УДК 519.633

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-77-89

ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СТРУЮ, ИСХОДЯЩУЮ ИЗ СТАЦИОНАРНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Бишаев А. М.¹, Абгарян М. В.²

¹ *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*

141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 5, Российская Федерация

² *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация

Анотация. Целью статьи является изучение влияния магнитного поля на выходящую из стационарного плазменного двигателя (СПД) струю.

Процедура и методы исследования. Рассматривая бесстолкновительное движение ионов, можно выписать выражение для функции распределения ионов, выходящих из кольцевого отверстия. Далее строится схема вычисления плотности ионов как соответствующего интеграла от функции распределения.

Результаты проведенного исследования. Получены картины распределения плотности ионов в трёхмерном пространстве, которые показали возможность управления вектором тяги с помощью магнитного поля.

Теоретическая|практическая значимость заключается в дальнейшем развитии направления, которое использует методы кинетической теории в плазме. Выводы этой работы имеют практическое значение для специалистов, занимающихся созданием новых типов электрореактивных двигателей (ЭРД).

Ключевые слова: функция распределения ионов, кинетическое уравнение бесстолкновительного движения ионов, магнитное поле, стационарные плазменные двигатели, плотность ионов, численная схема, граничные условия, характеристики кинетического уравнения

STUDY OF THE EFFECT OF THE MAGNETIC FIELD ON A JET OF A STATIONARY PLASMA THRUSTER

A. Bishaev¹, M. Abgaryan²

¹ *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*

² *Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe sh. 4, 125993 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Purpose. The aim of the paper is to study the effect of the magnetic field on a jet of a stationary plasma thruster.

Methodology and Approach. Considering the collisionless movement of ions, it is possible to derive an expression for the distribution function of ions coming out of a ring hole. Then, a scheme is constructed to calculate the density of ions as a corresponding integral of the distribution function.

Results. We have obtained the patterns of the ion density distribution in a three-dimensional space, which show the possibility of controlling the thrust vector by the magnetic field.

Theoretical and Practical Implications. The obtained results indicate a further development of the direction in which the methods of kinetic theory in plasma are used. The results of this work are of practical importance for specialists involved in the design and development of new types of electric propulsion engines.

Keywords: ion distribution function, kinetic equation of collisionless ion motion, magnetic field, stationary plasma thrusters, ion density, numerical scheme, boundary conditions, characteristics of the kinetic equation.

Введение

В настоящее время электрореактивные двигатели повсеместно используются в космической технике. Наиболее широко используемым из них является семейство стационарных плазменных двигателей (СПД). Этот тип двигателей используется практически на всех современных космических аппаратах. В отличие от жидкостных реактивных двигателей СПД имеют существенно больший удельный импульс. В настоящее время идёт постоянное совершенствование СПД с целью увеличения тяги двигателя при сохранении больших значений удельного импульса. На этом пути возникает задача эффективного управления вектором тяги. Так как тягу СПД создаёт струя плазмы, выбрасываемой в окружающее пространство, то естественно попытаться управлять вектором тяги с помощью магнитного поля. Первые исследования в этом направлении были сделаны в работе [1]. В этом исследовании была показана возможность управления тягой магнитным полем. Более детально этот вопрос исследовался в работе [2]. В этой работе был сделан вывод, что вектор тяги направлен по направлению силы Лоренца. На основании проводимых исследований авторами работы [2] был оформлен и защищён патент¹, где предлагается использовать магнитное поле для поворота вектора тяги. Вывод, который был сделан в работе [2], основан на рассмотрении движения заряженной частицы в магнитном поле.

Исзуемая модель

На рис. 1. схематично представлен СПД. Струя, состоящая из ионов, выходит в окружающее пространство из кольцевого отверстия в двигателе. Сам двигатель представляется параллелепипедом $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В центре квадратной грани $ABCD$, как это показано на рис. 1, помещена система координат XYZ .

¹ Бишаев Ан. и др. Устройство управления вектором тяги плазменного двигателя (варианты) и способ управления вектором тяги плазменного двигателя. Патент на изобретение № 2644810, Московский технологический институт, Госреестр изобретений РФ, 14 февраля 2017 г.

Показанный на рис. 1 тонкими линиями параллелепипед $LKMNL_1K_1M_1N_1$ ограничивает счётную область.

Рисунок 1 / Figure 1

Геометрия течения плазмы из СПД.

Geometry of a plasma jet from a stationary plasma thruster.

Источник: по данным авторов из статьи [3].

По оси X направлено постоянное магнитное поле величины $H = 100$ Гаусс. Это магнитное поле, воздействуя на ионы, будет поворачивать струю, а это может привести к повороту вектора тяги. Задача состоит в определении этого воздействия магнитного поля на струю.

Электроны, выходящие с показанного на рис. 1 катода, при таком магнитном поле ещё не будут захвачены магнитным полем и не окажут сильного воздействия на струю, выходящую из двигателя. Поэтому будем предполагать, что имеет место бесстолкновительное истечение ионов в окружающее пространство. Результаты работы [3] показали, что возникающее электрическое поле слабо влияет на выходящие из кольцевого отверстия высокоэнергетические ионы, поэтому действием электрического поля на ионы пренебрежём. Данные предположения являются естественными, ибо целью работы является определение воздействия непосредственно магнитного поля на струю ионов. В этом случае $f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$ – функция распределения ионов будет определяться из следующего уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{e}{mc} \epsilon_{ikl} \xi_k H_l \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = 0,$$

где e – заряд иона, m – его масса, c – скорость света, ϵ_{ikl} – символ Леви-Чивита. В выше написанной формуле везде предполагается суммирование по повторяющимся индексам, причём все индексы меняются от единицы до трёх.

Переход к безразмерным величинам осуществлялся также как в [3]. Тогда

$$x_i = Lx'_i, \quad \xi_i = \xi_0 \xi'_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad t = \frac{L}{\xi_0} t', \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \quad f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{n_0}{\xi_0^3} f'(t', \vec{x}', \vec{\xi}'),$$

где U_0 – разрядное напряжение (разность потенциалов между гранями ABCD и $A_1B_1C_1D_1$), L – половина длины стороны AB, n_0 – характерное значение плотности ионов. Эта величина определяется в [3] как характерное значение плотности ионов, выходящих из кольцевого отверстия.

Опуская штрихи в безразмерных переменных, получим, что безразмерная функция распределения ионов $f(t, \bar{x}, \xi)$ определяется следующим уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \omega \epsilon_{ikl} \xi_k H_l \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = 0, \quad (1)$$

где $\omega = \frac{L}{r_L}$, где $r_L = \frac{mc\xi_0}{eH}$ – ларморовский радиус, c – скорость света.

Учитывая, что компонента магнитного поля есть $(H, 0, 0)$, запишем (1) в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \omega \xi_z \frac{\partial f}{\partial \xi_y} - \omega \xi_y \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Из сказанного выше следует, что для функции распределения ионов граничное условие можно задавать таким же, как в [3]. В безразмерном виде оно следующее:

$$f = \begin{cases} \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} \exp\{-B_1(\bar{\xi} - \bar{u})^2\}, & R_2 \leq r \leq R_1, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & (r < R_2) \cup (r > R_1), \end{cases} \quad (3)$$

где $\bar{n}(r), \bar{u}(r)$ – заданные функции (как они определяются, разобрано в [5]);

$B_1 = \frac{U_0}{kT_0^i} \gg 1$, T_0^i – температура ионов на выходе из двигателя. Она задавалась

в зависимости от типа двигателя, однако приведённое неравенство всегда имеет место. Величины R_1, R_2 есть безразмерные значения радиусов кольца, откуда вылетают ионы.

Характеристическая система уравнения (2) имеет вид:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \tilde{\xi}_x, \quad \frac{d\tilde{\xi}_x}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = \tilde{\xi}_y, \quad \frac{d\tilde{z}}{d\tau} = \tilde{\xi}_z, \quad \frac{d\tilde{\xi}_y}{d\tau} = \omega \tilde{\xi}_z, \quad \frac{d\tilde{\xi}_z}{d\tau} = -\omega \tilde{\xi}_y.$$

Решение этой системы, удовлетворяющее при $\tau = t$ начальным условиям

$$\tilde{x}(t) = x, \quad \tilde{y}(t) = y, \quad \tilde{z}(t) = z, \quad \tilde{\xi}_x(t) = \xi_x, \quad \tilde{\xi}_y(t) = \xi_y, \quad \tilde{\xi}_z(t) = \xi_z,$$

есть:

$$\tilde{\xi}_x = \xi_x, \quad \tilde{x}(\tau) = x - \xi_x(t - \tau),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_y &= \xi_y \cos \omega(t - \tau) - \xi_z \sin \omega(t - \tau), \quad \tilde{\xi}_z = \xi_z \cos \omega(t - \tau) + \xi_y \sin \omega(t - \tau), \\ \tilde{z}(\tau) &= z + (\tilde{\xi}_y(\tau) - \xi_y) / \omega, \quad \tilde{y}(\tau) = y + (\xi_z - \tilde{\xi}_z(\tau)) / \omega. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что $\xi_y^2 + \xi_z^2 = \tilde{\xi}_y^2(\tau) + \tilde{\xi}_z^2(\tau) = \text{const} = V^2$.

Из последнего соотношения видно, что удобно ввести в пространстве скоростей полярную систему координат:

$$\xi_x = \xi_x, \quad \xi_y = V \cos \alpha, \quad \xi_z = V \sin \alpha, \quad 0 \leq V < +\infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

В этой системе координат уравнения характеристик (2) переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_y &= V \cos(\alpha + \omega(t - \tau)), \quad \tilde{\xi}_z = V \sin(\alpha + \omega(t - \tau)), \\ \tilde{z}(\tau) &= z - 2 \frac{V}{\omega} \sin\left(\frac{\omega(t - \tau)}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\omega(t - \tau)}{2}\right) \\ \tilde{y}(\tau) &= y + 2 \frac{V}{\omega} \sin\left(\frac{\omega(t - \tau)}{2}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\omega(t - \tau)}{2}\right), \quad \tilde{\xi}_x = \xi_x, \quad \tilde{x}(\tau) = x - \xi_x(t - \tau). \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (2) есть дифференцирование функции $f(t, \bar{x}, \bar{\xi})$ в силу характеристической системы, и поэтому уравнение (2) может быть записано в виде: $\frac{df}{d\tau} = 0$. С учётом граничного условия (3) решение уравнения

(2) запишется в виде:

$$f(t, \bar{x}, \bar{\xi}) = \theta(\tilde{\xi}_z(\bar{t})) \theta((R_1 - \bar{r})(\bar{r} - R_2)) \frac{\bar{n}(\bar{r})}{\pi^{3/2}} \exp\left\{-B_1 \left(\tilde{\xi}(\bar{t}) - \bar{u}(\bar{r})\right)^2\right\} \quad (4)$$

где $\bar{t}$ определяется соотношением:

$$\tilde{z}(\bar{t}) = 0 = z - 2 \sin\left(\frac{\omega(t - \bar{t})}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\omega(t - \bar{t})}{2}\right) \frac{V}{\omega}. \quad (5)$$

Откуда:

$$V = \frac{\omega z}{2 \sin \omega\left(\frac{t - \bar{t}}{2}\right) \sin\left(\alpha + \omega\left(\frac{t - \bar{t}}{2}\right)\right)}. \quad (6)$$

Фигурирующая в формуле (4) величина θ есть функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Значение плотности ионов будет определяться следующей квадратурой:

$$n(t, \bar{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} \times \\ \times \iiint_D n(\bar{r}) \exp \left\{ -B_1 \left[\left(\xi_x - \bar{u}(\bar{r}) \right)^2 + \left(V \cos(\alpha + \omega(t - \bar{t})) - \bar{u}_y(\bar{r}) \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(V \sin(\alpha + \omega(t - \bar{t})) - \bar{u}_z(\bar{r}) \right)^2 \right] \right\} d\xi_x V dV d\alpha, \\ D = \{ \sin(\alpha + \omega(t - \bar{t})) \geq 0, \quad R_2 \leq \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leq R_1, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \}$$

Так как $B_1 \gg 1$, то, как показано в цитируемых выше работах, вновь возникает проблема вычисления тройного интеграла от дельтаобразной подынтегральной функции. Причем ситуация оказалась более сложная, чем имела в указанных выше работах вследствие того, что траектории (характеристики) движения ионов существенно не прямые линии. Как и в [3], эта проблема решается переходом от интегрирования по скоростному пространству к интегрированию по выходному отверстию СПД, но в данном случае это осуществляется принципиально другим способом.

Построение схемы вычислений

Положим $\tilde{x}(\bar{r}) = r \cos \varphi$, $\tilde{y}(\bar{r}) = r \sin \varphi$ и перейдём к переменным $(r, \varphi, \bar{t})$ по формулам:

$$\xi_x = \frac{(x - r \cos \alpha)}{t - \bar{t}}, \quad \operatorname{ctg}(\beta) = \frac{y - r \sin \alpha}{z}, \quad V = \frac{\omega d}{2 \sin \left(\omega \frac{(t - \bar{t})}{2} \right)}, \quad (7)$$

где $\beta(\alpha, \bar{t}) = \alpha + \omega \frac{(t - \bar{t})}{2}$, $d(r, \varphi) = \sqrt{(y - r \sin \varphi)^2 + z^2}$.

Якобиан преобразования замены (7) будет:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\cos \varphi}{t - \bar{t}} & \frac{r \sin \varphi}{t - \bar{t}} & \frac{x - r \cos \varphi}{(t - \bar{t})^2} \\ \frac{\omega z \sin \varphi \cos \beta}{2 \sin(\frac{\omega(t - \bar{t})}{2})} - \frac{\omega r z \cos \varphi \cos \beta}{2 \sin(\frac{\omega(t - \bar{t})}{2})} & \frac{\omega^2 \cos(\frac{\omega(t - \bar{t})}{2}) d}{4 \sin^2(\frac{\omega(t - \bar{t})}{2})} & \frac{\omega^2 r \sin(\alpha + \omega(t - \bar{t}))}{4(t - \bar{t}) \sin^2(\omega(t - \bar{t})/2) d} \\ \frac{z}{d^2} \sin \varphi & \frac{z}{d^2} r \sin \varphi & \frac{\omega}{2} \end{vmatrix} = \frac{\omega^2 r \sin(\alpha + \omega(t - \bar{t}))}{4(t - \bar{t}) \sin^2(\omega(t - \bar{t})/2) d}.$$

В выше приведённой формуле учитывается, что $\cos \beta = \frac{y - r \sin \varphi}{d}$, $\sin \beta = \frac{z}{d}$.

В новых переменных будем иметь:

$$n(t, \bar{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2} \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^t n(\bar{r}) \exp\{-B_1 g^2\} \cdot \frac{\omega^3 r \sin(\alpha + \omega(t - \bar{t}))}{8(t - \bar{t}) \sin^3(\omega(t - \bar{t})/2)} dr d\bar{t} d\varphi. \quad (8)$$

В (8) $\sin(\alpha + \omega(t - \bar{t})) \geq 0$. Это условие соответствует условию $\bar{\xi}_z \geq 0$,

$$g^2 = \left(\frac{x - r \cos \varphi}{t - \bar{t}}\right)^2 + \frac{\omega^2 d^2}{4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}(t - \bar{t})\right)} -$$

$$- 2 \left(\frac{x - r \cos \varphi}{t - \bar{t}}\right) \bar{u}_r \cos \varphi - \omega \frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}(t - \bar{t})\right)}{4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}(t - \bar{t})\right)} U_1 + U_2,$$

$$U_1 = \bar{u}_r \sin \varphi (y - r \sin \varphi) + \bar{u}_z z, \quad U_2 = \bar{u}_r^2 + \bar{u}_z^2 - \omega((y - r \sin \varphi) \bar{u}_z - z \bar{u}_r \sin \varphi).$$

В (8) делается замена $\omega(t - \bar{t})/2 = u$. Тогда:

$$n(t, \bar{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2} \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\omega t}{2}} n(\bar{r}) \exp\{-B_1 g^2\} \cdot \frac{\omega^3 (z \cos u + (y - r \sin u))}{8 du \sin^3 u} r du d\varphi.$$

Если $\frac{\omega t}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, то положим $v = \frac{1}{\sin u}$. Получим:

$$n(t, \bar{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2} \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \int_{V^+}^{+\infty} \exp\{-B_1 g_1^2\} \cdot \frac{\omega^3 v (z v_1 \cos u + \frac{(y - r \sin u)}{v})}{8 d v_1 \arcsin \frac{1}{v}} r dv du d\varphi, \quad (9)$$

где $F(r, \varphi) = r \bar{n}(r) \exp\{-B_1 U_2\}$, $v_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}}$,

$$g_1^2 = \omega^2 \left(\frac{x - r \cos \varphi}{\arcsin\left(\frac{1}{v}\right)}\right)^2 + \frac{\omega^2 d^2}{4} v^2 - \omega \left(\frac{x - r \cos \varphi}{\arcsin\left(\frac{1}{v}\right) t}\right) \bar{u}_r \cos \varphi - \omega \frac{v_1 v}{4} U_1,$$

$$V^+ = \max \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2} t}, \frac{d}{z} \right\}.$$

Все попытки вычислить несобственный интеграл в (9) численно потерпели неудачу, ибо ни одна численная схема не позволяла учесть носитель дельтообразной подынтегральной функции (см. [4]). Нетрудно видеть, что $0 \leq \frac{1}{v} \leq \sin \frac{\omega t}{2} < 1$,

так что $\arcsin \frac{1}{v} = v + O\left(\frac{1}{v^2}\right)$, $v_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}} = 1 + O\left(\frac{1}{v^2}\right)$. Поэтому была предложена

следующая схема вычислений.

Промежуток $\left[0, \frac{\omega t^*}{2}\right] \cup \left[\frac{\omega t^*}{2}, \frac{\omega t}{2}\right]$. Тогда $n(t, \vec{x}) = I_1 + I_2$, где и в I_1 интегрирование ведётся от V^+ до V^* . Это собственный интеграл. Он вычислялся с помощью достаточно мелкой сетки интегрирования. В несобственном интеграле I_2 предполагается, что $\arcsin \frac{1}{v} = 1$, $v_1 = 1$. Тогда $I_2 = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{j_0} F_{ij} \exp\left\{-B_1 \left(U_{2ij} - \frac{\bar{U}_{2ij}^2}{\bar{d}_{ij}^2}\right)\right\} G_{ij} \Delta r \Delta \varphi$,

где любая величина с индексами i, j означает, что она берётся при $r_{i+\frac{1}{2}} = R_2 + (i-1)\Delta r + \frac{\Delta r}{2}$, $\varphi_{j+\frac{1}{2}} = (j-1)\Delta \varphi + \frac{\Delta \varphi}{2}$.

Соответственно:

$$G_{ij} = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{V^+}^{\frac{3}{2} + \infty} \frac{\omega^3}{8} v^2 \left(z + \frac{(y - r \sin \varphi)_{ij}}{v}\right) \exp\left\{-B_1 \left(\frac{\omega \bar{d}_{ij}}{2} v - \frac{\bar{U}_{1ij}}{\bar{d}_{ij}}\right)^2\right\} dv,$$

$$\bar{d} = \sqrt{(x - r \cos \varphi)^2 + d^2}, \quad \bar{U}_1 = (x - r \cos \varphi) \bar{u}_r \cos \varphi + U_1.$$

Сделав замену $\sqrt{B_1} \left(\frac{\omega \bar{d}}{2} v - \frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right)_{ij} = q$, получим, что:

$$G_{ij} = \left(\frac{B}{2\pi \bar{d}^3}\right) z \left(\frac{1}{B_1} + \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right)^2 + (y - r \sin \varphi) \frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right) \times \\ \times \left(1 - \text{sign}(q^+) \text{Erf}\left(\sqrt{B_1} q^+\right)\right) + A \exp\left\{-B_1 q^{+2}\right\}_{ij},$$

$$\sqrt{B_1} \left(\frac{\omega \bar{d}}{2} v^+ - \frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right)_{ij} = q^+.$$

Величина, обозначенная как A , не важна: стоящая за ней экспонента её обнуляет.

С помощью описанного метода удалось установить, что при $\frac{\omega t^*}{2} = \frac{\pi}{4}$ вычисление интеграла с разбиением и без него даёт один и тот же результат.

Расчёты показали, что вклад от собственного интеграла мал. Это видно на рис. 2, где представлены картины линий уровня распределения плотности ионов плазмы в плоскости ZOY , $\omega t/2 = \pi/4$ (a), $\omega t/2 = \pi/2$ (b), $\omega t/2 = 3\pi/4$ (c).

Видно, что изменения во времени при $\omega t/2 > \pi/4$ не наблюдаются.

Рисунок 2 (a, b, c) / Figure 2 (a, b, c)
Линии уровня плотности ионов плазмы.
Lines of the plasma ion density level.

Источник: составлено авторами.

На рис. 3 представлена трёхмерная картина плотностей уровня ионов. Видно, что струя поворачивается, закручиваясь вдоль оси X . Значения на шкале соответствуют процентам от максимальной величины плотности, которая равнялась 4.

Рисунок 3 / Figure 3
Трёхмерная картина плотностей уровня ионов.
Three-dimensional pattern of ion level densities.

Источник: составлено авторами.

Обсуждение результатов

При $\omega t/2 > \pi/2$ метод вычисления остаётся таким же, выражение для $t - \bar{t}$ через арксинус будет содержать добавочные члены, которые изменят подынтегральную функцию, но метод останется таким же, потребовав добавления ещё нескольких собственных интегралов. Из анализа рис. 3 и формул для вычисления компонент тензора напряжений можно сделать вывод, что поворот вектора тяги при воздействии магнитного поля возможен.

Понятно, что в данной работе задача о влиянии магнитного поля на струю СПД решена в достаточно приближенной постановке. Чтобы решить эту задачу полностью, необходимо учесть влияние эффектов резонансной перезарядки и самосогласованного электрического поля. Для этого можно воспользоваться разработанным специально для численного решения кинетических уравнений методом расщепления по физическим процессам. Этот метод впервые был предложен в [5]. В [6] этот метод был модифицирован так, чтобы численная схема имела второй порядок точности при шаге по времени. В настоящее время различные вариации этого метода широко используются при численном решении кинетических уравнений. В [7] модификацией этого метода была решена система модельных кинетических уравнений. Из выше сказанного следует, что построенный в данной статье метод может быть использован для решения задачи определения влияния магнитного поля на струю СПД в полной постановке, если его использовать на этапе разлёта в построенном в [3] методе расщепления.

Из других работ, посвящённых данной проблеме, следует отметить [8]. В этой работе исследуется функционирование магнитного сопла. Для описания явления авторами используется уравнение Власова, то есть уравнение (1). Отличие этой работы состоит в совсем другой геометрии. Это позволяет им свести задачу к одномерной. Граничные условия в работе [8] таковы, что в них не возникает дельтаобразной функции распределения, поэтому удаётся построить численный метод, с помощью которого определяется функция распределения и вычисляются значения плотности ионов. Так как задача одномерна, то в статье приведены графики плотности. Ясно, что сравнить эти результаты с полученным в данной работе трёхмерным распределением плотности невозможно, а смысл этого сравнения непонятен ввиду существенных отличий в геометрии задачи. Надо отметить, что проведение сравнений результатов вычислений данной работы и результатов вычислений в работе [3] наталкивается на объективные трудности, так как получить решение поставленной выше задачи методом статистического моделирования пока не удаётся. Так, в [9] этим методом решается именно задача о струе, но с другой геометрией. Сам численный метод чётко не описан и не приведены результаты – значения плотности. Единственная известная авторам это работа [4], где методом статистического моделирования решалась именно задача о струе СПД в такой же постановке, как и в [3]. Результаты, которые получены при этом, совсем не соответствуют распределению плотности в струе. Причина этого заключалась в том, что методом статистического моделирования не удаётся адекватно смоделировать дельтаобразную функцию распределения, а моделируется только перезарядка.

Выводы

1. Полученные картины распределения плотности ионов в трёхмерном пространстве указывают на возможность управления вектором тяги с помощью магнитного поля.

2. Задача о влиянии магнитного поля на струю СПД решена в настоящей работе в достаточно приближенной постановке. Чтобы решить эту задачу полностью, необходимо учесть влияние эффектов резонансной перезарядки и самосогласованного электрического поля. Для этого можно воспользоваться разработанным специально для численного решения кинетических уравнений методом расщепления по физическим процессам [5; 6].

3. Собственно, основной результат данной статьи есть построение численной схемы вычисления плотности бесстолкновительного движения ионов как соответствующего интеграла от функции распределения ионов, выходящих из кольцевого отверстия.

Статья поступила в редакцию 20.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Three-dimensional simulation of atom and ion dynamics in a stationary plasma thruster / Lazourenko A., Kim V., Bishaev A., Auweter-Kurtz M. // Journal of Applied Physics. 2005. Vol. 98. Iss. 4. 043303. P. 521–532.
2. Экспериментальное исследование отклонения вектора тяги плазменного ускорителя / Бугрова А. И., Бугров Г. Э., Бишаев А. М., Десятков А. В., Козинцева М. В., Липатов А. С., Харчевников В. К., Смирнов П. Г. // Письма в Журнал технической физики. 2014. Т. 40. Вып. 4. С. 42–48.
3. Абгарян М. В., Бишаев А. М. Модернизация метода расщепления для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи разреженной плазмы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 7. С. 1132–1146.
4. Бондарь Е. А., Швейгерт В. А., Иванов М. С. Численное моделирование струи стационарного плазменного двигателя // Кинетическая теория и динамика разреженных газов: Материалы Всероссийского семинара (Новосибирск, 2–7 декабря 2002 г.). Новосибирск: НГАСУ, 2002. С. 123–126.
5. Cheremisin F. G., Solving the Boltzmann equation in the case of passing to the hydrodynamic flow regime // Doklady Physics. 2000. Vol. 45. Iss. 8. P. 401–404.
6. Larina I. N., Rykov V. A. Numerical solution of the Boltzmann equation by a symmetric splitting method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2003. Vol. 43. Iss. 4. P. 575–586.
7. Comparison of the Shakhov kinetic equation and DSMC method as applied to space vehicle aerothermodynamics / Titarev V. A., Frolova A. A., Rykov V. A., Vashchenkov P. V., Bondar Ye. A. // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 364. P. 112354.
8. Jambunathan R., Levin D. A. Kinetic Modeling of Plasma Plume using Multi-GPU Forest of Octree Approach // Proceedings of 35th International Electric Propulsion Conference. 2017. P. 1–17.
9. One-dimensional Direct Vlasov Simulations of Non-stationary Plasma Expansion in

Magnetic Nozzle / Sanchez-Arriaga G., Zhouy J., Ahedo-Sanchez E., Ramos J. J. // 35th International Electric Propulsion Conference. 2017. P. 106.

REFERENCES

1. Lazourenko A., Kim V., Bishaev A., Auweter-Kurtz M. Three-dimensional simulation of atom and ion dynamics in a stationary plasma thruster. In: *Journal of Applied Physics*, 2005, vol. 98, iss. 4. 043303, pp. 521–532.
2. Bugrova A. I., Bugrov G. E., Bishaev A. M., Desyatskov A. V., Kozintseva M. V., Lipatov A. S., Kharchevnikov V. K., Smirnov P. G. [An experimental study of the deviation of the thrust vector of a plasma accelerator]. In: *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics Letters], 2014, vol. 40, no. 4, pp. 42–48.
3. Abgaryan M. V., Bishaev A. M. [Modification of the Splitting Method as Applied to a System of Kinetic Equations Describing the Behavior of a Rarefied Plasma Jet]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2018, vol. 58, no. 7, pp. 1132–1146.
4. Bondar' E. A., Shveigert V. A., Ivanov M. S. [Numerical simulation of the jet of the stationary plasma thruster]. In: *Kineticheskaya teoriya i dinamika razrezhennykh gazov: Materialy Vserossiiskogo seminara (Novosibirsk, 2–7 dekabrya 2002 g.)* [Kinetic theory and rarefied gas dynamics: Proceedings of the seminar (Novosibirsk, 2–7 December 2002)]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering Publ., 2002. pp. 123–126.
5. Cheremisin F. G., Solving the Boltzmann equation in the case of passing to the hydrodynamic flow regime. In: *Doklady Physics*, 2000, vol. 45, iss. 8, pp. 401–404.
6. Larina I. N., Rykov V. A. Numerical solution of the Boltzmann equation by a symmetric splitting method. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, iss. 4, pp. 575–586.
7. Titarev V. A., Frolova A. A., Rykov V. A., Vashchenkov P. V., Bondar Ye. A. Comparison of the Shakhov kinetic equation and DSMC method as applied to space vehicle aerothermodynamics. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, vol. 364, pp. 112354.
8. Jambunathan R., Levin D. A. Kinetic Modeling of Plasma Plume using Multi-GPU Forest of Octree Approach. In: *Proceedings of 35th International Electric Propulsion Conference*, 2017, P. 1–17.
9. Sanchez-Arriaga G., Zhouy J., Ahedo-Sanchez E., Ramos J. J. One-dimensional Direct Vlasov Simulations of Non-stationary Plasma Expansion in Magnetic Nozzle. In: *35th International Electric Propulsion Conference*, 2017, pp. 106.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бишаев Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: bishaev@bk.ru

Абгарян Микаэл Вартанович – кандидат физико-математических наук, инженер НИО-806 Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: abgmvk@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander M. Bishaev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University);
e-mail: bishaev@bk.ru

Michael V. Abgaryan – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Engineer NIO-806, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: abgmvk@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бишаев А. М., Абгарян М. В. Изучение влияния магнитного поля на струю, исходящую из стационарного плазменного двигателя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 77–89.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-77-89

FOR CITATION

Bishaev A. M., Abgaryan M. V. Study of the effect of the magnetic field on a jet of a stationary plasma thruster In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 77–89.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-77-89