G., Straten P., Grimm R., Denschlag J. H. Coherent Optical Transfer of Feshbach Molecules to a Lower Vibrational State. In: *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, iss. 4, pp. 043201.
10. Kitagawa M., Enomoto K., Kasa K., Takahashi Y., Ciurylo R., Naidon P., Julienne P. S. Two-color photoassociation spectroscopy of ytterbium atoms and the precise determinations of s-wave scattering lengths. In: *Physical Review A*, 2008, vol. 77, iss. 1, pp. 012719.
11. Tokunaga S. K., Dyne J. M., Hinds E. A., Tarbutt M. R. Stark deceleration of lithium hydride molecules. In: *New Journal of Physics*, 2009, vol. 11, no. 5, pp. 055038.
12. Voigt A.-C., Taglieber M., Costa L., Aoki T., Wieser W., Hnisch T. W., Dieckmann K. Erratum: Ultracold Heteronuclear Fermi–Fermi Molecules. In: *Physical Review Letters*, 2010, vol. 105, iss. 26, pp. 269904.
13. Stan C. A., Zwierlein M. W., Schunck C. H., Raupach S. M. F., Ketterle W. Observation of Feshbach Resonances between Two Different Atomic Species. In: *Physical Review Letters*, 2004, vol. 93, iss. 14, pp. 143001.
14. Soderberg K.-A. B., Gemelke N., Chin C. Ultracold molecules: vehicles to scalable quantum information processing. In: *New Journal of Physics*, 2009, vol. 11, no. 5, pp. 055022.
15. Kim J. T., Wang D., Eyler E. E., Gould P. L., Stwalley W. C. Spectroscopy of $^{39}\text{K}^{85}\text{Rb}$ triplet excited states using ultracold a $^3\Sigma^+$ state molecules formed by photoassociation. In: *New Journal of Physics*, 2009, vol. 11, no. 5, pp. 055020.
16. Taglieber M., Voigt A.-C., Aoki T., Hnisch T. W., Dieckmann K. Quantum Degenerate Two-Species Fermi–Fermi Mixture Coexisting with a Bose–Einstein Condensate. In: *Physical Review Letters*, 2008, vol. 100, iss. 1, pp. 010401.
17. Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Ngerl H.-C., Grimm R. Observation of Feshbach-like resonances in collisions between ultracold molecules. In: *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 12, pp. 123201.
18. Chiquillo E. Equation of state of the one- and three-dimensional Bose–Bose gases. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 97, iss. 7, pp. 063605.
19. Devolder A., Luc-Koenig E., Atabek O., Desouter-Lecomte M., Dulieu O. Laser-assisted

- self-induced Feshbach resonance for controlling heteronuclear quantum gas mixtures. In: *Physical Review A*, 2019, vol. 100, iss. 5, pp. 052703.
20. Aikawa K., Frisch A., Mark M., Baier S., Rietzler A., Grimm R., Ferlaino F. Bose–Einstein Condensation of Erbium. In: *Physical Review Letters*, 2012, vol. 108, iss. 21, pp. 210401.
21. Knoop S., Ferlaino F., Berninger M., Mark M., Ndgerl H., Grimm R., D’Incao J. P., Esry B. D. Magnetically Controlled Exchange Process in an Ultracold Atom–Dimer Mixture. In: *Physical Review Letters*, 2010, vol. 104, iss. 5, pp. 053201.
22. Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., Gолr de Herve M., Longchambon L., Perrin H. Producing superfluid circulation states using phase imprinting. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 97, iss. 4, pp. 043615.
23. Tomza M. Energetics and Control of Ultracold Isotope-Exchange Reactions between Heteronuclear Dimers in External Fields. In: *Physical Review Letters*, 2015, vol. 115, iss. 6, pp. 063201.
24. Logan W., Li-Chung Ha, Chen-Yu Xu, Chin C. Quantum Dynamics with Spatiotemporal Control of Interactions in a Stable Bose–Einstein Condensate. In: *Physical Review Letters*, 2015, vol. 115, iss. 15, pp. 155301.
25. Chin C., Grimm R. Thermal equilibrium and efficient evaporation of an ultracold atom–molecule mixture. In: *Physical Review A*, 2004, vol. 69, iss. 3, pp. 033612.
26. Zingan A. P., Vasil’eva O. F., Khadzhi P. I. [Dynamics of Bose-Condensed Ultracold Atoms and Trimer Molecules with the Formation of Atomic–Molecular Pairs]. In: *Zhurnal eksperimental’noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2019, vol. 156, no. 5 (11), pp. 843–852.
27. Lu L.-H., Li Y.-Q. Atom-to-molecule conversion efficiency and adiabatic fidelity. In: *Physical Review A*, 2008, vol. 77, iss. 5, pp. 053611.
28. Tsukada N. Complete population transfer between two Bose–Einstein condensates induced by nonlinear laser coupling. In: *Physical Review A*, 2000, vol. 61, iss. 6, pp. 063602.
29. Keeling J. Polarized polariton condensates and coupled XY models. In: *Physical Review B*, 2008, vol. 78, iss. 20, pp. 205316.
30. Drummond P. D., Kheruntsyan K. V., Heinzen D. J., Wynar R. A. Reply to “Comment on ‘Stimulated Raman adiabatic passage from an atomic to a molecular Bose-Einstein condensate’”. In: *Physical Review A*, 2005, vol. 71, iss. 1, pp. 017602.
31. Jing H., Deng Y., Zhang W. Quantum control of light through an atom-molecule dark state. In: *Physical Review A*, 2009, vol. 80, iss. 2, pp. 025601.
32. Khadzhi P. I., Tkachenko D. V. [Dynamics of stimulated Raman atom–molecule conversion in a Bose–Einstein condensate]. In: *Pis’ma v Zhurnal eksperimental’noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2006, vol. 83, no. 3, pp. 120–124.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anna P. Zingan – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

Olga F. Vasilieva – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Зинган А. П., Васильева О. Ф. Особенности динамики стимулированной атомно-молекулярной конверсии с участием двух импульсов резонансного лазерного излучения и импульса микроволнового излучения в системе атомов одного сорта. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 57–76.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-57-76

FOR CITATION

Zingan A. P., Vasilieva O. F. Features of dynamics of stimulated atomic–molecular conversion involving two pulses of resonant laser radiation and a pulse of microwave radiation in a system of atoms of one species. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 57–76.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-57-76