УДК 533.72:535.3:539.1

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-49-65

ПРОВОДИМОСТЬ ТОНКОГО СЛОЯ МЕТАЛЛА С УЧЁТОМ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ЗЕРКАЛЬНОСТИ ОТ УГЛА ПАДЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА ПОВЕРХНОСТЬ

Каримов Ф. А., Юшканов А. А.

Московский государственный областной университет

141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель: проанализировать зависимость электрической проводимости тонкой металлической плёнки от характера зависимости коэффициента зеркальности от угла падения электронов на поверхность металла. Рассмотрена зависимость коэффициента зеркальности от угла падения, удовлетворяющая условию Андреева.

Процедура и методы. Рассмотрена модель граничных условий, учитывающая зависимость коэффициента зеркальности от угла падения электронов на поверхность металла.

Результаты. Рассмотренная модель граничных условий в предельных случаях переходит в граничное условие Фукса и в граничное условие Соффера. Кроме того, рассмотренное граничное условие, в отличие от граничных условий Фукса и Соффера, удовлетворяет критерию Андреева при почти касательном падении электронов на поверхность металла.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты могут найти применение при рассмотрении взаимодействия электромагнитного излучения с тонкой металлической плёнкой, в проволоках, в мелких металлических частицах и при описании скин-эффекта в металле

Ключевые слова: электрическое поле, граничные условия, коэффициент зеркальности, угол падения, кинетическое уравнение, скин-эффект

Благодарности. Выражаем благодарность за полезные рекомендации доценту кафедры теоретической физики МГОУ, кандидату физико-математических наук Камалову Тимур Фяновичу.

CONDUCTIVITY OF A THIN METAL LAYER TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE OF THE SPECULARITY COEFFICIENT ON THE ANGLE OF THE ELECTRON'S INCIDENCE ON THE SURFACE

F. Karimov, A. Yushkanov

Moscow Region State University

ul. Very Voloshinoy 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract

The aim of this work is to analyze the dependence of the electrical conductivity of a thin metal film on the nature of the dependence of the specular coefficient on the angle of incidence of electrons on the metal surface. The dependence of the specular coefficient on the angle of incidence is considered, satisfying the Andreev condition.

Methodology. A model boundary condition is considered, taking into account the dependence of the specular coefficient on the angle of incidence of electrons on the metal surface.

Results. The considered model of the boundary conditions in the limiting cases transforms into the Fuchs boundary condition and into the Soffer boundary condition. In addition, the considered boundary condition, in contrast to the Fuchs and Soffer boundary conditions, satisfies the Andreev criterion for an almost tangential incidence of electrons on the metal surface.

Research implications. The results obtained can find application in the study of the interaction of electromagnetic radiation with a thin metal film, wires, in small metal particles and in describing the skin effect in a metal.

Keywords: electric field, boundary conditions, specular coefficient, angle of incidence, kinetic equation, skin effect.

Acknowledgments. We are grateful to Timur Fyfanovich Kamalov [Cand. Sci. (Phys-Math.), Assoc. Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University] for useful recommendations.

Введение

Задача об электрической проводимости тонкой металлической плёнки имеет большое прикладное и теоретическое значение. Этой задаче посвящено большое число работ. Для тонких плёнок определяющее влияние на электрическую проводимость оказывают граничные условия при взаимодействии электронов с поверхностью металла. В большей части работ используются зеркально-диффузные граничные условия Фукса [9]. Предполагается, что q -я часть электронов, падающих на поверхность металла, отражается зеркально, а остальные – диффузно. При этом считается, что коэффициент зеркальности q не зависит от угла падения электронов на поверхность.

В такой постановке рассматривалась задача об электрической проводимости металлической плёнки в целом ряде работ. Обзор ранних работ можно найти в [10]. Отметим также работы [3; 7; 8; 14]. В последней из указанных работ рассмотрено влияние несферичности поверхности Ферми на электрическую проводимость металлической плёнки.

На самом деле коэффициент зеркальности q должен зависеть от угла падения электронов на поверхность металла. Вид такой зависимости был предложен на основе модельных представлений о поверхности металла в работе [11].

Модель Соффера была использована в работе [4] для расчёта электрической проводимости тонкой проволоки.

В работе Андреева [9] было доказано, что в пределе $\theta \rightarrow \pi/2$, где θ – угол между нормалью к поверхности и направлением движения электрона коэффициент зеркальности должен вести себя как:

$$q(\theta) \approx 1 - A |\cos \theta|. \quad (1)$$

В то же время модель Соффера в аналогичной ситуации предсказывает зависимость:

$$q(\theta) \approx 1 - B \cos^2 \theta. \quad (2)$$

Здесь величины A и B зависят от свойств поверхности.

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что модель Соффера неверно описывает зависимость коэффициента зеркальности q от угла падения при почти касательном падении электрона на поверхность.

В нашей работе будет рассмотрена модель граничных условий, которая экстраполирует модели Фукса и Соффера. При этом она удовлетворяет условию Андреева (1).

Постановка задачи и основные уравнения

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений релаксационного типа для электронов имеет следующий вид [1; 6; 10]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{eq} - f), \quad (3)$$

где f_{eq} – равновесное распределение Ферми в твердотельной плазме

$$f_{eq} = \left[1 + \exp \frac{\varepsilon - \mu}{k_B T} \right]^{-1}.$$

Здесь ε – энергия электронов, μ – химический потенциал, T – температура, k_B – постоянная Больцмана, e_0 – заряд электрона. Величина $\nu = 1/\tau$ – частота столкновений электронов, τ – среднее время между двумя последовательными столкновениями электрона. В [12] проведён анализ величины τ для различных материалов.

Будем предполагать, что распределение электронов можно считать сферически-симметричным. В этом случае для энергии электронов ε_0 имеем:

$$\varepsilon_0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Здесь m – эффективная масса электрона.

Будем считать электрическое поле достаточно слабым, чтобы была возможна линеаризация. Скин-эффектом будем пренебрегать. То есть будем предполагать, что глубина скин-слоя превышает ширину плёнки. При этом локально равновесная функция распределения f_{eq} принимает вид:

$$f_{eq} = f_0, \quad f_0 = \left[1 + \exp \frac{\varepsilon - \mu}{k_B T} \right]^{-1}.$$

В линейном случае слагаемое с электрическим полем в (1.2) [12] можно записать в виде:

$$e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial p} \simeq e_0 \mathbf{E} \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что толщина плёнки равна a . Рассмотрим декартову систему координат с центром на нижней поверхности плёнки. Направим ось x перпендикулярно поверхности плёнки вглубь металла. Ось y направим вдоль направления электрического поля, тогда электрическое поле будет иметь только y компоненту, и можно записать:

$$E_y = E_0 e^{-i\omega t}.$$

Линеаризованная функция распределения имеет вид [1]:

$$f = f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \psi e^{-i\omega t}. \quad (5)$$

Здесь ω – частота поля, t – время.

Рассмотрим случай вырожденного Ферми-газа электронов в металле:

$$f_0 = \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon),$$

где $\Theta(x)$ – функция Хэвисайда $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F), \quad f = f_0 + \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \psi e^{-i\omega t}. \quad (6)$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, ε_F – энергия Ферми.

Линеаризованное уравнение для функции ψ может быть записано в следующем виде [10]:

$$-i\omega\psi + v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - e_0 v_y E_0 = -v\psi. \quad (7)$$

Рассмотрим граничные условия на поверхности плёнки. Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \psi^+(x, v_x) &= \psi(x, v_x), & v_x > 0, \\ \psi^-(x, v_x) &= \psi(x, v_x), & v_x < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим граничные условия на поверхности плёнки. С учётом обозначений (8) они имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi^+(0, v_x) &= q(\theta) \psi^-(0, -v_x), \\ \psi^-(a, v_x) &= q(\theta) \psi^+(a, -v_x). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь θ – угол между направлением движения электрона и осью x .

Решение задачи о проводимости тонкой металлической плёнки

Решая линеаризованное кинетическое уравнение, получаем:

$$\begin{aligned}\psi^+ &= \frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + \psi_1^+ \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} x\right), \\ \psi^- &= \frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + \psi_1^- \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} (x - a)\right).\end{aligned}\quad (10)$$

При этом ψ_1^+ , ψ_1^- – новые неизвестные функции, не зависящие от координаты x , определяемые из граничных условий.

Подставим функции ψ^+ , ψ^- в граничные условия. В результате получаем:

$$\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + \psi_1^+ = q(\theta) \frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + q(\theta) \psi_1^- (-v_x) \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} a\right), \quad v_x > 0,$$

$$\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + \psi_1^- = q(\theta) \frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + q(\theta) \psi_1^+ (-v_x) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right), \quad v_x < 0.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + \psi_1^+ &= q(\theta) \frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + q(\theta) \left(-\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + q(\theta) \frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \psi_1^+ q(\theta) \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} a\right) \right) \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} a\right), \quad v_x > 0, \\ \left(1 - q^2(\theta) \exp\left(2 \frac{i\omega - v}{v_x} a\right) \right) \psi_1^+ &= -\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} \left(1 - q(\theta) + q(\theta) \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} a\right) - \right. \\ &\quad \left. - q^2(\theta) \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} a\right) \right).\end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\psi_1^+ = -\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} \frac{(1 - q(\theta)) \left(1 + q(\theta) \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} a\right) \right)}{\left(1 - q^2(\theta) \exp\left(2 \frac{i\omega - v}{v_x} a\right) \right)}.$$

Упрощая это выражение, получаем:

$$\psi_1^+ = -\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} \frac{1 - q(\theta)}{1 - q(\theta) \exp\left(\frac{i\omega - v}{v_x} a\right)}. \quad (11)$$

Для функции ψ_1^- получаем:

$$\begin{aligned} \psi_1^- &= -\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} + q(\theta) \frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} - \left(\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} \frac{1 - q(\theta)}{1 - q(\theta) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right)} \right) \times \\ &\quad q(\theta) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right) \\ \psi_1^- &= -\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} \left(1 - q(\theta) + \left(\frac{1 - q(\theta)}{1 - q(\theta) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. q(\theta) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right) \right). \\ \psi_1^- &= -\frac{E_0 e_0 v_y (1 - q(\theta))}{v - i\omega} \left(1 + \frac{q(\theta) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right)}{1 - q(\theta) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right)} \right). \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$\psi_1^- = -\frac{E_0 e_0 v_y}{v - i\omega} \frac{1 - q(\theta)}{1 - q(\theta) \exp\left(-\frac{i\omega - v}{v_x} a\right)}. \quad (12)$$

Отметим, что имеет место соотношение:

$$\psi_1^-(v_x) = \psi_1^+(-v_x).$$

Введём сферическую систему координат в пространстве скоростей:

$$v_x = v_F \cos(\theta), \quad v_y = v_F \sin(\theta) \cos \varphi, \quad \cos(\theta) = v_x / v_F. \quad (13)$$

Тогда решение кинетического уравнения переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_1^+ &= \frac{E_0 e_0 a v_y}{v - i\omega} + \psi_1^+ \exp\left(-\frac{v - i\omega}{v_x} x\right). \\ \psi_1^- &= \frac{E_0 e_0 a v_y}{v - i\omega} + \psi_1^- \exp\left(-\frac{v - i\omega}{v_x} (x - a)\right). \end{aligned}$$

Введём безразмерную величину $z_0 = a(v - i\omega)/v_F$. Или $z_0 = x_0 + iy_0$, где $x_0 = av/v_F$, $y_0 = a\omega/v_F$. Через x_0 обозначена безразмерная частота столкновений электронов, а через y_0 – безразмерная частота поля.

Тогда выражения для ψ^+ , ψ^- примут следующий вид:

$$\psi^+ = \frac{E_0 e_0 a \sin(\theta) \cos \varphi}{z_0 v_F} \times \left(1 - \frac{1 - q(\theta)}{1 - q(\theta) \exp\left(-\frac{z_0 x v_F}{av_x \cos(\theta)}\right)} \exp\left(-\frac{z_0 x v_F}{av_x \cos(\theta)}\right) \right),$$

$$\psi^- = \frac{E_0 e_0 a \sin(\theta) \cos \varphi}{z_0 v_F} \times \left(1 - \frac{1 - q(\theta)}{q(\theta) \exp\left(\frac{z_0 v_F}{v_x \cos(\theta)}\right)} \exp\left(-\frac{z_0 (x - a) v_F}{av_x \cos(\theta)}\right) \right). \quad (14)$$

Для учёта зависимости коэффициента зеркальности q от угла падения θ электронов на поверхность Соффер предложил следующую модель:

$$q(\theta) = \exp\left(-\left(4\pi H\right)^2 \cos^2 \theta\right). \quad (15)$$

Здесь через H обозначена среднеквадратичная высота рельефа поверхности. При $\theta \rightarrow \pi/2$ мы из этой формулы получаем:

$$q(\theta) \simeq 1 - (4\pi H)^2 \cos^2 \theta, \quad (16)$$

что противоречит условию Андреева (1).

Через A обозначается некоторая постоянная, зависящая от свойств поверхности.

Таким образом, наблюдается противоречие между моделью Соффера (15) и условием Андреева [2]. Поэтому модель Соффера (2) нуждается в существенной доработке.

Нами предложено следующее модельное соотношение для коэффициента зеркальности, учитывающее зависимость коэффициента зеркальности от угла падения электрона θ на поверхность металла, то есть $v = v_F \cos \theta$:

$$q(\theta) = q_0 + (1 - q_0) \exp\left(-b_1 |\cos \theta| - b_2 |\cos^2 \theta|\right). \quad (17)$$

Здесь коэффициенты $q_0 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ – величины, зависящие от свойств поверхности металла. В данном подходе они рассматриваются как эмпирические величины. Отметим, что в данном подходе имеем:

$$q(\theta) \rightarrow q(\cos(\theta)).$$

При $b_1 \gg 1$, $b_2 \gg 1$ почти при всех углах падения θ имеем $q(\theta) = q_0$. Таким образом, в этом пределе коэффициент зеркальности не зависит от угла падения

электронов на поверхность металла, и граничное условие переходит в граничное условие Фукса (рис. 1).

Рис. 1. Зависимость коэффициента зеркальности q от угла падения θ электрона на поверхность и переход в граничное условие Фукса / Fig. 1. Dependence of the specularity coefficient q on the angle of incidence θ of the electron on the surface and the transition to the Fuchs boundary condition.

Источник: подготовлено авторами с помощью математического приложения Mathcad.

Для всех кривых $b_1 = 1$, $q_0 = 0,5$. Для кривой 1 величина $b_2 = 10$, для кривой 2 величина $b_2 = 5$, для кривой 3 величина $b_2 = 2$, для кривой 4 величина $b_2 = 0$.

Рассмотрим другой случай. Пусть в некотором диапазоне углов θ $b_1 |\cos\theta| \ll b_2 \cos^2\theta$ $b_2 \cos^2\theta \ll 1$. Тогда рассматриваемое граничное условие принимает вид, показанный на рис. 2:

Рис. 2. Модель Соффера при $\theta \rightarrow \pi/2$ с коэффициентом зеркальности $q \rightarrow 1$ / Fig. 2 Soffer's model at $\theta \rightarrow \pi/2$ with a specular coefficient $q \rightarrow 1$.

Источник: подготовлено авторами с помощью математического приложения Mathcad.

Кривая 1 соответствует значению параметра $b_2 = 10$, кривая 2 соответствует $b_2 = 5$, кривая 3 соответствует $b_2 = 2$, кривая 4 соответствует $b_2 = 0$. Во всех случаях $b_1 = 3$, $q_0 = 0,5$.

$$q(\theta) \approx 1 - b_2(1 - q_0)\cos^2 \theta.$$

Это соотношение соответствует модели Соффера (16) при

$$b_2(1 - q_0) = (4\pi H)^2.$$

Из рис. 1 и 2 видно, что при $\theta \rightarrow \pi/2$ коэффициент зеркальности стремится к 1. В то же время для случая падения электронов в направлениях, близких к нормальному, коэффициент зеркальности перестаёт зависеть от угла θ .

Таким образом, рассматриваемая модель является экстраполяцией моделей граничных условий Фукса и Соффера.

При этом при $\theta \rightarrow \pi/2$ справедливо соотношение:

$$q \approx 1 - b_1(1 - q_0)|\cos \theta|.$$

Это соответствует условию Андреева [2].

Для плотности тока $\mathbf{j}$ справедливо выражение [1]:

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Направление вектора $\mathbf{j}$ совпадает с направлением электрического поля $\mathbf{E}$. В линейном приближении мы получаем следующий результат:

$$j_y = e_0 e^{-i\omega t} \int v_y \delta(\epsilon - \epsilon_F) \psi \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Подставляем в это соотношение явное выражение для функции ψ . В результате получаем:

$$j_y = j_v + j^+ + j^-. \quad (18)$$

Здесь величины j_v, j^+, j^- определены следующим образом:

$$j_v = e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} \int \frac{v_y^2 \delta(\epsilon - \epsilon_F)}{(\nu - i\omega)} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$j^+ = e_0 e^{-i\omega t} \int_{v_x > 0} \delta(\epsilon - \epsilon_F) v_y \psi_1^+ \exp\left(-\frac{z_0 v_F x}{(\nu - i\omega)}\right) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$j^- = e_0 e^{-i\omega t} \int_{v_x < 0} \delta(\epsilon - \epsilon_F) v_y \psi_1^- \exp\left(-\frac{z_0 v_F (x - a)}{a \nu \cos(\theta)}\right) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Величина j_v не зависит от коэффициента зеркальности и описывает объёмную проводимость. Величины j^+ и j^- описывают влияние поверхности на электрическую проводимость плёнки.

Учитывая, что $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, и переходя в сферическую систему координат в пространстве скоростей, получаем:

$$j_v = 2e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} \frac{am^3}{z_0 v_F (2\pi\hbar)^3} \int_{v=0}^{v=\infty} dv \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi v^4 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi \delta(\varepsilon - \varepsilon_F),$$

$$j^+ = -\frac{2e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} am^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_{v=0}^{v=\infty} dv \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \times$$

$$\times v^4 \frac{\sin^3(\theta) \cos^2 \varphi (1 - q \cos(\theta))}{z_0 v_F \left(1 - q \cos(\theta) \exp\left(-\frac{z_0 v_F}{v_x \cos \theta}\right) \right)} \exp\left(-\frac{z_0 v_F x}{av \cos(\theta)}\right),$$

$$j^- = -\frac{2e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} am^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_{v=0}^{v=\infty} dv \int_{\pi/2}^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \times$$

$$\times v^4 \frac{\sin^3(\theta) \cos^2 \varphi (1 - q \cos(\theta))}{z_0 v_F \left(1 - q \cos(\theta) \exp\left(\frac{z_0 v_F}{v_x q \cos \theta}\right) \right)} \exp\left(-\frac{z_0 v_F (x-a)}{av \cos(\theta)}\right).$$

Выражение $\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon_F) = \delta\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_F^2}{2}\right) = \frac{2}{m} \delta((v - v_F)(v + v_F)) = \frac{1}{mv_F} \delta(v - v_F).$$

Здесь $v_F = \sqrt{2\varepsilon_F / m}$ – скорость электронов на поверхности Ферми.

Сделаем следующую замену: $t = \cos \theta$. Вычисление по углу φ выполняется тривиально. В результате получаем:

$$j_v = 2e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} \frac{\pi am^2}{v_F^2 z_0 (2\pi\hbar)^3} \int_{v=0}^{v=\infty} dv \int_{-1}^1 dt v^4 (1 - t^2) \delta(v - v_F),$$

$$j^+ = -\frac{2\pi e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} am^2}{v_F^2 z_0 (2\pi\hbar)^3} \int_{v=0}^{v=\infty} dv \int_0^1 dt \times$$

$$\times \delta(v - v_F) v^4 \frac{(1 - t^2)(1 - q(t))}{z_0 v_F \left(1 - q(t) \exp\left(-\frac{z_0 v_F}{v_x \cos \theta}\right) \right)} \exp\left(-\frac{z_0 v_F x}{avt}\right).$$

$$j^- = -\frac{2\pi e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} a m^2}{v_F^2 z_0 (2\pi\hbar)^3} \int_{v=0}^{v=\infty} dv \int_{-1}^0 dt \times \\ \times \delta(v - v_F) v^4 \frac{(1-t^2)(1-q(t))}{z_0 v_F \left(1 - q(t) \exp\left(\frac{z_0 v_F}{v_x t}\right)\right)} \exp\left(-\frac{z_0 v_F (x-a)}{avt}\right).$$

Проведём вычисление интеграла по переменной v . В результате получаем:

$$j_v = 2e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} \frac{\pi v_F^2 a m^2}{z_0 (2\pi\hbar)^3} \int_{-1}^1 (1-t^2) dt, \\ j^+ = -\frac{2\pi v_F^2 e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} a m^2}{z_0 (2\pi\hbar)^3} \int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-q(t))}{\left(1 - q(t) \exp\left(-\frac{z_0}{t}\right)\right)} \exp\left(-\frac{z_0 x}{at}\right) dt, \\ j^- = -\frac{2\pi v_F^2 e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} a m^2}{z_0 (2\pi\hbar)^3} \int_{-1}^0 \frac{(1-t^2)(1-q(t))}{\left(1 - q(t) \exp\left(\frac{z_0}{t}\right)\right)} \exp\left(-\frac{z_0 (x-a)}{at}\right) dt.$$

Величина j_0 вычисляется в явном виде:

$$j_v = e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} \frac{8\pi v_F^2 a m^2}{3z_0 (2\pi\hbar)^3}.$$

Равновесная концентрация электронов n находится по следующей формуле:

$$n = \int f_0 \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Проводя соответствующие вычисления, получаем:

$$n = \frac{8\pi (mv_F)^3}{3z_0 (2\pi\hbar)^3}. \quad (19)$$

С учётом этого соотношения выражение для j_0 принимает следующий вид:

$$j_0 = e_0^2 E_0 e^{-i\omega t} \frac{a}{mv_F z_0}.$$

Проводимость определяется соотношением:

$$\sigma = \frac{j_y}{E_y} = \frac{j_y}{E_0 e^{-i\omega t}}. \quad (20)$$

Поэтому для объёмной проводимости σ_v справедливо следующее равенство:

$$\sigma_v = \frac{8\pi v_F^2 e_0^2 a m^2}{3z_0 (2\pi\hbar)^3}.$$

С учётом соотношения (19) для концентрации электронов n (19) получаем:

$$\sigma_v = \frac{ne_0^2 a}{z_0 m v_F}.$$

Переходя от безразмерной величины z_0 к размерным переменным, получаем:

$$\sigma_v = \frac{ne_0^2}{(\nu - i\omega)m}. \quad (21)$$

Это классическое выражение для объёмной проводимости металла. Рассмотрим случай статической объёмной проводимости σ_0 , когда $\omega = 0$.

$$\sigma_0 = \frac{ne_0^2}{\nu m} = \frac{ne_0^2 \tau}{m}. \quad (22)$$

Здесь $\tau = 1/\nu$ – время релаксации.

Рассмотрим среднее значение тока по сечению плёнки $\bar{j}_y$:

$$\bar{j}_y = \frac{\int_0^a j_y}{a}. \quad (23)$$

Ток, проходящий через слой плёнки шириной L (и толщиной a), равен:

$$I = La\bar{j}_y.$$

Величину $\bar{j}_y$ можно разбить на три составляющих:

$$\bar{j}_y = \bar{j}_y + \bar{j}^+ + \bar{j}^-. \quad (24)$$

Усреднённую проводимость плёнки определим следующим образом:

$$\bar{\sigma} = \frac{I}{La} = \frac{\bar{j}_y}{E_y}. \quad (25)$$

Усреднённую проводимость плёнки $\bar{\sigma}$ можно тоже разбить на три составляющих:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_v + \bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}^-. \quad (26)$$

Ясно, что $\bar{\sigma}_v = \sigma_v$.

Представим $\bar{\sigma}$ в виде $\bar{\sigma} = \sigma_0 \Sigma$. При этом с учётом (26) имеем:

$$\Sigma = \Sigma_v + \Sigma^+ + \Sigma^-. \quad (27)$$

Величина Σ_v равна:

$$\Sigma_v = \frac{1}{1 - i\omega / v}. \quad (28)$$

Рассмотрим величины Σ^+ и Σ^- . Они имеют вид:

$$\Sigma^+ = -\frac{3v}{4z_0 v_F} \int_0^a dx \int_0^1 \frac{(1-t^2)(1-q(t))}{\left(1-q(t)\exp\left(-\frac{z_0}{t}\right)\right)} \exp\left(-\frac{z_0 x}{at}\right) dt,$$

$$\Sigma^- = -\frac{3v}{4z_0 v_F} \int_0^a dx \int_{-1}^0 \frac{(1-t^2)(1-q(t))\exp\left(-\frac{z_0(x-a)}{at}\right)}{\left(1-q(t)\exp\left(\frac{z_0}{t}\right)\right)} dt.$$

Произведём интегрирование по переменной x . В результате получаем:

$$\Sigma^+ = -\frac{3va}{4z_0 v_F} \int_0^1 \frac{t(1-t^2)(1-q(t))\left(1-\exp\left(-\frac{z_0}{t}\right)\right)}{1-q(t)\exp\left(-\frac{z_0}{t}\right)} dt,$$

$$\Sigma^- = \frac{3va}{4z_0 v_F} \int_{-1}^0 \frac{t(1-t^2)(1-q(t))\left(1-\exp\left(\frac{z_0}{t}\right)\right)}{1-q(t)\exp\left(\frac{z_0}{t}\right)} dt. \quad (29)$$

Проведём в интеграле Σ^- замену $t' = -t$. В результате получим:

$$\Sigma^- = \Sigma^+.$$

Выражение для Σ приобретает следующий вид:

$$\Sigma = \Sigma_v + 2\Sigma^+.$$

Кроме того, $\frac{av}{v_F} = x_0$. Поэтому выражение для Σ можно переписать в виде:

$$\Sigma = \frac{x_0}{z_0} - \frac{3x_0}{2z_0^2} \int_0^1 \frac{t(1-t^2)(1-q(t))\left(1-\exp\left(-\frac{z_0}{t}\right)\right)}{1-q(t)\exp\left(-\frac{z_0}{t}\right)} dt. \quad (30)$$

Заключение

В настоящей работе рассмотрено влияние зависимости величины коэффициента зеркальности при отражении электронов от поверхности металла от угла

падения электронов на поверхность на проводимость тонких металлических плёнок. Рассмотрено модельное граничное условие, учитывающее зависимость коэффициента зеркальности от угла падения электронов на поверхность металла. Показано, что в предельных случаях это граничное условие переходит в граничное условие Фукса и в граничное условие Соффера. Кроме того, рассмотренное граничное условие, в отличие от граничных условий Фукса и Соффера, удовлетворяет критерию Андреева при почти касательном падении электронов на поверхность металла.

Рис. 3. График зависимости мнимой части безразмерной проводимости от безразмерной объёмной частоты рассеяния электронов при ненулевой частоте электрического поля / Fig. 3. Dependence of the imaginary part of the dimensionless conductivity on the dimensionless volume frequency of electron scattering at a nonzero electric field frequency.

Источник: подготовлено авторами с помощью математического приложения Mathcad.

На графике зависимости мнимой части безразмерной проводимости от безразмерной объёмной частоты рассеяния электронов при ненулевой частоте электрического поля (рис. 3) для всех кривых $q_0 = 0,1$ и безразмерная частота поля $y_0 = 0,3$. Кривая 1 соответствует параметрам $b_1 = b_2 = 0,1$. Кривая 2 соответствует параметрам $b_1 = b_2 = 0,5$. Кривая 3 соответствует параметрам $b_1 = b_2 = 3$.

Полученные результаты могут найти применение при рассмотрении взаимодействия электромагнитного излучения с тонкой металлической плёнкой [5; 13].

Статья поступила в редакцию 09.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А. Основы теории металла. М.: Наука, 1977. 520 с.
2. Андреев А. Ф. Взаимодействие проводящих электронов с поверхностью металла // Успехи физических наук. 1971. Т. 105. № 1. С. 114–124. DOI: 10.3367/UFNr.0105.197109d.0113.
3. Кузнецова И. А., Романов Д. Н., Юшканов А. А. Расчёт высокочастотной электропроводности тонкого металлического слоя в случае эллипсоидальной поверхности Ферми // Микроэлектроника. 2018. Т. 47. № 3. С. 226–237. DOI: 10.7868/S0544126918030079.

4. Кузнецова И. А., Савенко О. В. Юшканов А. А. Влияние граничных условий на электропроводность тонкой цилиндрической проволоки // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 2. С. 126–134. DOI: 10.7868/S0544126916020071.
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Взаимодействие электромагнитной Н-волны с тонкой металлической пленкой // Микроэлектроника. 2012. Т. 41. № 1. С. 30–35.
6. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Физматлит. 2001. 536 с.
7. Уткин А. И., Завитаев Э. В., Юшканов А. А. Расчёт электрической проводимости тонкого металлического слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2016. № 9. С. 85–91. DOI: 10.7868/S0207352816090158.
8. Уткин А. И., Юшканов А. А. Влияние коэффициентов зеркальности на проводимость тонкого металлического слоя в случае неоднородного, периодического по времени электрического поля // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 5. С. 386–395. DOI: 10.7868/S0544126916050100.
9. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1938. Vol. 34. Iss. 1. P. 100–108. DOI: 10.1017/S0305004100019952.
10. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals // Advances in Physics. 2001. Vol. 50. Iss. 6. P. 499–537. DOI: 10.1080/00018730110102187.
11. Soffer S. B. Statistical Model for the Size Effect in Electrical Conduction // Journal of Applied Physics. 1967. Vol. 38. Iss. 4. P. 1710–1715. DOI: 10.1063/1.1709746.
12. Gall D. Electron mean free path in elemental metals // Journal of Applied Physics. 2016. Vol. 119. P. 085101. DOI: 10.1063/1.4942216.
13. Jones W. E., Kliewer K. L., Fuchs R. Nonlocal theory of the optical properties of thin metallic films // Physical Review. 1969. Vol. 178. Iss. 3. P. 1201–1203. DOI: 10.1103/PHYSREV.178.1201.
14. Electron scattering at surfaces and grain boundaries in Cu thin films and wires / Chawla J. S., Gstrein F., O'Brien K. P., Clarke J. S., Gall D. // Physical Review B. 2011. Vol. 84. Iss. 23. P. 235423-1-235423-10. DOI: 10.1103/PHYSREVB.84.235423.

REFERENCES

1. Abrikosov A. A. *Osnovy teorii metalla* [Fundamentals of the theory of metals]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 520 p.
2. Andreev A. F. [Interaction of conducting electrons with a metal surface]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Soviet Physics Uspekhi], 1971, vol. 105, no. 1, pp. 114–124. DOI: 10.3367/UFNr.0105.197109d.0113.
3. Kuznetsova I. A., Romanov D. N., Yushkanov A. A. [Calculating the high-frequency electrical conductivity of a thin metallic layer for an ellipsoidal Fermi surface]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2018, vol. 47, no. 3, pp. 226–237. DOI: 10.7868/S0544126918030079.
4. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Yushkanov A. A. [The influence of boundary conditions on the electrical conductivity of a thin cylindrical wire]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016, vol. 45, no. 2, pp. 126–134. DOI: 10.7868/S0544126916020071.
5. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Interaction of an electromagnetic H-wave with a thin metal film]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2012, vol. 41, no. 1, pp. 30–35.
6. Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Fizicheskaya kinetika* [Physical kinetics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 536 p.

7. Utkin A. I., Zavitaev E. V., Yushkanov A. A. [Calculation of Electrical Conductivity of Thin Metal Layer with Different Surface Specularity Coefficients]. In: *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnye i neitronnye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2016, no. 9, pp. 85–91. DOI: 10.7868/S0207352816090158.
8. Utkin A. I., Yushkanov A. A. [Effect of the reflection coefficients on the conductivity of a thin metal layer in the case of an inhomogeneous time-periodic electric field]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016, vol. 45, no. 5, pp. 386–395. DOI: 10.7868/S0544126916050100.
9. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1938, vol. 34, iss. 1, pp. 100–108. DOI: 10.1017/S0305004100019952.
10. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals. In: *Advances in Physics*, 2001, vol. 50, iss. 6, pp. 499–537. DOI: 10.1080/00018730110102187.
11. Soffer S. B. Statistical model for the size effect in electrical conduction. In: *Journal of Applied Physics*, 1967, vol. 38, iss. 4, pp. 1710–1715. DOI: 10.1063/1.1709746.
12. Gall D. Electron mean free path in elemental metals. In: *Journal of Applied Physics*, 2016, vol. 119, pp. 085101. DOI: 10.1063/1.4942216.
13. Jones W. E., Kliewer K. L., Fuchs R. Nonlocal theory of the optical properties of thin metallic films. In: *Physical Review*, 1969, vol. 178, iss. 3, pp. 1201–1203. DOI: 10.1103/PHYSREV.178.1201.
14. Chawla J. S., Gstrein F., O'Brien K. P., Clarke J. S., Gall D. Electron scattering at surfaces and grain boundaries in Cu thin films and wires. In: *Physical Review B*, 2011, vol. 84, iss. 23, pp. 235423-1-235423-10. DOI: 10.1103/PHYSREVB.84.235423.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Каримов Фахриддин Ахмаджонович – аспирант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: faha_rtsu_2003@mail.ru;

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Fakhriddin A. Karimov – postgraduate student, Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: faha_rtsu_2003@mail.ru;

Alexander A. Yushkanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University
e-mail: yushkanov@inbox.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Каримов Ф. А., Юшканов А. А. Проводимость тонкого слоя металла с учётом зависимости коэффициента зеркальности от угла падения электронов на поверхность // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 4. С. 49–65.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-49-65

FOR CITATION

Karimov F. A., Yushkanov A. A. Conductivity of a thin metal layer taking into account the dependence of the mirror coefficient on the angle of the electron's incidence on the surface. In: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics, 2020, no. 4, pp. 49–65.

DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-49-65