УДК 533.6

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-12-27

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Жаров В. А.¹, Липатов И. И.^{1,2}, Селим Р. С.²

¹ *Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора*

Н. Е. Жуковского

140180, г. Жуковский, Московская область, ул. Жуковского, д. 1, Российская Федерация

² *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*

141701, г. Долгопрудный, Московская область, Институтский пер., д. 9, Российская Федерация

Аннотация

Цель работы – исследование модели развитого турбулентного течения несжимаемой жидкости в пограничном слое на пластине, основанное на анализе уравнений Навье-Стокса, описывающих поведение амплитуд волн Толлмина-Шлихтинга в одномодовом приближении.

Процедура и методы. Рассмотрен слабонелинейный вариант волновой модели развитого турбулентного пограничного слоя. Определены дисперсионные характеристики волн наименее затухающей моды, проанализированы условия множественного 3-х волнового резонанса этой моды волн Толлмина-Шлихтинга. На основе метода многих масштабов получены уравнения для когерентной части.

Результаты. В дискретном представлении когерентной структуры показано, что сумма квадратов модулей амплитуд волн в состоянии множественного 3-х волнового резонанса, умноженных на действительные весовые множители, является инвариантом исходной динамической системы.

Теоретическая и практическая значимость. Инвариант динамической системы нормируется к единице, и формулируется теория Биркгофа–Хинчина.

Ключевые слова: множественный 3-волновой резонанс, несжимаемая вязкая жидкость, турбулентный пограничный слой, волны Толлмина-Шлихтинга, когерентные структуры

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00790.

SPECTRAL CHARACTERISTICS OF AN INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN TURBULENT BOUNDARY LAYERS

V. Zharov¹, I. Lipatov^{1,2}, R. Selim²

¹ *Central Aerohydrodynamic Institute*

ul. Zhukovskogo 1, 140180 Zhukovsky, Moscow region, Russian Federation

² *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)
Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*

Abstract

The aim is to study a model of a developed turbulent flow of an incompressible fluid in a boundary layer on a plate. The study is based on the analysis of the Navier–Stokes equations describing the behaviour of Tollmien–Schlichting wave amplitudes in a single-mode approximation.

Methodology. A weakly nonlinear version of the wave model of a developed turbulent boundary layer is considered. The dispersion characteristics of the waves of the least damped mode are determined, and the conditions of multiple three-wave resonance of this mode of Tollmien–Schlichting waves are analyzed. Equations for the coherent part are obtained using the many-scale method.

Results. In the discrete representation of the coherent structure, it is shown that the sum of the squares of the moduli of the wave amplitudes in the state of multiple three-wave resonance, multiplied by real weight factors, is an invariant of the original dynamical system.

Research implications. The invariant of the dynamic system is normalized to unity, and the Birkhoff–Khinchin theory is formulated.

Keywords: three-wave resonance, incompressible viscous liquid, turbulent boundary layer, Tollmien–Schlichting waves, coherent structures.

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Scientific Project No. 20-08-00790).

Введение

На основе большого объёма экспериментальных данных в работах [1–4] были проанализированы физические процессы в ламинарных и турбулентных пограничных слоях. В работе [5], показано, что развитый турбулентный пограничный слой содержит организованные вихревые структуры, определяющие многие физические свойства этих течений [6]. Методы идентификации особенностей этих течений были предложены в работах [7; 8]. В работах [9; 10] исследованы механизмы формирования когерентных структур и генерации поперечных структур (поточковых вихрей) в задаче сверхзвукового обтекания плоской пластины при падении на неё ударной волны.

В случае турбулентного пограничного слоя рассматриваются модели, основанные на волноводном представлении динамики пульсации в турбулентном пограничном слое. Полученная таким образом система уравнений очень хорошо описывает свойство развитого турбулентного пограничного слоя. Таким образом, модель заслуживает серьёзного обоснования, которое может быть достигнуто за счёт использования более точных численных методов и привлечения методов теории динамических систем. Эти методы требуют знания современной математики [11].

Тем не менее, можно воспользоваться формулировкой известной теоремы Биркгофа–Хинчина, которая была представлена в работе А. Н. Колмогорова [12] и в доступной форме даёт условия существования средних для динамических систем определённого вида. Далее приводится теоретическая постановка задачи описания когерентной структуры [13] в развитом турбулентном пограничном

слое (ТПС) и показывается, что с точки зрения теоремы Биркгофа-Хинчина результаты, полученные в ранних работах [13], вполне обоснованы.

В настоящей работе используется спектр собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда на профиле развитого турбулентного пограничного слоя [14], полученный с помощью метода коллокации, основанного на многочленах Чебышева [15]. В разделе 2 рассмотрена теоретическая часть задачи, связанная с решением уравнения для когерентной структуры, некоторым приближением которого является совокупность гармоник в состоянии 3-х волнового резонанса. Динамика гармоник описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой финитно в некоторой области пространства волновых векторов.

Инвариант этой системы, который, благодаря инвариантности исходного уравнения относительно простого преобразования подобия, в масштабе t_1 может быть нормирован на 1, что и позволяет применить теорему Биркгофа-Хинчина [12]. В результате можно утверждать, что определённые ранее [13] средние по времени величины квадратов модулей амплитуд существуют и допускают корректную численную оценку. Кроме того, проведено сравнение средних квадратов амплитуд по времени и по репрезентативному набору начальных данных.

Постановка задачи

В работе [13], по аналогии с волноводной моделью [16], из уравнений Навье-Стокса получено нелинейное уравнение для Фурье-составляющей вертикальной скорости волн Толлмина-Шлихтинга, описывающей пульсации в пограничном слое, в одномодовом приближении. Тогда уравнение для когерентной части пульсаций с точностью до членов порядка ϵ представляется в виде:

$$\frac{\partial A_{\mathbf{k}}^c}{\partial t} = -\epsilon \int \bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_1}^c A_{\mathbf{k}_2}^c d\mathbf{k}_1, \quad (1)$$

$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$

где функция $\bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ определена в работе [13]. Уравнение содержит малый параметр $\epsilon^2 = \frac{\delta^{**}}{L}$, где δ^{**} – толщина потери импульса, L – характерный продоль-

ный масштаб длины. Для согласования членов уравнения вводится соотношение (закон подобия):

$$\frac{\delta^{**}}{L} \sim \frac{\delta^{**} |\text{Im}(\omega^{**}(\mathbf{k}, \delta^{**}))|}{U_{\infty}}, \quad (2)$$

где $|\text{Im}(\omega^{**}(\mathbf{k}, \delta^{**}))|$ – минимальный по $\mathbf{k}$ инкремент основной моды волн Толлмина-Шлихтинга, U_{∞} – скорость набегающего потока. Амплитуды волн, в соответствии с принципом тройной декомпозиции [5], представляются в виде суммы когерентной и некогерентной частей, для которых получается система уравнений, содержащих малый параметр ϵ . Наличие малого параметра ϵ позво-

ляет искать решение уравнений (1) для амплитуд в виде разложения по этому параметру. Кроме того, появляется иерархия масштабов по времени:

$$\tau_0 = \frac{\delta^{**}}{U_\infty}, \tau_1 = \frac{\tau_0}{\varepsilon}, \tau_2 = \frac{\tau_0}{\varepsilon^2}.$$

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом многих масштабов [17]. Представим производную по времени и амплитуду A_k^c в виде разложения по параметру ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \\ A_k^c &= A_k^{c(0)} + \varepsilon A_k^{c(1)} + \varepsilon^2 A_k^{c(2)} + \dots, \end{aligned}$$

Собирая члены при одинаковых степенях ε , в итоге получаем последовательность из трёх уравнений. Разрешая эти уравнения последовательно в масштабах τ_0, τ_1 , исключая секулярные члены, получим из первых двух:

$$\begin{aligned} A_k^{c(0)} &= A_k^{c(0)}(t_1, t_2), \frac{\partial A_k^{c(0)}}{\partial t_1} = -\int H_{kk_1k_2} \Xi(\Omega_3) A_{k_1}^{c(0)} A_{k_2}^{c(0)} d\mathbf{k}_1, \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \Omega_3 = \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2), \Xi(x) = 1, x = 0, \Xi(x) = 0, x \neq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Отметим свойство уравнения (3) для $A_k^{c(0)}$ в масштабе t_1 . Оно инвариантно относительно замены:

$$A_k^{c(0)}(t_1, t_2) = \varphi(t_2) \tilde{A}_k^{c(0)}(t_1'), \quad t_1' = \varphi(t_2) t_1, \quad (4)$$

которая в модельном варианте имеет вид:

$$a_m(t_1, t_2) = \varphi(t_2) \tilde{a}_m(\varphi(t_2) t_1), \quad m = 1, 2, 3.$$

В итоге решение для когерентной частей допускает, в частности, представление в виде (в общем случае когерентная составляющая содержит бесконечную совокупность субгармоник, находящихся в 3-х волновом резонансе):

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}}^{c(0)} &= a_1 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1^0) + \sum \left\{ a_2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2^0) + a_3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3^0) \right\} + \\ &+ a_1^* \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1^0) + \sum \left\{ a_2^* \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2^0) + a_3^* \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3^0) \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\omega_{\mathbf{k}_1^0}^{(0)} = \omega_{\mathbf{k}_2^0}^{(0)} + \omega_{\mathbf{k}_3^0}^{(0)}, \quad \mathbf{k}_1^0 = \mathbf{k}_2^0 + \mathbf{k}_3^0, \quad \omega_{-\mathbf{k}}^{(0)} = -\omega_{\mathbf{k}}^{*(0)}, \quad \varphi_{-\mathbf{k}}^{(0)} = \varphi_{\mathbf{k}}^{*(0)},$$

где $\mathbf{k}_1^{(0)}, \mathbf{k}_2^{(0)}, \mathbf{k}_3^{(0)}$, – множество векторов, удовлетворяющих уравнениям трёхугольного резонанса [17], а также $a_i, i = 1, 2, 3$ – амплитуды гармоник в 3-х волновом резонансе, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\mathbf{k}_i^{(0)}, i = 1, 2, 3, \mathbf{k}_1^{(0)} = \mathbf{k}_2^{(0)} + \mathbf{k}_3^{(0)}$, – волновые вектора гармоник.

Векторы выбираются так, чтобы они удовлетворяли равенству $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, а концы векторов должны лежать на резонансных кривых, определяемых вектором $\mathbf{k}_0$. В этом случае уравнения для амплитуд когерентной составляющей могут быть представлены в виде [13]:

$$\begin{aligned}
 a_1^* \frac{da_1}{dt_1} &= \Lambda_1 a_1^* a_2 a_3, & a_1 \frac{da_1^*}{dt_1} &= \Lambda_1^* a_1 a_2^* a_3^*, \\
 a_2^* \frac{da_2}{dt_1} &= \Lambda_2 a_1 a_2^* a_3^*, & a_2 \frac{da_2^*}{dt_1} &= \Lambda_2^* a_1^* a_2 a_3, \\
 a_3^* \frac{da_3}{dt_1} &= \Lambda_3 a_1 a_2^* a_3^*, & a_3 \frac{da_3^*}{dt_1} &= \Lambda_3^* a_1^* a_2 a_3,
 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Λ_i , $i = 1, 2, 3$, комплексные числа [13], не зависящие от времени. Умножим теперь каждое уравнение на некоторое положительное число q_i , $i = 1, 2, 3$, и сложим. В результате получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(q_1 |a_1|^2 + q_2 |a_2|^2 + q_3 |a_3|^2)}{dt_1} &= q_1 (\Lambda_1 a_1^* a_2 a_3 + \Lambda_1^* a_1 a_2^* a_3^*) + \\
 &+ q_2 (\Lambda_2 a_1 a_2^* a_3^* + \Lambda_2^* a_1^* a_2 a_3) + q_3 (\Lambda_3 a_1 a_2^* a_3^* + \Lambda_3^* a_1^* a_2 a_3) = \\
 &= (q_1 \Lambda_1 + q_2 \Lambda_2^* + q_3 \Lambda_3^*) a_1^* a_2 a_3 + (q_1 \Lambda_1^* + q_2 \Lambda_2 + q_3 \Lambda_3) a_1 a_2^* a_3^*
 \end{aligned}$$

Полагая $(q_1 \Lambda_1 + q_2 \Lambda_2^* + q_3 \Lambda_3^*) = (q_1 \Lambda_1^* + q_2 \Lambda_2 + q_3 \Lambda_3) = 0$, для q_2/q_1 и q_3/q_1 получаем алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \left(\operatorname{Re}(\Lambda_1) + \frac{q_2}{q_1} \operatorname{Re}(\Lambda_2^*) + \frac{q_3}{q_1} \operatorname{Re}(\Lambda_3^*) \right) &= 0, \\
 \left(\operatorname{Im}(\Lambda_1) + \frac{q_2}{q_1} \operatorname{Im}(\Lambda_2^*) + \frac{q_3}{q_1} \operatorname{Im}(\Lambda_3^*) \right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Если выполняется условие разрешимости для линейной системы:

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\Lambda_2^*), \operatorname{Re}(\Lambda_3^*) \\ \operatorname{Im}(\Lambda_2^*), \operatorname{Im}(\Lambda_3^*) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (8)$$

то решение существует. Определяем значения q_{12} и q_{13} :

$$q_{12} = \frac{q_2}{q_1}, \quad q_{13} = \frac{q_3}{q_1}, \quad (9)$$

которые определяются по коэффициентам Λ_i , $i = 1, 2, 3$.

В случае положительности q_{12} и q_{13} динамика системы финитна и происходит на поверхности единичной сферы. Таким образом, выражение для инварианта имеет следующий вид:

$$I(t_1) = |a_1|^2 + q_{12} |a_2|^2 + q_{13} |a_3|^2 = 1, \quad q_{12} = \frac{q_2}{q_1}, \quad q_{13} = \frac{q_3}{q_1}. \quad (10)$$

Результаты обобщаются на случай множественного 3-х волнового резонанса:

$$\frac{da_l}{dt} = \sum_{l=1}^n \Lambda_l^l a_1^l a_3^l, \quad \frac{da_2^l}{dt} = \Lambda_2^l a_1 a_3^{l*}, \quad \frac{da_3^l}{dt} = \Lambda_3^l a_1 a_2^l, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

В этом случае выражение для инварианта можно представить в виде:

$$I^{(n)}(t_1) = |a_1|^2 + \sum_j q_{12}^{(j)} |a_2^{(j)}|^2 + q_{13}^{(j)} |a_3^{(j)}|^2 = 1,$$

$$q_{12}^{(j)} = \frac{q_2^{(j)}}{q_1}, \quad q_{13}^{(j)} = \frac{q_3^{(j)}}{q_1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Здесь сумма берётся по всем субгармоникам в состоянии 3-х волнового резонанса с основной гармоникой. В случае, когда $q_{12}^{(j)} > 0$, $q_{13}^{(j)} > 0$, инвариант $I^{(n)}(t_1)$ можно преобразовать к уравнению n -мерной единичной сферы. В этом случае здесь также формулируются все условия, которые используются для простого 3-х волнового резонанса. Таким образом, динамика множественного 3-х волнового резонанса в представлении дискретного набора n триплетов удовлетворяет инварианту, который представляется квадратичной формой для амплитуды основной гармоники и амплитуд субгармоник.

Теорема Биркгофа-Хинчина

Приведём здесь теорему Биркгофа-Хинчина в формулировке А. Н. Колмогорова, так как в этой формулировке очень просто найти соответствие с исследуемой задачей. Пусть состояние рассматриваемой системы представлено точкой P на замкнутом n -мерном многообразии.

Пусть координаты $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ точки P удовлетворяют следующей автономной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_i}{dt} = \mathbf{A}_i(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Уравнения (13) в предположении однозначности их решения определяют для каждого t преобразование T_t любого подмножества E многообразия $\mathbf{M}^n$: $T_t E = E'$, где E' есть множество всех точек P' , в которые передвинутся точки P множества E за промежуток времени t . Интегральным инвариантом называется такая функция множества $I(E)$, для которой всегда $I(T_t E) = I(E)$, где $I(\mathbf{M}^n) = 1$.

Так что, для любой вещественнозначной функции $f(P)$, определённой на $\mathbf{M}^n$ и суммируемой относительно $I(E)$, предел существует и конечен для всех P :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \int_0^c f(T_t P) dt = \psi(P). \quad (14)$$

В предыдущем разделе получена система дифференциальных уравнений (6). Инвариант системы (10) может быть нормализован к единице преобразованием (4). Таким образом, динамика автономной системы осуществляется на поверхности n -мерной, здесь $n = 42$, единичной сферы, что и определяет применимость теоремы Биркгофа-Хинчина [12] к данному случаю. Следует подчеркнуть, что средняя величина квадратов амплитуд гармоники и субгармоники зависит от начальных условий для системы (11).

Численные результаты

Теорема Биркгофа-Хинчина [12] гарантирует нам существование средних по времени значений квадратов амплитуд гармоник и множества субгармоник. В данной статье представлены результаты численного определения этих величины с помощью спектральных характеристик волн Толлмина-Шлихтинга на профиле средней продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоях [15].

На рис. 1 представлена кривая 3-х волнового резонанса для $\mathbf{k}_0 = (2, 0)$, $\mathbf{k}_1 = (\alpha_1(\beta_1), \beta_1)$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$, $\text{Re}\delta = 10^4$. Кривая представляет решение системы уравнений $\omega(\mathbf{k}_0) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, для наименее затухающей моды волн Толлмина-Шлихтинга.

Рис. 1. Кривая 3-х волнового резонанса для наименее затухающей моды волн Т-Ш /

Fig. 1. Curve of three-wave resonance for the least damped mode of T-Sh waves.

Источник: по данным авторов.

Следует обратить внимание на то, что на рис. 1 по горизонтали отложены единицы, а по вертикали – сотни. Рис. 1 показывает, что с продольной волной Толлмина-Шлихтинга вступают в резонанс субгармоники с $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, которые имеют волновые вектора практически параллельные плоскости среднего течения, то есть волны с продольной завихрённостью.

В нашем исследовании нас интересуют начальные условия для системы уравнений (11). Эти условия задаются вектором на n -мерной ($n = 42$) единичной сфере. В реальности эти граничные условия сформировываются в нелинейной области перехода. Однако окончательные представления об этом процессе являются ещё предметом исследований [18; 19]. Далее, для упрощения задачи будем задавать эти условия точкой, взятой из множества точек статистически равномерно

распределённых на n -мерной ($n = 42$) единичной сфере. Для этого достаточно использовать гауссово распределение для каждой из координат вектора точки с последующей нормировкой этого вектора на единицу [20]. Мы можем найти средние значения квадратов их амплитуд за достаточно длительную реализацию во времени численно.

На рис. 2 представлены зависимости среднего квадрата модуля основной гармоники и двух амплитуд субгармоник множественного 3-х волнового резонанса, описываемого системой уравнений (11).

Рис. 2. Временные зависимости ($0 \leq t \leq 1000$) средних значений квадрата амплитуды основной гармоники $a_1(t)$, $\beta = 0$ и $a_{11}(t)$, $a_{21}(t)$ при $\beta = (21, 29, 40, 81)$ и двух субгармоник $a_{12}(t)$, $a_{22}(t)$, где $\beta = (-21, 29, -40, 81)$ / Fig. 2. Time dependences ($0 \leq t \leq 1000$) of the average values of the square of the amplitude of the fundamental harmonic $a_1(t)$, $\beta = 0$ and $a_{11}(t)$, $a_{21}(t)$ at $\beta = (21, 29, 40, 81)$, and two subharmonics $a_{12}(t)$, $a_{22}(t)$, где $\beta = (-21, 29, -40, 81)$.

Источник: по данным авторов.

На рис. 2 представлены типичные зависимости от времени амплитуды $a_1(t)$ основной гармоники при $\beta = 0$ и амплитуд двух субгармоник $a_{11}(t)$, $a_{21}(t)$ при $\beta = (21, 29, 40, 81)$, соответственно, из набора множественного 3-х волнового резонанса первой моды, где они изменяются со временем.

На рис. 3 можно видеть поведение $q_{12}^{(j)}(\beta)$ для множественного 3-х волнового резонанса, когда мы имеем точки, расположенные на кривой 3-х волнового резонанса, чтобы получить зависимость множителей $q_{12}^{(j)}$, $q_{13}^{(j)}$ от β . Таким образом, каждая точка на резонансной кривой соответствует значению волнового числа β . Как показано, значения $q_{12}^{(j)}$, представленные на рис. 3, и $q_{13}^{(j)}$ имеют одинаковое поведение.

Рис. 3. Зависимость значений множителей $q_{12}^{(j)}(\beta)$ для множества 3-х волнового резонанса от поперечной составляющей волнового вектора / Fig. 3. Dependence of the values of the factors $q_{12}^{(j)}(\beta)$ for a set of three-wave resonance on the transverse component of the wave vector.

Источник: по данным авторов.

На рис. 4 представлена совокупность векторов субгармоник в выражении (5) для $A_k^{c(0)}$, которая берётся по всем резонансным тройкам и симметричным к ним относительно горизонтальной оси.

Рис. 4. Совокупность волновых векторов множественного 3-х волнового резонанса / Fig. 4. Set of wave vectors of multiple three-wave resonance.

Источник: по данным авторов.

Выбор набора субгармоник производится из области положительной определённости множителей $q_{12}^{(j)}, q_{13}^{(j)}$ в зависимости от места нахождения субгармоники на резонансной кривой.

Система уравнений для множественного трёхволнового резонанса решалась численно. На рис. 5. представлен пример финитного детерминированного (при одинаковых начальных условиях решения совпадают) поведения гармоник в зависимости от времени в масштабе t_1 .

Рис. 5. Пример зависимости от времени действительной и мнимой части амплитуд основной гармоники $\beta = 0$ и двух субгармоник $\beta = (100, 1, -100, 1)$ из набора множественного 3-х волнового резонанса первой моды / Fig. 5. Example of the time dependence of the real and imaginary parts of the amplitudes of the fundamental harmonic $\beta = 0$ and two subharmonics $\beta = (100, 1, -100, 1)$ from a set of multiple three-wave resonance of the first mode.

Источник: по данным авторов.

На рис. 5 представлены типичные зависимости от времени амплитуды $a_1(t)$ основной гармоники ($\beta = 0$) и амплитуд субгармоник $a_{23}(t)$ при $\beta = 100, 1$ и $a_{25}(t)$ при $\beta = -100, 1$.

Система уравнений для множественного трёхволнового резонанса решается с помощью пакета МАТЕМАТИКА¹. На рис. 6 показана временная зависимость динамического инварианта формулы (12) от времени, который постоянен с очень большой точностью, полученная методом Рунге-Кутты с некоторым стохастически заданным набором начальных данных. Видно, что за очень большой промежуток времени ($0 \leq t \leq 1000$) инвариант меняется в шестом знаке.

¹ См.: Mathematica 5.0, User's Guide. Wolfram Research, 2003. 1301 p.

Рис. 6. Зависимость инварианта множественного 3-х волнового резонанса от времени. Метод Рунге-Кутты / Fig. 6. Time dependence of the invariant of multiple three-wave resonance. Runge-Kutta method.

Источник: по данным авторов.

На рис. 7 представлено сравнение для среднего квадрата модулей амплитуд гармоники и субгармоник по времени, и среднее по времени, усреднённое по репрезентативному набору начальных данных (100 точек), (обозначается пустыми и сплошными квадратами, соответственно). Средние значения по набору начальных данных незначительно отличаются от средних по времени для единичного начального значения системы (11).

Рис. 7. Сравнение среднего квадрата модулей амплитуд по времени и по репрезентативному набору начальных данных (100 точек) / Fig. 7. Comparison of the mean square of the moduli of the amplitudes over time and over a representative set of initial data (100 points).

Источник: по данным авторов.

Заключение

На основе известного из эксперимента профиля [14] средней продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоя проведён численный анализ уравнений для когерентной структуры. Получены дисперсионные характеристики волн Толлмина-Шлихтинга и матричные элементы в виде функций от компонентов волнового вектора. Кривая 3-х волнового резонанса представлена на рис. 1 и показывает, что в турбулентном пограничном слое вследствие наличия когерентной структуры появляются продольные вихри.

Когерентная составляющая представлена в виде дискретного множества волн, подверженных 3-х волновому резонансу, где амплитуды волн определяются системой дифференциальных уравнений (11). Кроме того, она содержит набор субгармоник, которые находятся в 3-х волновом резонансе с основной гармоникой, как показано на рис. 4. Эта система решается численно с высокой точностью с помощью метода Рунге-Кутты в пакете МАТЕМАТИКА¹ и приводится зависимость инварианта множественного 3-х волнового резонанса от времени, как показано на рис. 5. Вычисления показали, что исследуемая величина сохраняет своё значение на значительном интервале по времени. Весовые множители $q_{12}^{(j)}$, 1, 2, ... 5 для каждой тройки волн, рассчитанные отдельно, определяют поведение этих величин с поперечным волновым числом β , как показано на рис. 3. Множители $q_{12}^{(j)}$, 1, 2, ... 5, исследуются на положительность в зависимости от положения субгармоник на резонансной кривой. Найден интервал значений β , на котором весовые множители положительны.

Формула (12) нормируется к единице, и это позволяет опираться на теорему Биркгофа-Хинчина в смысле существования средних по времени квадратов амплитуд волн. Для сравнения приведены средние по времени, усреднённые по репрезентативному набору начальных данных (100 точек), как показано на рис. 7. Получена небольшая разница между средними значениями по набору начальных данных от средних по времени для единичного начального значения системы (11). Максимальное значение среднего значения квадрата амплитуд гармоник и субгармоник по 100 начальным данным имеет место при $\beta \approx 61$.

Статья поступила в редакцию 02.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kachanov Y. S. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annual Review of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 26. P. 411–482. DOI: 10.1146/annurev.fl.26.010194.002211.
2. Репик Е. У., Соседко Ю. П. Исследование прерывистой структуры течения в пристенной области турбулентного пограничного слоя // Турбулентные течения: сборник трудов / отв. ред. В. Б. Струминский. М.: Наука, 1974. С. 172–184.
3. Robinson S. K. Coherent motions in the turbulent boundary layer // Annual Review of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 23. P. 601–639. DOI: /10.1146/annurev.fl.23.010191.003125.

¹ См.: Mathematica 5.0, User's Guide. Wolfram Research, 2003. 1301 p.

4. Boiko A. V., Grek G. R., Dovgal' A. V., Kozlov V. V. *Vozniknovenie turbulentnosti v pristennykh techeniyakh* [The emergence of turbulence in near-wall flows]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1999. 328 p.
5. Организованные структуры в турбулентных течениях. Анализ экспериментальных работ по турбулентному пограничному слою: монография / Белоцерковский О. М., Хлопков Ю. И., Жаров В. А., Горелов С. Л., Хлопков А. Ю. М.: МФТИ, 2009. 302 с.
6. Benney D. J., Gustavsson H. L. A new mechanism for linear and nonlinear hydrodynamic instability // *Studies in Applied Mathematics*. 1981. Vol. 64. P. 185–209. DOI: 10.1002/sapm1981643185.
7. Жаров В. А. Вариант описания слабонелинейной динамики волнового пакета в пограничном слое на пластине в несжимаемой жидкости // *Труды ЦАГИ*. 1993б. Вып. 2523. С. 17–28.
8. Жаров В. А. О волновой теории развитого турбулентного пограничного слоя // *Ученые записки ЦАГИ*. 1986. Т. 17. № 5. С. 28–38.
9. Lipatov I. I., Tugazakov R. Ya. Mechanism of Transverse Structure Formation in Supersonic Flow Past a Body // *Fluid Dynamics*. 2014. Vol. 49. No. 5. P. 681–687. DOI: 10.1134/S0015462814050159.
10. Lipatov I. I., Tugazakov R. Ya. Influence of spatial effects on coherent structures formation in a supersonic flow near a plate // *Progress in Flight Physics*. 2017. Vol. 9. P. 423–434. DOI: 10.1051/eucass/2016090423.
11. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: «ФАКТОРИАЛ», 1999. 768 с.
12. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М: Наука, 1985. 470 с.
13. Zharov V. A. Waveguide model of coherent structures in the developed turbulent boundary layer // *Proceeding of 14th European Turbulence Conference (1–4 September, 2013, Lyon, France)* [Электронный ресурс]. URL: http://etc14.ens-lyon.fr/openconf/modules/request.php?module=oc_proceedings&action=view.php&a=Poster&id=28 (дата обращения: 20.09.2020).
14. Musker A. J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer // *AIAA Journal*. 1979. Vol. 17. No. 6. P. 655–657. DOI: 10.2514/3.61193.
15. Селим Р. С. Собственные моды уравнения Орра-Зоммерфельда в развитом турбулентном пограничном слое // *Труды МАИ (сетевое научное издание)*. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111352> (дата обращения: 30.08.2020). DOI: 10.34759/trd-2019-109-5.
16. Landahl M. T. A wave-guide model for turbulent shear flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 29. Iss. 3. P. 441–459. DOI: 10.1017/S0022112067000953.
17. Davidson R. C. *Method in nonlinear plasma theory*. New York, London: Academic Press, 1972. 356 p.
18. Pushpender K. S., Tapan K. S. Effect of frequency and wave number on the three-dimensional routes of transition by wall excitation // *Physics of Fluids*. 2019. Vol. 31. Iss. 6. P. 64–107. DOI: 10.1063/1.5097272
19. Zhang W., Liu P., Guo H. Conditional Sampling and Wavelet Analysis in Early Stage of Step-Generated Transition // *AIAA Journal*. 2018. Vol. 56. No. 6. P. 2471–2477. DOI: 10.2514/1.j056800.
20. Хлопков Ю. И., Горелов С. Л. Приложение методов статистического моделирования (Монте-Карло): учебное пособие. М.: МФТИ, 1994. 103 с.

REFERENCES

1. Kachanov Y. S. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1994, vol. 26, pp. 411–482. DOI: 10.1146/annurev.fl.26.010194.002211.
2. Repik E. U., Sosedko Yu. P. [Study of the discontinuous flow structure in the near-wall region of a turbulent boundary layer]. In: Struminsky V. V., chief ed. *Turbulentnye techeniya* [Turbulent flows]. Moscow, Nauka Publ., 1974, pp. 172–184.
3. Robinson S. K. Coherent motions in the turbulent boundary layer. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 23, pp. 601–639. DOI: /10.1146/annurev.fl.23.010191.003125.
4. Boiko A. V., Grek G. R., Dovgal' A. V., Kozlov V. V. *Vozniknovenie turbulentnosti v pristennykh techeniyakh* [The emergence of turbulence in near-wall flows]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1999. 328 p.
5. Belotserkovskii O. M., Khlopkov Yu. I., Zharov V. A., Gorelov S. L., Khlopkov A. Yu. *Organizovannyye struktury v turbulentnykh techeniyakh. Analiz eksperimental'nykh rabot po turbulentnomu pogranichnomu sloyu* [Organized structures in turbulent flows. Analysis of experimental work on a turbulent boundary layer]. Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology Publ., 2009. 302 p.
6. Benney D. J., Gustavsson H. L. A new mechanism for linear and nonlinear hydrodynamic instability. In: *Studies in Applied Mathematics*, 1981, vol. 64, pp. 185–209. DOI: 10.1002/sapm1981643185.
7. Zharov V. A. [A variant of describing the weakly nonlinear dynamics of a wave packet in a boundary layer on a plate in an incompressible fluid]. In: *Trudy TSAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1993b, no. 2523, pp. 17–28.
8. Zharov V. A. [On the wave theory of a developed turbulent boundary layer]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [TsAGI scientific notes], 1986, vol. 17, no. 5, pp. 28–38.
9. Lipatov I. I., Tugazakov R. Ya. Mechanism of Transverse Structure Formation in Supersonic Flow Past a Body. In: *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 681–687. DOI: 10.1134/S0015462814050159.
10. Lipatov I. I., Tugazakov R. Ya. Influence of spatial effects on coherent structures formation in a supersonic flow near a plate. In: *Progress in Flight Physics*, 2017, vol. 9, pp. 423–434. DOI: 10.1051/eucass/2016090423.
11. Katok A. B., Khasselblat B. *Vvedenie v sovremennuyu teoriyu dinamicheskikh sistem* [Introduction to modern theory of dynamical systems]. Moscow, FAKTORIAL Publ., 1999. 768 p.
12. Kolmogorov A. N. *Izbrannyye trudy. Matematika i mekhanika* [Selected Works. Mathematics and Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 470 p.
13. Zharov V. A. Waveguide model of coherent structures in the developed turbulent boundary layer. In: *Proceeding of 14th European Turbulence Conference (1–4 September, 2013, Lyon, France)*. Available at: http://etc14.ens-lyon.fr/openconf/modules/request.php?module=oc_proceedings&action=view.php&a=Poster&id=28 (accessed: 20.09.2020).
14. Musker A. J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer. In: *AIAA Journal*, 1979, vol. 17, no. 6, pp. 655–657. DOI: 10.2514/3.61193.
15. Selim R. S. [Eigenmodes of the Orr–Sommerfeld equation in the developed turbulent boundary layer]. In: *Trudy MAI (setevoe nauchnoe izdanie)* [Electronic journal “Trudy MAI”], 2019, no. 109. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111352> (accessed: 30.08.2020). DOI: 10.34759/trd-2019-109-5.
16. Landahl M. T. A wave-guide model for turbulent shear flow. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 29, iss. 3, pp. 441–459. DOI: 10.1017/S0022112067000953.

17. Davidson R. C. Method in nonlinear plasma theory. New York, London, Academic Press Publ., 1972. 356 p.
18. Pushpender K. S., Tapan K. S. Effect of frequency and wave number on the three-dimensional routes of transition by wall excitation. In: *Physics of Fluids*, 2019, vol. 31, iss. 6, pp. 64–107. DOI: 10.1063/1.5097272.
19. Zhang W., Liu P., Guo H. Conditional Sampling and Wavelet Analysis in Early Stage of Step-Generated Transition. In: *AIAA Journal*, 2018, vol. 56, no. 6, pp. 2471–2477. DOI: 10.2514/1.J056800.
20. Khlopkov Yu. I., Gorelov S. L. *Prilozhenie metodov statisticheskogo modelirovaniya (Monte-Karlo)* [Application of Statistical Modeling Methods (Monte Carlo)]. Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology Publ., 1994. 103 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Жаров Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, НИО-8, Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: v_zharov@mail.ru;

Липатов Игорь Иванович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор кафедры теоретической и прикладной аэрогидромеханики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета); начальник отдела, НИО-8, Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: igor_lipatov@mail.ru;

Селим Рами Салах Сабер – аспирант кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: selim.rs@phystech.edu

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir A. Zharov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, RSD-8, Central Aerohydrodynamic Institute;
E-mail: v_zharov@mail.ru;

Igor I. Lipatov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Prof., Department of Theoretical and Applied Aerohydromechanics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University); Head of Department, RSD-8, Central Aerohydrodynamic Institute;
e-mail: igor_lipatov@mail.ru;

Ramy Salah Saber Selim – postgraduate student, Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University);
e-mail: selim.rs@phystech.edu

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Жаров В. А., Липатов И. И., Селим Р. С. Спектральные характеристики течения несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. №4. С. 12–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-12-27

FOR CITATION

Zharov V. A., Lipatov I. I., Selim R. S. Spectral characteristics of an incompressible fluid flow in turbulent boundary layers. In: *Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics*, 2020, no. 4, pp. 12–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-12-27