

УДК 530.145.6+537.21

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-3-65-73

ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ НА ПРИМЕРЕ ЯДРА УРАНА

Завитаев Э. В., Русаков О. В., Уткин А. И.

*Государственный гуманитарно-технологический университет
142611, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22. Российская
Федерация*

Аннотация.

Целью статьи является рассмотрение упрощённой модели туннелирования α -частицы в ядре урана.

Процедура и методы. На основе совмещения двух квантово-механических моделей выполнен расчёт прозрачности потенциального барьера как функции главного квантового числа.

Результаты. Рассчитана прозрачность потенциального барьера для α -частицы в поле ядерных сил урана в зависимости от главного квантового числа.

Теоретическая значимость. Построена функциональная зависимость прозрачности барьера от главного квантового числа; проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: волновая функция, плотность вероятности, потенциальная яма, потенциальный барьер, α -распад, прозрачность барьера, главное квантовое число

THE TUNNEL EFFECT FOR EXAMPLE OF A URANIUM NUCLEUS

E. Zavitaev, O. Rusakov, A. Utkin

*State University of Humanities and Technology
22 Zelenaya ulitsa, Orekhovo-Zuyevo 142611, Moscow Region, Russian Federation*

Abstract.

Aim of the article is to consider a simplified model of tunneling of an α -particle in the uranium nucleus.

Methodology. Based on the combination of two quantum-mechanical models, the transparency of the potential barrier as a function of the main quantum number is calculated.

Results. The transparency of the potential barrier for α -particle in the field of nuclear forces of uranium is calculated depending on the main quantum number.

Research implications. The functional dependence of the barrier transparency on the main quantum number is constructed, and the results obtained are discussed.

Keywords: wave function, probability density, potential well, potential barrier, α -decay, the transparency of the barrier, main quantum number

Введение

В настоящее время активно развивается наноэлектроника [6] на основе квантово-механических явлений, таких, как туннельный эффект и др. Это связано с важным прикладным значением квантово-механических задач, например, они используются в объяснении α -распада, эффекта Джозефсона и в современных технологиях (туннельный диод, растровый туннельный микроскоп и др.). Поэтому к качеству, параметрам и свойствам таких приборов предъявляются довольно высокие требования [2; 3].

Подробное изучение квантово-механических эффектов позволяет иметь более детальное представление о явлениях микромира. В данной работе на основе квантово-механических моделей, таких, как потенциальная яма бесконечной глубины и потенциальный барьер, выполнен расчёт прозрачности барьера ядра урана, как функции главного квантового числа, определяющего энергию α -частицы в потенциальной яме, и текущего расстояния, отсчитываемого от центра ядра.

Постановка задачи

Рассматривается упрощённая модель ядра урана радиуса R , в поле ядерных сил которого образуется α -частица массы m , на основе совмещения двух квантово-механических моделей: потенциальная яма бесконечной глубины и потенциальный барьер поля ядра урана.

Как известно из курса квантовой механики [1], потенциальная яма – это такая область пространства, где присутствует локальный минимум потенциальной энергии частицы, и где её полная энергия принимает дискретные значения:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где L – ширина потенциальной ямы, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная

Планка-Дирака, m – масса частицы, n – главное квантовое число.

Причём каждому значению энергии E_n соответствует собственная волновая функция $\psi_n(x)$, описывающая данное состояние. Эта функция, по сути, является математической формой, с помощью которой можно описывать эволюцию состояния квантово-механической системы. Положив потенциальную энергию частицы внутри ямы $U(x) = 0$, данную функцию можно найти как решение стационарного уравнения Шредингера [4; 5]:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi = 0. \quad (2)$$

Отсюда волновая функция α -частицы имеет вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad (3)$$

где L – ширина потенциальной ямы; n – главное квантовое число, определяющее количество гребней для функции $|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi n}{L} x$ (см. рис. 1).

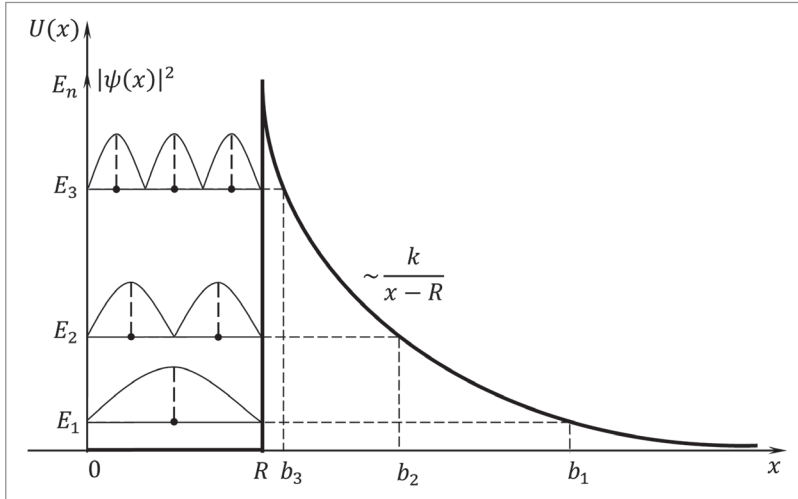


Рис. 1. / Fig. 1. Схема туннелирования α -частицы в поле ядра урана. / Scheme of tunneling of an α -particle in the field of a uranium nucleus.

Источник: данные авторов / Source: authors' data.

Рассмотрим α -распад, то есть самопроизвольное испускание ядром урана ядер атома гелия ${}^4_2\text{He}$. Просачивание α -частицы происходит благодаря туннельному эффекту. Для α -частицы ядро атома урана, в котором она находится, – это потенциальная яма, а граница между ядром и внешним пространством – потенциальный барьер, через который ядру ${}^4_2\text{He}$ нужно пройти. Точно определить нахождение ${}^4_2\text{He}$ в ядре урана невозможно в силу соотношения неопределённостей Гейзенберга, поэтому внутри потенциальной ямы строится вышеописанная плотность вероятности $|\psi_n(x)|^2$ обнаружить частицу в заданном квантовом состоянии (рис. 1).

Спад потенциального барьера за пределами ядра урана (рис. 1), образованного сильным взаимодействием, следует из-за кулоновского отталкивания между α -частицей и протонами в ядре [8].

Таким образом, ядро урана радиуса R является барьером для α -частицы в силу того, что ядерное притяжение на расстояниях $10^{-16} \div 10^{-15}$ метра сильнее кулоновского отталкивания в десятки-сотни раз. Поэтому частица, взяв энергию у соседних нуклонов (например, в результате поглощения ядром электрона или высокоэнергетичного γ -кванта), может перейти с основного уровня E_1 на E_2 (или E_3, E_4, \dots) и за счёт этого проникнуть сквозь указанный барьер с большей вероятностью [9; 10].

Исходя из вышесказанного, цель данного исследования – выяснить функциональную зависимость между прозрачностью D потенциального барьера

α -частицы в поле ядерных сил урана от её главного квантового числа n и представить зависимость $D(n)$ графически.

Расчёт ширины и прозрачности барьера

Рассчитаем ширину и прозрачность барьера в условиях предложенной нами модели. Положив для определённости в формулах (1) и (3) ширину ямы $L = R$ (см. рис. 1.), рассмотрим задачу по просачиванию α -частицы через потенциальный барьер ядерных и кулоновских сил ядра урана ${}_{92}^{238}\text{U}$ ($A \approx 238$, $z = 92$).

Вероятность пройти через барьер D (прозрачность барьера) определяется соотношением [7]:

$$D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^{b_n} \sqrt{2m(U(x) - E_n)} dx\right), \quad (4)$$

где $U(x) = \frac{k}{x-R} \left(k \approx \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} = \begin{matrix} z_1 = 90 \\ z_2 = 2 \end{matrix} \right) = 4,1 \cdot 10^{-26}$ Дж · м – постоянная, за-

висящая от заряда ядра и вылетевшей частицы, $m \approx 4$ а.е.м. – масса α -частицы (1 а.е.м. $\approx 1,6 \cdot 10^{-27}$ кг), E_n – определяется формулой (1).

Пределы интегрирования, как видно на рис. 1, принимают следующие значения: $a = L = R$, $b = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$. Найдём $b = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$, приравняв графики функций E_n и $U(x)$ в точке b (см. рис. 1), т. е.

$$E_n = U(b_n) \Rightarrow \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 \Big|_{L=R} = \frac{k}{x-R} \Big|_{x=b_n} \Rightarrow b_n = R + \frac{2kmR^2}{\pi^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

или

$$b_n = R + \frac{C \cdot R}{n^2} = R \left(1 + \frac{C}{n^2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

где $R \approx rA^{1/3} \approx 9,3 \cdot 10^{-15}$ м – радиус ядра урана ($r \approx 1,5 \cdot 10^{-15}$ м – средний радиус нуклона в ядре), $C = \frac{2mkR}{\pi^2 \hbar^2} \approx \frac{8 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 4,1 \cdot 10^{-26} \cdot 9,3 \cdot 10^{-15}}{3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68}} \approx 46,6$ – безразмер-

ная константа.

Тогда ширина барьера зависит от n и определяется выражением:

$$\Delta_n = b_n - a = |a = R| = R + \frac{2kmR^2}{\pi^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} - R = \frac{2kmR^2}{\pi^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

или

$$\Delta_n = R \left(1 + \frac{C}{n^2} \right) - R = \frac{C \cdot R}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

откуда для урана атомной массы $A \approx 238$ и радиуса $R \approx 9,3 \cdot 10^{-15}$ м найдём:

$$\Delta_n = b_n - a = |a = R| = \frac{2kmR^2}{\pi^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{8kmR^2}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \left| \frac{m \approx 4 \text{ а.е.м}}{1 \text{ а.е.м} \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} \right| \approx$$

$$\approx \frac{32kR^2 \cdot 1 \text{ а.е.м}}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \approx \left| \begin{array}{l} k \approx \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = 4,1 \cdot 10^{-26} \text{ Дж} \cdot \text{м} \\ R \approx rA^{1/3} \approx 9,3 \cdot 10^{-15} \text{ м} \end{array} \right| \approx$$

$$\approx \frac{32 \cdot 4,1 \cdot 10^{-26} \cdot (9,3 \cdot 10^{-15})^2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{(6,63 \cdot 10^{-34})^2} \cdot \frac{1}{n^2} \approx \frac{428,5 \cdot 10^{-15}}{n^2} \text{ м} \approx \frac{428,5}{n^2} \text{ фм}. \quad (7)$$

Из (7) рассчитаем ширину барьера:

$$\begin{cases} \Delta_1 \approx 428500 \text{ ам}, & \text{при } n = 1, \\ \Delta_{10} \approx 4285 \text{ ам}, & \text{при } n = 10, \\ \Delta_{100} \approx 42,85 \text{ ам}, & \text{при } n = 100, \\ \Delta_{1000} \approx 0,4285 \text{ ам}, & \text{при } n = 1000, \end{cases}$$

т. е. при $n \rightarrow \infty$ ширина барьера $\Delta_\infty \rightarrow 0$.

Аналогично, разность энергий в формуле (4) будет равна:

$$U(x) - E_n = \frac{k}{x-R} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mR^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

т. е. она уменьшается с ростом главного квантового числа n (см. рис. 1).

Подставив $a = R$, (5) и (8) в (4), найдём прозрачность барьера D , соответствующую энергии частицы E_n , определяемую равенством (1):

$$= D_0 \left| \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_R^{b_n} \sqrt{2m \left(\frac{k}{x-R} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mR^2} n^2 \right)} dx \right) \right|^2 =$$

$$= D_0 \left| \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_R^{R(1+C/n^2)} \sqrt{\frac{2mk}{x-R} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{R^2} n^2} dx \right) \right|^2 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \xi = \frac{x}{R}, \quad d\xi = \frac{dx}{R} \\ \xi_1 = \frac{R}{R} = 1, \quad \xi_2 \approx \frac{R(1+C/n^2)}{R} = 1 + \frac{C}{n^2} \end{array} \right| =$$

$$= D_0 \left| \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_1^{1+C/n^2} \sqrt{\frac{2mk}{(\xi-1)R} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{R^2} n^2} R d\xi \right) \right|^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= D_0 \left| \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_1^{1+C_*/n^2} \sqrt{\frac{2mkR}{\xi-1} - \pi^2 \hbar^2 n^2} d\xi \right) \right|^2 = \\
&= D_0 \left| \exp \left(-\pi \int_1^{1+C_*/n^2} \sqrt{\frac{2mkR}{\pi^2 \hbar^2 (\xi-1)} - n^2} d\xi \right) \right|^2 \approx \\
&\approx D_0 \left| \exp \left(-\pi \int_1^{1+C_*/n^2} \sqrt{\frac{C_*}{\xi-1} - n^2} d\xi \right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Вычислим интеграл в последней формуле $\int_1^{1+C_*/n^2} \sqrt{\frac{C_*}{\xi-1} - n^2} d\xi$, где ξ – безразмерная текущая координата, отсчитываемая от центра ядра. Для этого делаем замену переменной интегрирования: $\xi = 1 + \frac{C_*}{n^2} \cos^2 \varphi$. При этом

$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right)$. И $\xi_1 \rightarrow 1$ отвечает $\varphi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, а $\xi_2 = 1 + \frac{C_*}{n^2}$ отвечает $\varphi_2 = 0$. Имеем:

$d\xi = \xi'(\varphi) d\varphi = -\frac{C_*}{n^2} \sin(2\varphi) d\varphi$, и тогда интеграл

$$\begin{aligned}
\int_1^{1+C_*/n^2} \sqrt{\frac{C_*}{\xi-1} - n^2} d\xi &= \int_{\pi/2}^0 \sqrt{\frac{n^2}{\cos^2 \varphi} - n^2} \left(-\frac{C_*}{n^2} \right) \sin(2\varphi) d\varphi = \frac{2C_*}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&= \frac{2C_*}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{C_*}{n} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2\varphi)) d\varphi = \frac{\pi C_*}{2n}.
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$D_n = D_0 \left| \exp \left(-\frac{\pi^2 C_*}{2n} \right) \right|^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$

где $D_0 \approx 1$, $C_* \approx 46,6$.

Заключение

Найденная функция D_n (формула (9)) позволяет рассчитать вероятность просачивания α -частицы сквозь потенциальный барьер поля ядерных сил урана, схематически изображённый на рис. 1.

На рис. 2 и 3 представлена одна и та же кривая (в разных масштабах) зависимости прозрачности барьера D_n от главного квантового числа n (формула (9)).

Как видно из рис. 2, α -частица, находясь в состоянии с главным квантовым числом $n < 60$, не может преодолеть потенциальный барьер, так как прозрач-

ность барьера близка к нулю. При достижении α -частицей достаточно большой энергии, которая соответствует $n = 2000$ (рис. 3), вероятность её просачивания через барьер составляет порядка 80%. При дальнейшем увеличении главного квантового числа n (рис. 3), кривая асимптотически стремится к 1.

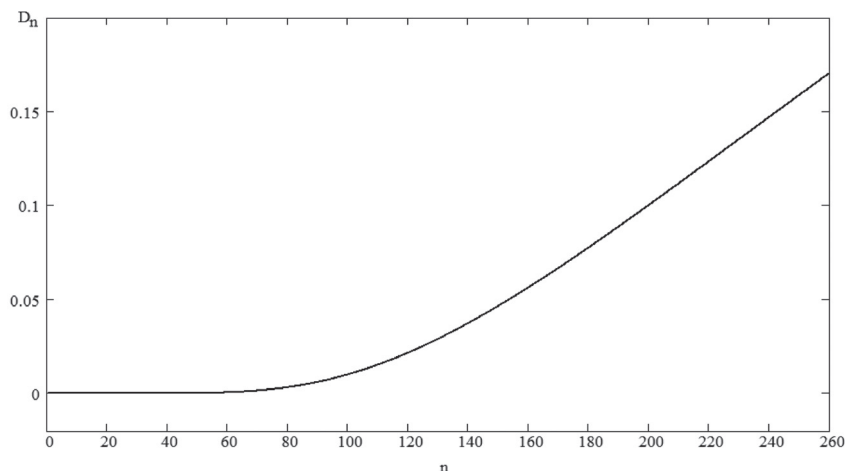


Рис. 2. / Fig. 2. Зависимость прозрачности барьера D_n для α -частицы, образованного сильным взаимодействием нуклонов ядра урана, от квантового числа $n \in (0; 260)$. / Dependence of the transparency of the barrier D_n for an α -particle formed by the strong interaction of nucleons of the uranium nucleus on the quantum number $n \in (0; 260)$.

Источник: данные авторов / Source: authors' data.

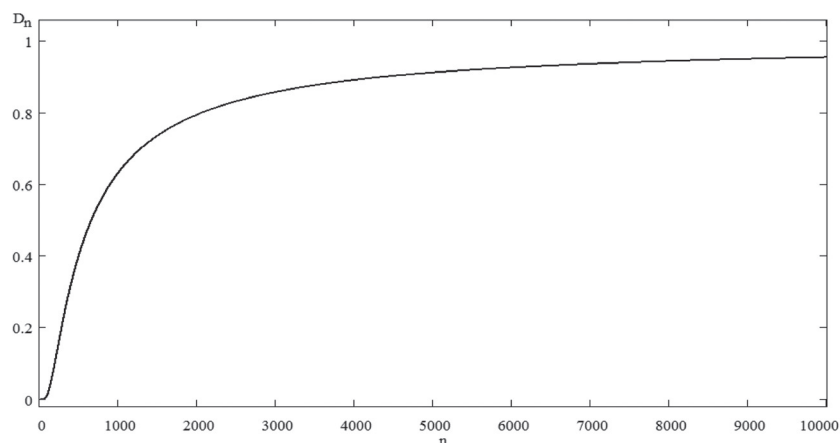


Рис. 3. / Fig. 3. Зависимость прозрачности барьера D_n для α -частицы, образованного сильным взаимодействием нуклонов ядра урана, от квантового числа $n \in (0; 10000)$. / Dependence of the transparency of the barrier D_n for an α -particle formed by the strong interaction of nucleons of the uranium nucleus on the quantum number $n \in (0; 10000)$.

Источник: данные авторов / Source: authors' data.

Статья поступила в редакцию 29.09.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Ленанд, 2019. 672 с.
2. Делоне Н. Б. Туннельный эффект // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6. № 1. С. 79–84.
3. Келдыш Л. В. Динамическое туннелирование // Вестник российской академии наук. 2016. Т. 86. № 12. С. 1059–1072. DOI: 10.7868/S0869587316120057.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2019. 800 с.
5. Матвеев А. Н. Атомная физика. М.: Оникс, 2007. 432 с.
6. Понятов А. Сверхпроводящая электроника для суперкомпьютеров // Наука и жизнь. 2015. № 7. С. 49–63.
7. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. СПб.: Лань, 2019. 320 с.
8. Самоволик В. В. Расчет вероятности туннельного эффекта для экранированного кулоновского барьера // Труды молодых ученых Алтайского государственного университета. № 5. Барнаул: Алтайский государственный университет, 2008. С. 212–214.
9. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1. М.: АСТ, 2019. 448 с.
10. Razavy M. Quantum theory of tunneling. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2003. 549 p.

REFERENCES

1. Blokhintsev D. I. *Osnovy kvantovoi mekhaniki* [Fundamentals of Quantum Mechanics]. Moscow, Lenand Publ., 2019. 672 p.
2. Delone N. B. [Tunnel effect]. In: *Sorosovskii obrazovatel'nyi zhurnal* [Soros Education Journal], 2000, vol. 6, no. 1, pp. 79–84.
3. Keldysh L. V. [Dynamic tunneling]. In: *Vestnik rossiiskoi akademii nauk* [Herald of the Russian Academy of Sciences], 2016, vol. 86, no. 12, pp. 1059–1072. DOI: 10.7868/S0869587316120057.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika: v 10 t. T. 3. Kvantovaya mekhanika (nerelyativistskaya teoriya)* [Theoretical physics: in 10 volumes. Vol. 3. Quantum mechanics (nonrelativistic theory)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019. 800 p.
5. Matveev A. N. *Atomnaya fizika* [Atomic physics]. Moscow, Oniks Publ., 2007. 432 p.
6. Ponyatov A. [Superconducting electronics for supercomputers]. In: *Nauka i zhizn'* [Science and life], 2015, no. 7, pp. 49–63.
7. Savelev I. V. *Kurs obshchei fiziki. T. 3. Kvantovaya optika. Atomnaya fizika. Fizika tverdogo tela* [General physics course. Vol. 3. Quantum optics. Atomic physics. Solid state physics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2019. 320 p.
8. Samovolik V. V. [Calculation of the probability of tunneling effect for a screened Coulomb barrier]. In: *Trudy molodykh uchenykh Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta. No. 5* [Proceedings of young scientists of the Altai State University]. Barnaul, Altai State University Publ., 2008, pp. 212–214.
9. Feynman R., Leighton R., Sands M. *Feinmanovskie lektzii po fizike. T. 1* [Feynman Lectures in Physics. Vol. 1]. Moscow, AST Publ., 2019. 448 p.
10. Razavy M. Quantum theory of tunneling. Singapore, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2003. 549 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Завитаев Эдуард Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Русаков Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Уткин Алексей Игоревич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: aiutkin@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eduard V. Zavitaev – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technology;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Oleg V. Rusakov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technology;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Aleksei I. Utkin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technology;
e-mail: aiutkin@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Завитаев Э. В., Русаков О. В., Уткин А. И. Туннельный эффект на примере ядра урана // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2020. № 3. С. 65–73.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-3-65-73

FOR CITATION

Zavitaev E. V., Rusakov O. V., Utkin A. I. The tunnel effect for example of a uranium nucleus. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 3, pp. 65–73.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-3-65-73