УДК 538.951

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-6-11

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ УПРУГОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Соколов В. В.

*МИРЭА – Российский технологический университет
119454, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78, Российская Федерация*

Аннотация

Цель исследования – вывод изотермического принципа виртуальных работ для упругого твёрдого тела.

Процедура и методы. Под упругим телом будем понимать математическую модель сплошной среды, в которой удельная плотность свободной энергии является функцией только температуры и производных векторов смещений. В рамках равновесной термодинамики получен изотермический принцип виртуальных работ для упругого твёрдого тела.

Результаты. Выведен изотермический принцип виртуальных работ для упругого твёрдого тела. Получены условия механического равновесия внутри и на поверхности упругого твёрдого тела.

Теоретическая и практическая значимость. При заданной функции удельной плотности свободной энергии и известном значении температуры возможно определить зависимость функций смещений от координат, которые характеризуют деформированное состояние рассматриваемого упругого твёрдого тела.

Ключевые слова: упругое твёрдое тело, виртуальная работа, виртуальное смещение, лагранжева вариация, удельная свободная энергия, соотношение Гиббса, условие равновесия

THE ISOHERMAL PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK FOR AN ELASTIC SOLID

V. Sokolov

*MIREA – Russian Technological University
prosp. Vernadskogo 78, 119454 Moscow, Russian Federation*

© CC BY Соколов В. В., 2020.

Abstract

The aim of the research is the derivation of the isothermal principle of virtual work for an elastic solid.

Methodology. By an elastic solid we mean a mathematical model of a continuous medium, in which the specific density of free energy is a function of only temperature and derivatives of displacement vectors. In the framework of equilibrium thermodynamics, the isothermal principle of virtual work for an elastic solid is obtained.

Results. The isothermal principle of virtual work for an elastic solid is derived. The conditions for mechanical equilibrium inside and on the surface of an elastic solid are obtained.

Research implications. For a given function of the specific density of free energy and the known value of the temperature, it is possible to determine the dependence of the displacement functions on the coordinates that characterize the deformed state of the considered elastic solid.

Keywords: elastic solid, virtual work, virtual displacement, Lagrangian variation, free energy density, Gibbs relation, equilibrium condition.

Введение

В статье [1] был дан вывод изотермического принципа виртуальных работ, когда выполнено условие теплового равновесия, то есть температура T во всех точках тела одинакова и остаётся всё время неизменной, и тело подвергается действию заданных внешних сил с объёмной плотностью $\vec{f}$ и с поверхностной плотностью $\vec{F}$, Ψ – свободная энергия тела.

$$\delta\Psi = \int_V \rho(f_k \delta^* q_k) dV + \int_\Sigma (F_k \delta^* q_k) d\Sigma, \quad (1)$$

Виртуальное смещение индивидуальных точек сплошного тела из начального состояния описывается лагранжевой вариацией координат $\delta^* \vec{q}$, ρ – плотность массы тела.

В статье [1] вариационное уравнение (1) было применено для сжимаемого жидкого сплошного тела.

В [2] указывается, что в большинстве учебников, например [3–5], изложение теории упругости ограничивается определением тензора деформации (только для бесконечно малых деформаций) и тензора напряжений и связующим их эмпирическим соотношением, то есть законом Гука.

В другом подходе [6–9] термодинамическое состояние твёрдого тела определяется через компоненты тензора деформаций. Основными уравнениями теории упругости здесь являются выражения термодинамических потенциалов через компоненты тензора деформаций.

Постановка задачи исследования

Целью данной статьи является формулировка изотермического принципа виртуальных работ для упругого твёрдого тела.

Далее под упругим телом будем понимать математическую модель сплошной среды, в которой удельная плотность свободной энергии ψ является функцией только температуры и производной векторов смещений $q_{n,m}$, характеризующих деформированное состояние упругого твёрдого тела:

$$\psi(T, q_{n,m}).$$

Вывод изотермического принципа виртуальных работ для упругого твёрдого тела

В такой модели свободная энергия Ψ такого тела является интегралом от удельной плотности удельной свободной энергии:

$$\Psi = \int_V \rho \psi(T, q_{n,m}) dV. \quad (1)$$

Приращение свободной энергии упругого тела на виртуальном смещении равно:

$$\delta \Psi = \int_V \rho \delta^* \psi(T, q_{n,m}) dV \quad (2)$$

где $\delta^* \psi$ – лагранжева вариация удельной плотности свободной энергии, равная:

$$\delta^* \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q_{n,m}} \delta^* q_{n,m}.$$

Следовательно:

$$\delta \Psi = \int_V \rho \frac{\partial \psi}{\partial q_{n,m}} \delta^* q_{n,m} dV.$$

Выразим вариацию производной векторов смещений $\delta^* q_{n,m}$ через $\delta^* q_i$:

$$\delta^* \left(\frac{\partial q_n}{\partial x_m} \right) = \frac{\partial (\delta^* q_i)}{\partial x_m} - \frac{\partial q_n}{\partial x_i} = \left(\delta_{ni} - \frac{\partial q_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial (\delta^* q_i)}{\partial x_m}.$$

Отсюда получим:

$$\delta^* q_{n,m} = (\delta_{ni} - q_{n,i}) \frac{\partial (\delta^* q_i)}{\partial x_m}.$$

В результате уравнение принципа виртуальных работ (1) примет вид:

$$\int_V \rho \frac{\partial \psi}{\partial q_{n,q}} (\delta_{ni} - q_{n,i}) \frac{\partial (\delta^* q_i)}{\partial x_m} dV = \int_V \rho (f_k \delta^* q_k) dV + \int_{\Sigma} (F_k \delta^* q_k) d\Sigma.$$

Для получения вариационного условия равновесия преобразуем левую часть к виду:

$$\begin{aligned} & \int_V \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{n,q}} (\delta_{ni} - q_{n,i}) \frac{\partial (\delta^* q_i)}{\partial x_m} dV = \\ & = \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{n,q}} (\delta_{ni} - q_{n,i}) n_m \delta^* q_i d\Sigma - \\ & - \int_V \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{n,q}} (\delta_{ni} - q_{n,i}) \right] \delta^* q_i dV. \end{aligned}$$

Здесь n_m означает компоненту внешней нормали к поверхности Σ объёма V .

Далее для компактности записи введём обозначение для тензора внутренних напряжений:

$$P_{im} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{n,q}} (\delta_{ni} - q_{n,i}). \quad (3)$$

В переменных Лагранжа плотность массы определяется формулой:

$$\rho = \rho_0 \det \|\delta_{ij} - q_{i,j}\|,$$

в которой ρ_0 – произвольная константа.

В результате вариационное условие равновесия для обратимых виртуальных перемещений примет вид:

$$\int_{\Sigma} P_{im} n_m \delta^* q_i d\Sigma - \int_V \frac{\partial P_{im}}{\partial x_m} \delta^* q_i dV = \int_V \rho (f_i \delta^* q_i) dV + \int_{\Sigma} (F_i \delta^* q_i) d\Sigma. \quad (4)$$

Полученное равенство должно выполняться при произвольных смещениях $\delta^* \vec{q}$. Приравнявая нулю коэффициенты при смещениях $\delta^* \vec{q}$ в объёмных интегралах (4), приходим к следующему условию, которое должно выполняться внутри упругого твёрдого тела:

$$\frac{\partial P_{im}}{\partial x_m} = -\rho f_i. \quad (5)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при смещениях $\delta^* \vec{q}$ в поверхностных интегралах (4), получим условие, которое должно выполняться на поверхности упругого твёрдого тела:

$$P_{im} n_m = F_i. \quad (6)$$

Согласно термодинамическому тождеству Гиббса [7], для дифференциала внутренней энергии ϵ выполняется соотношение:

$$d\epsilon = T ds + \frac{1}{\rho} \tilde{P}_{nm} dq_{n,m},$$

где s – удельная энтропия и введено обозначение:

$$\tilde{P}_{nm} = \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_{n,q}} \right)_s.$$

В результате для дифференциала удельной свободной энергии $\psi = \varepsilon - Ts$ получаем соотношение:

$$d\psi = -sdT + \frac{1}{\rho} P_{nm} dq_{n,m},$$

в котором:

$$P_{nm} = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_{n,q}} \right)_s.$$

Заключение

В рамках равновесной термодинамики выведен изотермический принцип виртуальных работ для упругого твёрдого тела. Получены условия механического равновесия внутри и на поверхности упругого твёрдого тела.

Показано, что при заданной функции удельной плотности свободной энергии Ψ и известном значении температуры T возможно определить зависимость функций смещений от координат $q_i(x_m)$, которые характеризуют деформированное состояние рассматриваемого упругого твёрдого тела.

Статья поступила в редакцию 21.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов В. В. Изотермический принцип виртуальных работ // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 3. С. 80–84.
2. Goldsmid H. J. Problems in solid state physics. New York: Academic Press, 1968. 468 p.
3. Reddy J. N. An introduction to continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 315 p.
4. Oliver X., Agelet de Saracibar C. Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems. USA: CRC Press, 2017. 550 p.
5. Mase G. T., Smelser R. E., Rossmann J. S. Continuum mechanics for engineers. Boca Raton, FL: CRC Press, 2020. 450 p.
6. Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: МГУ, 1986. 312 с.
7. Wilmanski K. Fundamentals of solid mechanics. Pavia, IUSS Press, 2010. 183 p.
8. Жермен П. Курс механики сплошных сред: Общая теория / пер. с фр. В. В. Федудова. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
9. Базаров И. П., Геворкян Э. В., Николаев П. Н. Термодинамика и статистическая физика. М.: МГУ, 1986. 312 с.

REFERENCES

1. Sokolov V. V. [The isothermal principle of virtual work]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics], 2019, no. 3, pp. 80–84.
2. Goldsmid H. J. Problems in solid state physics. New York, Academic Press Publ., 1968. 468 p.

3. Reddy J. N. An introduction to continuum mechanics. Cambridge, Cambridge University Press Publ., 2013. 315 p.
4. Oliver X. Agelet de Saracibar C. Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems. USA, CRC Press Publ., 2017. 550 p.
5. Mase G. T., Smelser R. E., Rossmann J. S. Continuum mechanics for engineers. Boca Raton, FL, CRC Press Publ., 2020. 450 p.
6. Tolmachev V. V., Golovin A. M., Potapov V. S. *Termodinamika i elektrodinamika sploshnoi sredy* [Thermodynamics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Moscow State University Publ., 1986. 312 p.
7. Wilmanski K. Fundamentals of solid mechanics. Pavia, IUSS Press Publ., 2010. 183 p.
8. Germain P. *Cours de mecanique des milieux continus. Tome I. Theorie generale* (Russ. ed.: Fedulov V. V., transl. *Kurs mekhaniki sploshnykh sred: Obshchaya teoriya*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1983. 399 p.)
9. Bazarov I. P., Gevorkyan E. V., Nikolaev P. N. *Termodinamika i statisticheskaya fizika* [Thermodynamics and statistical physics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1986. 312 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Соколов Виктор Васильевич – доктор физико-математических наук, советник по научной работе МИРЭА – Российского технологического университета;
e-mail: v_sokolov@mirea.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Victor V. Sokolov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Science Advisor, MIREA – Russian Technological University;
e-mail: v_sokolov@mirea.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соколов В. В. Изотермический принцип виртуальных работ для упругого твёрдого тела // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2020. № 4. С. 6–11.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-6-11

FOR CITATION

Victor V. Sokolov. The isothermal principle of virtual work for an elastic solid. In: *Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics*, 2020. no. 4. pp. 6–11.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-6-11