

УДК 530.182

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-36-47

К ВОПРОСУ НЕРАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ ПО ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ ЗАРЯЖЕННОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ШАРА С УЧЁТОМ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Гладков С. О.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация*

Аннотация.

Цель – описать нелинейную динамику движущегося по круговой орбите заряженного металлического шара и проанализировать решение найденного нелинейного дифференциального уравнения, учитывающего, как тормозное электромагнитное излучение, так и традиционные силы сопротивления, обязанные учёту вязкости континуума (вязкое трение) и сухого трения в креплении шарнирного соединения.

Процедура и методы исследования. Метод исследования основан на составлении уравнения движения с помощью принципа сохранения полной мощности исследуемой системы.

Результаты исследования. Получено динамическое уравнение движения и найдено его аналитическое решение в параметрическом виде.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что предложено математическое описание динамики движения по круговой орбите заряженного металлического шара и найдено решение полученного уравнения. Проведённый анализ может быть практически использован при изучении движения планет Солнечной системы.

Ключевые слова: неравномерное движение, тормозное излучение, закон сохранения полной мощности

UNEVEN ROTATION OVER A PLANE CIRCULAR ORBIT AROUND THE VERTICAL AXIS OF A CHARGED METAL BALL WITH ACCOUNT FOR DISSIPATIVE FORCES

S. Gladkov

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russian Federation*

Abstract.

Purpose. The nonlinear dynamics of a charged metal ball rotating over the horizontal plane is described and the solution of the nonlinear differential equation is analyzed, which takes into account both bremsstrahlung electromagnetic radiation and traditional resistance forces resulting from the viscosity of the continuum (viscous friction) and dry friction in the hinge joint.

Methodology and Approach. The research method is based on the compilation of a motion equation using the principle of preserving the hollow power of the system under study.

Results. A dynamic motion equation is obtained and its analytical solution is found in a parametric form.

Theoretical and Practical implications. The mathematical description of the dynamics of the movement of a charged metal ball over a circular orbit is proposed and a solution to the resulting equation/analysis can be practically used in the study of the motion of the planets of the Solar System.

Keywords: uneven motion, centrifugal force, bremsstrahlung radiation

Введение

Настоящая работа является логическим продолжением предыдущих авторских работ [1; 2], в которых было приведено подробное вычисление интенсивности и мощности тормозного излучения, исходящего от неравномерно движущегося по криволинейной траектории нейтрального металлического шара.

В этом исследовании мы остановимся на подробном анализе решения одной чисто теоретической задачи, также касающейся динамики движения, но уже заряженного металлического шара в условиях его неравномерного вращения в горизонтальной плоскости с учётом сопротивления в точке шарнирного крепления стержня с осью, а также при учёте силы вязкого сопротивления со стороны континуума. Как будет показано ниже, эта задача имеет чисто аналитическое решение, которое может быть найдено в параметрическом виде.

Уравнение движения можно получить на основе метода, который заключается в применении закона сохранения суммарной мощности и справедлив для любых механических или квантовых систем [3; 4]. Аналитически оно может быть представлено в виде:

$$\Sigma \dot{E} + \Sigma \dot{Q} + \Sigma W = 0, \quad (1)$$

где E – полная энергия системы, \dot{Q} – диссипативная функция, W – мощность всех возможных излучений, а «точка» указывает на дифференцирование по времени.

Вывод уравнения движения

В рассматриваемой задаче энергия вращения определяется выражением:

$$E = \frac{m\dot{\varphi}^2 b^2}{2}, \quad (2)$$

где m – масса вращающегося тела, φ – полярный угол, отсчитываемый от неподвижной оси x , выбранной в плоскости вращения, b – радиус орбиты вращения.

Диссипативную функцию, учитывающую связь с внешним континуумом, как это было показано в работе [4], можно представить в виде:

$$\dot{Q}_1 = 6\pi\eta Rv^2 = 6\pi\eta Rb^2\dot{\varphi}^2, \quad (3)$$

где η – динамическая вязкость окружающего континуума, R – радиус шара.

Диссипативную функцию, связанную с учётом сил сухого трения в шарнирном соединении в отсутствии силы тяжести, можно записать согласно [3] следующим образом:

$$\dot{Q}_2 = 2M_0\mu r_2^2\dot{\phi}\ddot{\phi}, \quad (4)$$

где M_0 – полная масса конструкции (шарнир + стержень + шар), μ – коэффициент сухого трения в шарнире, r_2 – его внешний радиус.

Мощность тормозного излучения [5], возникающего в условиях неравномерного криволинейного движения [6], для рассматриваемого случая заряженного металлического шара может быть представлена как:

$$W = \frac{q^2 b^2 (\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4)}{c^3}, \quad (5)$$

где q – заряд шара, c – скорость света в вакууме.

Вывод аналогичной формулы для нейтрального металлического шара приведён в работе [1], а решения задач, связанных с аналитическим описанием динамики похожих систем, можно найти, например, в монографиях [7–11] и в работе [12].

Дифференцируя энергию вращения (2) по времени, имеем:

$$\dot{E} = m\dot{\phi}\ddot{\phi}b^2. \quad (6)$$

Складывая теперь согласно (1) формулы (3) – (6), получаем:

$$\dot{\phi}b^2 \left[\ddot{\phi} + \frac{\dot{\phi}}{\tau_1} + \tau_2 \frac{(\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4)}{\dot{\phi}} \right] = 0,$$

где входящие сюда времена определяются согласно формулам:

$$\tau_1 = \frac{m}{6\pi\eta\xi R}, \quad \tau_2 = \frac{q^2}{m\xi c^3}, \quad (7)$$

а безразмерный параметр $\xi = 1 + \frac{2M_0}{m} \frac{r_2^2}{b^2}$ учитывает наличие шарнира.

Таким образом, общее уравнение движения с учётом излучения и силы вязкого сопротивления принимает вид:

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{\phi}}{\tau_1} + \tau_2 \frac{(\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4)}{\dot{\phi}} = 0. \quad (8)$$

Вводя безразмерный аргумент $x = \frac{t}{\tau_2}$, можно получить уравнение с одним

релаксационным параметром $\lambda = \frac{\tau_2}{\tau_1}$:

$$\varphi'' + \lambda\varphi' + \varphi'^3 + \frac{\varphi''^2}{\varphi'} = 0, \quad (9)$$

где штрихи означают дифференцирование по безразмерному аргументу x .

Решение уравнения

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Вязкое сопротивление отсутствует, то есть $\lambda = 0$.

Тогда уравнение (9) даёт:

$$\varphi'' + \varphi'^3 + \frac{\varphi''^2}{\varphi'} = 0. \quad (10)$$

Понижая порядок этого уравнения заменой $\varphi' = y$, $\varphi'' = y \frac{dy}{d\varphi}$, приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \frac{dy}{d\varphi} + y^2 = 0. \quad (11)$$

Введя параметр $p = -\frac{dy}{d\varphi}$, из (11) получаем:

$$y = \pm\sqrt{p - p^2}. \quad (12)$$

Поэтому $\varphi = -\int \frac{dy}{p}$, и после интегрирования с помощью подстановки

$p = \frac{1 + \sin \psi}{2}$, приходим к такому решению:

$$\varphi = \mp \frac{1}{2} \int \frac{(1-2p)dp}{p\sqrt{p-p^2}} = C_1 \pm \left(\psi + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right), \quad (13)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Следовательно, параметрическое решение уравнения (11) имеет вид:

$$\begin{cases} y = \frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{1}{2} \cos \psi, \\ \varphi = C_1 \pm \left(\psi + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}} \right). \end{cases} \quad (14)$$

Искомое решение уравнения (10) с учётом (14) будет тогда:

$$\begin{cases} x = C_2 \pm 2 \int \frac{d\varphi}{\cos \psi}, \\ \varphi = C_1 \pm \left(\psi + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}} \right). \end{cases} \quad (15)$$

где C_2 – константа интегрирования.

Вычисление интеграла в (15) приводит к окончательному решению поставленной задачи в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = C_2 \pm \frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \right) - \frac{1}{1 + \sin \psi} \right], \\ \varphi = C_1 \pm \left(\psi + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}} \right). \end{cases} \quad (16)$$

Случай 2. Представляет собой наиболее общий случай, поскольку учитывает силу вязкого сопротивления континуума ($\lambda \neq 0$). В предельном переходе, когда $\lambda \rightarrow 0$, он позволяет проверить корректность полученного в процессе приведённых далее вычислений общего результата, переходящего в решение (16).

Применив ту же подстановку $\varphi' = y$, $\varphi'' = y \frac{dy}{d\varphi}$ к уравнению (9), имеем:

$$\left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2 + \frac{dy}{d\varphi} + \lambda + y^2 = 0. \quad (17)$$

Полагая, как и ранее $p = -\frac{dy}{d\varphi}$, можно получить из (17):

$$y = \pm \sqrt{p - p^2 - \lambda}. \quad (18)$$

Следовательно,

$$\varphi = - \int \frac{dy}{p} = \mp \int \frac{(1 - 2p) dp}{2p \sqrt{p - p^2 - \lambda}}.$$

Вводя новую переменную:

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \sin t, \quad (19)$$

а затем, полагая $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, после интегрирования находим:

$$\varphi = C_1 + t + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a + \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right), \quad (20)$$

где $a = \sqrt{1-4\lambda}$, а C_1 – константа интегрирования.

Таким образом, согласно (18) – (20) параметрическое решение можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \varphi = C_1 + \frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a + \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right), \\ y = \pm \frac{a}{2} \cos t. \end{cases} \quad (21)$$

Но поскольку $y = \varphi'$, то для исходного аргумента:

$$x = C_2 + \int \frac{d\varphi}{y},$$

где C_2 – константа интегрирования.

И с учётом (21), получаем:

$$x = C_2 + \int \frac{d\varphi}{y} = C_2 \mp \int \left[1 - \frac{1}{1 + a \sin t + (1-a^2) \sin^2 t} \right] \frac{dt}{\cos t}. \quad (22)$$

Удобно преобразовать (22) к виду:

$$x = C_2 \mp \int \left[1 - \frac{1}{1 + a \sin t + (1-a^2) \sin^2 t} \right] \frac{dt}{\cos t} = \pm \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) - J \right], \quad (23)$$

где введено сокращённое обозначение интеграла:

$$J = J(a, t) = \int \frac{dt}{[1 + a \sin t + (1-a^2) \sin^2 t] \cos t} = \int F(s) ds, \quad (24)$$

а подынтегральная функция

$$F(s) = \frac{1}{(1-s^2)(1+as+bs^2)}, \quad b = 1-a^2.$$

Новый аргумент в (24) введён согласно преобразованию $s = \sin t$.

Для вычисления интеграла (24) представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, а именно:

$$F(s) = \frac{A}{(1-s)} + \frac{A}{(1+s)} + \frac{2Ab}{1+as+bs^2} + \frac{2Aa}{(1+s)(1+as+bs^2)}, \quad (25)$$

где A – общий множитель:

$$A = \frac{1}{2(1+a+b)}.$$

В результате подстановки разложения (25) в интеграл (24), получаем следующее выражение:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \quad (26)$$

где

$$J_1 = -A \ln(1-s), \quad (27)$$

$$J_2 = A \ln(1+s), \quad (28)$$

$$J_3 = \frac{2A}{s_1 - s_2} \ln \left| \frac{s - s_1}{s - s_2} \right|, \quad (29)$$

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2b} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2b}. \quad (30)$$

Что касается последнего интеграла в (26), то на его вычислении стоит остановиться несколько подробнее.

Действительно, перепишем его как

$$J_4 = 2Aa \int \frac{ds}{(1+s)(1+as+bs^2)} = 2Aa \int \frac{ds}{s^3 \left(\frac{1}{s} + 1 \right) \left(\frac{1}{s^2} + \frac{a}{s} + b \right)}.$$

Делая здесь подстановку $s = \frac{1}{u}$, находим:

$$J_4 = -2Aa \int \frac{tdt}{(u+1)(u^2+au+b)} = J_5 - J_6, \quad (31)$$

где

$$J_5 = 2Aa \int \frac{du}{(u+1)(u^2+au+b)},$$

$$J_6 = 2Aa \int \frac{du}{(u^2+au+b)}. \quad (32)$$

Вычисление интеграла J_6 с учётом обратного преобразования $u = \frac{1}{s}$ даёт:

$$J_6 = 2Aa \int \frac{du}{(u^2 + au + b)} = \frac{2Aa}{(u_1 - u_2)} \ln \left(\frac{u - u_1}{u - u_2} \right) = \frac{2Aa}{(u_1 - u_2)} \ln \left(\frac{1 - u_1 s}{1 - u_2 s} \right), \quad (33)$$

где

$$u_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \quad (34)$$

Первый интеграл в (31) также вычисляется достаточно просто благодаря представлению подынтегральной функции в виде:

$$\frac{1}{(u+1)(u^2 + au + b)} = \frac{1}{1+b-a} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{u+a-1}{u^2 + au + b} \right).$$

С учётом этого в результате простого интегрирования мы приходим к следующему ответу:

$$J_5 = \frac{2Aa}{(1-a+b)} \left[\ln(u+1) + \frac{(1-a-u_1)}{u_1-u_2} \ln \left(\frac{u-u_1}{u-u_2} \right) - \ln(u-u_2) \right].$$

Из полученного соотношения с учётом обратного преобразования $u = \frac{1}{s}$ следует, что:

$$J_5 = \frac{2Aa}{(1-a+b)} \left[\ln(s+1) + \frac{(1-a-u_1)}{u_1-u_2} \ln \left(\frac{1-u_1 s}{1-u_2 s} \right) - \ln(1-u_2 s) \right]. \quad (35)$$

Подставляя формулы (27) – (29), (31), (33) и (35) в (26) будем иметь:

$$J = A \left\{ \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right) - \frac{2a}{(u_1 - u_2)} \ln \left(\frac{1-u_1 s}{1-u_2 s} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{s_1 - s_2} \ln \left| \frac{s-s_1}{s-s_2} \right| + \frac{2a}{(1-a+b)} \left[\ln(s+1) + \frac{(1-a-u_1)}{u_1-u_2} \ln \left(\frac{1-u_1 s}{1-u_2 s} \right) - \ln(1-u_2 s) \right] \right\}. \quad (36)$$

Подставляя теперь (36) в (23) и учитывая явные решения (30) и (34), а также что $s = \sin t$, находим:

$$x = C_2 \pm \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) - \frac{1}{(1 + a + b)} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) - \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 4b}} \ln \left(\frac{1 - u_1 \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2b}{\sqrt{a^2 - 4b}} \ln \left| \frac{b \sin t - u_1}{b \sin t - u_2} \right| + \frac{2a}{(1 - a + b)} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right) + \frac{(1 - a - u_1)}{\sqrt{a^2 - 4b}} \ln \left(\frac{1 - u_1 \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right) \right] \right] \right\}. \quad (37)$$

Таким образом, окончательное параметрическое решение задачи согласно (20) и (37) можно представить как систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= C_1 + t + \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a + \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right), \\ x &= C_2 \pm \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) - \frac{1}{(1 + a + b)} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) - \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 4b}} \ln \left(\frac{1 - u_1 \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{2b}{\sqrt{a^2 - 4b}} \ln \left| \frac{b \sin t - u_1}{b \sin t - u_2} \right| + \frac{2a}{(1 - a + b)} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right) + \frac{(1 - a - u_1)}{\sqrt{a^2 - 4b}} \ln \left(\frac{1 - u_1 \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right) \right] \right] \right\}. \quad (38) \end{aligned} \right.$$

Как видно из (38), в предельном случае, о котором мы упоминали вначале, перед тем, как приступить к вычислениям, когда $\lambda \rightarrow 0$, то есть $a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 0$, $u_1 \rightarrow 0$, $u_2 \rightarrow -1$, находим:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= C_1 + t + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2}}, \\ x &= C_2 \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 + \sin t} \right) - \lim_{a \rightarrow 1} \frac{1}{(1 - a)(2 + a)} \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right) - \right. \\ &\left. - \lim_{a \rightarrow 1} \frac{(1 - a - u_1)}{(1 - a)(2 + a)} \ln \left(\frac{1}{1 + \sin t} \right) \right\} = \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 + \sin t} \right) + \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - u_2 \sin t} \right)' + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1}{1 + \sin t} \right) \lim_{a \rightarrow 1} (1 - a - u_1)' \right\}, \end{aligned} \right.$$

где «штрих» означает дифференцирование по a . Согласно (34) отсюда следует:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= C_1 + t + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2}}, \\ x &= C_2 + \frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) - \frac{1}{1 + \sin t} \right). \end{aligned} \right. \quad (39)$$

Если сравнить решение (39) с решением (16), мы немедленно увидим их полную эквивалентность.

Зависимость $\varphi(x)$ в соответствии с решениями (38) показана на рис. 1 (см. раздел благодарности). При этом выбрано начальное условие в виде $\varphi(t = 0) = 0$, $x(t = 0) = 0$ и считается, что параметр $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, безразмерное время $0 \leq x < \infty$, а функция $\varphi(x)$ ограничена и лежит в сегменте $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi-1}{2}$.

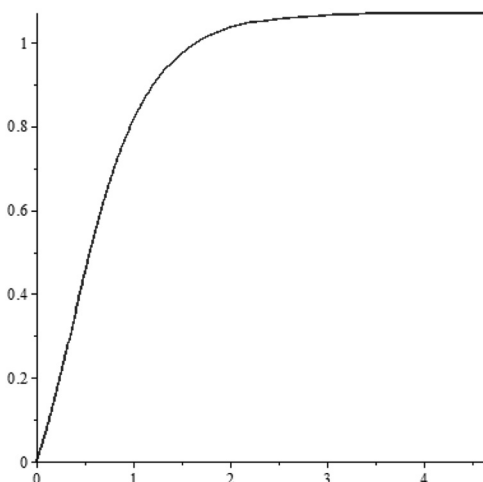


Рис. 1. По оси ординат отложена функция $\varphi(x)$, а по оси абсцисс – аргумент x .

Fig. 1. The function $\varphi(x)$ is plotted along the ordinate, and the argument x is plotted along the abscissa.

Источник: приведённая зависимость получена благодаря численному анализу, проведённому к.ф.-м.н., доцентом С. Б. Богдановой, который основан на аналитически найденном решении (38).

Заключение

Заканчивая настоящее сообщение, отметим следующее:

1. Найдено общее параметрическое решение задачи, описывающей динамику движения заряженного металлического шара при учёте как сил вязкого сопротивления со стороны континуума и силы сухого трения в шарнирной точке крепления, так и тормозного электромагнитного излучения, которое ранее во внимание никогда не принималось.

2. Аналитическое решение задачи оказалось возможным найти лишь в условиях горизонтального вращения шара, когда сила тяжести не существенна. Если вращение осуществляется не в горизонтальной плоскости, то при учёте силы тяжести решение можно найти только с помощью численных методов, как это сделано, например, в работе [3].

Статья поступила в редакцию 09.06.2020 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю признательность к.ф.-м.н., доценту С. Б. Богдановой за численное решение, проиллюстрированное на рис. 1.

ACKNOWLEDGMENTS

The author expresses sincere gratitude to PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor S. B. Bogdanova for the numerical solution, which is illustrated in Fig. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков С. О., Богданова С. Б. Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации) // Инженерная физика. 2019. № 1. С. 49–61.
2. Гладков С. О., Богданова С. Б. Теория детерминированного хаоса в системе n взаимодействующих компланарных маятников // Инженерная физика. 2019. № 3. С. 9–21.
3. Гладков С. О., Богданова С. Б. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27. № 1. С. 53–62.
4. Гладков С. О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 3. С. 337–341.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Т. 3. М.: Наука, 2001. 780 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 2003. 644 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Т. 1. М.: Наука, 2002. 220 с.
8. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. Т. 1. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
9. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 320 с.
10. Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. М.: Машиностроение, 1984. 432 с.
11. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 380 с.
12. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. About the possibility of synchronization in dynamical systems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (11–13 November 2019, Voronezh, Russian Federation). P. 012011.

REFERENCES

1. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [Chaotic dynamics of interacting pendulums (decision of synchronization problem)]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2019, no. 1, pp. 49–61.
2. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [The theory deterministic chaos in the system n interacting complanar pendulum]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2019, no. 3, pp. 9–21.
3. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2019, vol. 27, no. 1, pp. 53–62.
4. Gladkov S. O. [On Calculating the Stopping Time of a Cylindrical Body Rotating in a Viscous Continuum and the Time of Entrainment of a Coaxial External Cylinder]. In:

- Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2018, vol. 88, no. 3, pp. 337–341.
5. Landau L. D., Lifshits E. M. *Kvantovaya mekhanika. T. 3* [Quantum mechanics. Vol. 3]. Moscow, Nauka Publ., 2001. 780 p.
 6. Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 644 p.
 7. Landau L. D., Lifshits E. M., *Mekhanika. T. 1* [Mechanics. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 220 p.
 8. Sivukhin D. V. *Obshchii kurs fiziki. Mekhanika. T. 1* [General course of physics. Mechanics. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 560 p.
 9. Moiseev N. N. *Asimptoticheskie metody nelineinoi mekhaniki* [Asymptotic methods of nonlinear mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 320 p.
 10. Kryukov B. I. *Vynuzhdennye kolebaniya sushchestvenno nelineinykh sistem* [Forced oscillations of substantially nonlinear systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 432 p.
 11. Mun F. *Khaoticheskie kolebaniya* [Chaotic oscillations]. Moscow, Mir Publ., 1990. 380 p.
 12. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. About the possibility of synchronization in dynamical systems. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2020. Vol. 1479. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (11–13 November 2019, Voronezh, Russian Federation). P. 012011.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математическое моделирование № 311 Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Mathematical Modeling No. 311, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу неравномерного вращения по плоской круговой орбите вокруг вертикальной оси заряженного металлического шара с учетом диссипативных сил // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 2. С. 36–47.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-36-47

FOR CITATION

Gladkov S. O. Uneven rotation along a plane circular orbit around the vertical axis of a charged metal ball with account for dissipative forces. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 2, pp. 36–47.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-36-47