УДК 620.169.1

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-48-56

АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЛОТНОСТИ ЭНТРОПИИ В ПРОЦЕССАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Боброва И. А.¹, Бугримов А. Л.², Лаврентьев В. В.³, Чукаловская Е. М.⁴

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, Российская Федерация

² Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина
(Технологии. Дизайн. Искусство)
117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, стр. 1, Российская Федерация

³ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Российская Федерация

⁴ Московский государственный областной университет
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация.

Целью работы является оценка возможности построения энтропийного критерия прочности материалов на примере вязкоупругого материала в условиях ползучести и циклических нагрузок.

Процедура и методы исследования. Исследование энтропийного критерия прочности материалов при помощи математического аппарата.

Результаты исследования. Проведена оценка возможности построения энтропийного критерия прочности материалов на примере вязкоупругого материала в условиях ползучести и циклических нагрузок.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в том, что полученные результаты могут быть применены в теории механики композитов.

Ключевые слова: энтропийный критерий длительной прочности, производная дробного порядка, интеграл дробного порядка, упругость, вязкоупругость, вязкая жидкость

ANALYSIS OF THE THERMODYNAMIC CRITERIA LONG-TERM STRENGTH OF MATERIALS

I. Bobrova¹, A. Bugrimov², V. Lavrent'ev³, E. Chukalovskaya⁴

¹ National Research University Higher School of Economics
20 Myasnitskaya ulitsa, Moscow 101000, Russian Federation

² The Kosygin State University of Russia
33 build. 1 ulitsa Sadovnicheskaya, Moscow 117997, Russian Federation

³ Lomonosov Moscow State University
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Moscow, Russian Federation

⁴ Moscow Region State University
24 ulitsa Very Voloshinoy, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract.

The purpose of the work is to assess the possibility of constructing an entropy criterion for the strength of materials by the example of a viscoelastic material under creep and cyclic loads.

Methodology and Approach. Study of the entropy criterion for the strength of materials using a mathematical apparatus.

The results. The possibility of constructing an entropy criterion for the strength of materials is estimated by the example of a viscoelastic material under creep and cyclic loads. It is shown that the increment of entropy density is determined by the nature of the loading process. For this reason, it turns out to be impossible to propose any value of the limiting value of the increment of entropy density as a criterion for the long-term strength of a viscoelastic material.

Theoretical and practical relevance: the obtained results can be applied in the theory of mechanics of composites.

Keywords: entropy criterion of strength, fractional derivative, fractional integral, elastic, viscoelasticity, viscous fluid

Введение

Критерии длительной прочности материалов основываются на предположении существования некоторого предельного (критического) состояния A_* , по достижении которого материал разрушается:

$$A \leq A_*.$$

Причём предельное состояние A_* является критерием прочности только в том случае, если оно зависит от характеристик материала, а не от процесса нагружения.

Термодинамические критерии длительной прочности предполагают существование предельного термодинамического состояния, которое достижимо и единственно [1–3]. К таким критериям относится энтропийный критерий длительной прочности. Сущность его заключается в том, что в процессе нагружения материала предельному термодинамическому состоянию соответствует некоторое критическое значение приращения плотности энтропии ΔS_* , которое обусловливается диссипацией энергии $W(t)$ за время до разрушения материала t_* при температурном режиме $T(t)$ [1]:

$$\Delta S_* = \int_0^{t_*} \frac{W(t)}{T(t)} dt. \quad (1)$$

Для большинства материалов временная зависимость прочности имеет вид степенного закона, или формулы Голланда-Тернера [1]:

$$t_* = B\sigma^{-\beta}, \quad 3 \leq \beta \leq 12, \quad (2)$$

где B и β – экспериментально определяемые коэффициенты для конкретного материала.

В работе [4] рассмотрена проблема существования энтропийного критерия длительной прочности (1) на основе структурно-механических моделей. В частности, показано, что критическое значение приращения плотности энтропии

для среды с делящимся тензором деформации при условии ползучести за время (2) инвариантно лишь при $\beta = 2$, что не имеет физической основы:

$$\Delta S = \frac{B}{\eta T} \sigma_0^{2-\beta}.$$

Результаты анализа

В данной работе проведён анализ критерия (1) на примере вязкоупругого материала, математическая модель которого построена с помощью аппарата дробного интегро-дифференцирования [5].

Рассматривается «обобщённая» сплошная среда, для которой определяющие соотношения, связывающие деформацию и напряжение, имеют вид [6–9]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C} (I^\alpha \sigma)(t), \quad \sigma(t) = C (D^\alpha \varepsilon)(t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3)$$

где $I^\alpha D^\alpha$ – операторы интегрирования и дифференцирования дробного порядка соответственно, C и α – константы, зависящие от свойств материала и определяемые экспериментально.

Следует заметить, что на основе указанного подхода в работе [6] из решения задачи упругости получены решения задачи вязкоупругости, а при $\alpha \rightarrow 1$ получено решение классической задачи о профиле скоростей при течении вязкой жидкости по трубе.

Для вязкоупругого материала, определяющие соотношения которого описываются соотношениями (3), закон ползучести (изменение деформации во времени (рис. 1) под действием напряжения $\sigma_0 = \text{const}$, мгновенно приложенного в начальный момент времени $t = 0$), имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C} (I^\alpha \sigma)(t) = \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma_0 d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{\sigma_0}{C\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha. \quad (4)$$

Рис. 1. Ползучесть образца вязкоупругого материала под действием мгновенно приложенного напряжения $\sigma_0 = \text{const}$.

Fig. 1. Creep of a sample of viscoelastic material under the action of instantly applied stress $\sigma_0 = \text{const}$.

Источник: составлено авторами.

Работа диссипации с учётом закона деформирования (4) равна:

$$\dot{W}(t) = \sigma \dot{\epsilon} = \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sigma_0^2 t^{\alpha-1},$$

$$W(t) = \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sigma_0^2 t^\alpha. \quad (5)$$

Предельное значение приращение плотности энтропии вычисляется с учётом диссипации энергии $W(t)$, стационарности температуры и времени до разрушения (2):

$$\begin{aligned} \Delta S_* &= \int_0^t \frac{W(t)}{T} dt = \Delta S_* = \int_0^t \frac{\sigma \dot{\epsilon}}{T} dt = \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{T} \sigma_0^2 \int_0^t t^{\alpha-1} dt = \\ &= \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{T} \sigma_0^2 t^\alpha \Big|_0^t = \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{T} \sigma_0^2 t^\alpha = \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{T} B^\alpha \sigma_0^{2-\alpha\beta}, \\ \Delta S_* &= \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{T} B^\alpha \sigma_0^{2-\alpha\beta}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad 3 \leq \beta \leq 12. \end{aligned} \quad (6)$$

Полученное предельное значение приращения плотности энтропии (6) инвариантно лишь при условии:

$$\alpha = \frac{2}{\beta}. \quad (7)$$

В противном случае разброс значений ΔS_* для различных значений параметров α и β продемонстрирован на рис. 2.

Рис. 2. Зависимость ΔS_* от мгновенно приложенного напряжения $\sigma_0 = \text{const}$ при $\beta = 3$ и $\alpha = 0,3, 0,5, 0,7$.

Fig. 2. The dependence of ΔS_* on the instantly applied voltage $\sigma_0 = \text{const}$ at $\beta = 3$ and $\alpha = 0,3, 0,5, 0,7$.

Источник: по данным авторов.

Модель вязкоупругой среды (3) включает в себя упругое состояние при $\alpha = 0$ и вязкое состояние при $\alpha = 1$ [10]. Однако при таких значениях коэффициент длительной прочности материала $\beta \rightarrow \infty$ и $\beta = 2$, соответственно, что противоречит указанному диапазону в соотношении (7).

В случае гармонической нагрузки с частотой ω и амплитудой σ_0 при $t = \text{const}$:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t \quad (8)$$

с учётом (3) закон ползучести образца вязкоупругого материала имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma_0 \sin \omega \tau d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (9)$$

и при этом

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\sigma_0}{C} \frac{\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\cos \omega \tau d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \quad (10)$$

Поведение функции (10) при $t > T$ (T – период) в асимптотическом смысле совпадает с поведением функции $f(x)$ (рис. 3):

$$f(x) = \frac{1}{\omega^\alpha} \cos \left(\omega t - \frac{\alpha\pi}{2} \right). \quad (11)$$

Рис. 3. Дробное интегрирование по (10) и (11) при порядке интегрирования $\alpha = 0,5$.

Fig. 3. Fractional integration according to (10) and (11) with the integration order $\alpha = 0,5$.

Источник: по данным авторов.

Поэтому функция рассеяния энергии за время $t > 2\pi/\omega$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \frac{\sigma_0^2}{C} \frac{\omega^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int \sin \omega t \cos \left(\omega t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) dt = \frac{\sigma_0^2}{2C} \frac{\omega^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int \left[\sin \left(2\omega t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) + \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] dt = \\
 &= \frac{\sigma_0^2}{4C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\omega^\alpha} \left[t\omega \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \cos \left(2\omega t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right], \\
 W(t) &= \frac{\sigma_0^2}{4C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\omega^\alpha} \left[t\omega \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \cos \left(2\omega t - \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Работу диссипации за один цикл (на рис. 4 – для значений α и β , соответствующих рис. 2) можно вычислить по (12), рассмотрев разность между двумя последующими циклами:

$$\begin{aligned}
 \Delta W(\omega) &= W(2\pi(n+1)) - W(2\pi n) = \frac{\sigma_0^2}{4C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\omega^\alpha} \left\{ 2\pi(n+1)\omega \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \right. \\
 &\quad \left. - \cos \left(4\omega\pi(n+1) - \frac{\alpha\pi}{2} \right) - 2\pi n \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \cos \left(4\omega\pi n - \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right\}, \\
 \Delta W(\omega) &= \frac{\sigma_0^2}{2C} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\omega^\alpha} \left[\pi\omega \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \sin 2\pi\omega \sin \left(6\pi\omega - \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Рис. 4. Зависимость ΔW от частоты ω при $\beta = 3$ и $\alpha = 0,3, 0,5, 0,7$.

Fig. 4. The dependence of ΔW on the frequency of ω at $\beta = 3$ and $\alpha = 0,3, 0,5, 0,7$.

Источник: по данным авторов.

Из определения (1) и соотношения (13) следует, что работа диссипации и предельное значение приращения плотности энтропии, конечно, зависят от свойств материала и – что следует особо подчеркнуть – от характера процесса.

Заключение

Таким образом, процесс деформирования материала сопровождается возрастанием плотности энтропии, которая к моменту разрушения материала достигает предельного значения. Однако скорость роста плотности энтропии и предельное значение приращения плотности энтропии можно трактовать лишь как степень отклонения процесса от равновесного, а не как полноценный критерий длительной прочности материалов.

Статья поступила в редакцию 03.03.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. 248 с.
2. Победря Б. Е. Термодинамический критерий прочности композитов // Механика композитных материалов. 1993. Т. 29. № 3. С. 302–310.
3. Осяев О. Г. Энтропийный критерий длительной прочности для вязкоупругих материалов // Вестник Донского государственного технического университета. 2010. Т. 10. № 2 (45). С. 239–242.
4. Бугримов А. Л. О существовании энтропийного критерия прочности неупругих материалов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2007. № 2. С. 29–35.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
6. Бугримов А. Л. Об одном подходе к построению физических соотношений обобщенного вида в механике деформируемого тела // Каучук и резина. 1994. № 4. С. 28–32.
7. Победря Б. Е. Диссипация энергии в теории вязкоупругости // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2003. № 4. С. 35–46.
8. Баланкин А. С., Бугримов А. Л. Фрактальная теория пластичности полимеров // Высокомолекулярные соединения. Серия А: Физика полимеров. 1992. Т. 34. № 3. С. 129–132.
9. Корчагина А. Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1-1 (81). С. 65–67.
10. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

REFERENCES

1. Gol'denblat I. I., Bazhanov V. L., Kopnov V. A. *Dlitel'naya prochnost' v mashinostroenii* [Long lasting strength in mechanical engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 248 p.
2. Pobedrya B. E. [Thermodynamic strength criterion for composites]. In: *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials], 1993, vol. 29, no. 3, pp. 302–310.

3. Osaev O. G. [Entropic criterion of stress rupture for viscoelastic materials]. In: *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Vestnik of Don State Technical University], 2010, vol. 10, no. 2 (45), pp. 239–242.
4. Bugrimov A. L. [About exist the entropy criterion of durability of anelasticity materials]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2007, no. 2, pp. 29–35.
5. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order, and some applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p.
6. Bugrimov A. L. [On an approach to the construction of generalized physical relations in the mechanics of a deformable body]. In: *Kauchuk i rezina* [International Polymer Science and Technology], 1994, no. 4, pp. 28–32.
7. Pobedrya B. E. [Dissipation of energy in the theory of viscoelasticity]. In: *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin], 2003, no. 4, pp. 35–46.
8. Balankin A. S., Bugrimov A. L. [The fractal theory of plasticity of polymers]. In: *Vysokomolekulyarnye soedineniya. Seriya A: Fizika polimerov* [Polymer Science. Polymer Physics], 1992, vol. 34, no. 3, pp. 129–132.
9. Korchagina A. N. [Application of fractional order derivatives for solving problems of continuum mechanics]. In: *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya of Altai State University], 2014, no. 1-1 (81), pp. 65–67.
10. Il'yushin A. A., Pobedrya B. E. *Osnovy matematicheskoi teorii termov'yazko-uprugosti* [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscoelasticity.]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 280 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Боброва Ирина Александровна – аспирант математического факультета Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;
e-mail: ia.bobrova94@gmail.com;

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: al.bugrimov@mgou.ru; bugrimov-al@rguk.ru;

Лаврентьев Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;
e-mail: lavrent@cs.msu.ru;

Чукаловская Евгения Михайловна – старший преподаватель кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московского государственного областного университета;
e-mail: em.chukalovskaya@mgou.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Irina A. Bobrova – Postgraduate Student at the Faculty of Mathematics, National Research University Higher School of Economics;
e-mail: ia.bobrova94@gmail.com;

Anatoly L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Physics, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: al.bugrimov@mgou.ru; bugrimov-al@rguk.ru;

Viktor V. Lavrent'ev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Researcher at the Laboratory of Statistical Analysis at the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University;
e-mail: lavrent@cs.msu.ru;

Eugenia M. Chukalovskaya – Senior Lecturer at the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: em.chukalovskaya@mgou.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Боброва И. А., Бугримов А. Л., Лаврентьев В. В., Чукаловская Е. М. Анализ предельных значений плотности энтропии в процессах деформирования вязкоупругих материалов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2020. № 2. С. 48–56.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-48-56

FOR CITATION

Bobrova I. A., Bugrimov A. L., Lavrent'ev V. V., Chukalovskaya E. M. Analysis of the thermodynamic criteria Long-term strength of materials. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 2, pp. 48–56.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-48-56