МАТЕМАТИКА

УДК 514.75+512.54
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-6-16

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОЕКТИВНО ПЛОСКИХ МНОГООБРАЗИЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Матвеев О. А., Марченко Т. А., Мельник О. С.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель работы состоит в уточнении свойств параллельных переносов многообразий аффинной связности размерности больше чем два, таких, что для любых, достаточно близких, трёх точек существует содержащее их двумерное автопараллельное многообразие.

Методы исследования. Для описания свойств некоторых классов пространств аффинной связности привлекаются методы дифференцируемых универсальных алгебр.

Результаты. Доказано, что в классе проективно плоских многообразий аффинной связности выполняется тождество псевдолинейности, отражающее свойства параллельных переносов. Выводится дифференциально-геометрическая характеристика тождества псевдолинейности, то есть, если размерность носителя больше, чем два, то это тождество равносильно тому, что соответствующее многообразие аффинной связности проективно плоское и имеет общую псевдосвязность (одинаковый параллелизм направлений) с многообразием аффинной связности без кручения.

Теоретическая и практическая значимость. Дифференциальная геометрия имеет многочисленные приложения в теоретической механике, в специальной и общей теориях относительности и других областях естествознания. Настоящее исследование, в частности, может быть использовано для построения конкретной математической модели, описывающей протекание, например, физических процессов.

Ключевые слова: проективно плоские многообразия аффинной связности, тензоры кривизны и кручения, параллельные переносы, геодезическая лупа

ON SOME PROPERTIES OF PROJECTIVE FLAT MANIFOLDS WITH AFFINE CONNECTION

O. Matveyev, T. Marchenko, O. Melnik
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract
Aim. We refine the properties of parallel translations of manifolds with affine connection of dimension greater than two, such that for any three points that are sufficiently close, there exists a two-dimensional autoparallel manifold containing them.
Methodology. We use the methods of differentiable universal algebras to describe the properties of certain classes of affine-connected spaces.
Results. We prove that in this class of projective flat manifolds with affine connection, the "pseudoline" identity is fulfilled, reflecting the properties of parallel translations. The differential-geometric characteristic of a "pseudoline" identity is derived, that is, if the dimension of the manifold is more than two, then the "pseudoline" identity is equivalent to the fact that the corresponding manifolds of affine connection are projective flat and have a common pseudo-connection (the same concurrency) with the manifold of affine connection with zero torsion.
Research implications. Differential geometry has numerous applications in theoretical mechanics, Special and General relativity theory, and other fields of natural sciences. This research can be employed to build a specific mathematical model describing the course of physical processes.
Keywords: projective flat manifolds with affine connection, curvature and torsion tensors, parallel translations, geodesic loop

Введение

В XXI веке мы ушли далеко вперёд в развитии от синтетического метода в геометрии, идущего от Междуречья, древней цивилизации Египта, древнегреческой философско-математической школы, а также и от первоначальных конструкций аналитического подхода Эпохи Возрождения, (когда Европа очнулась от тяжёлого сна Средневековья), связанных с рождением аналитической, проективной, начертательной геометрии.

Безусловно ясно, что математика в целом едина, и грубое разделение: геометрия, алгебра, математический анализ – условно. Однако при решении новых проблем, возникающих перед сообществом учёных важно понимать, какие ветви математики в первую очередь образуют фундамент новых теорий.

В XX веке мы ясно осознали, как геометрические методы оказывают мощное влияние на другие разделы математики. Например, построение теории пространств обобщённых функций в школе выдающегося советского математика академика Соболева привело фактически к революционным прогрессивным переменам в области уравнений математической физики. С другой стороны, применение мощного потенциала современной алгебры привело к кардинальным изменениям в развитии, в первую очередь, дифференциальной геометрии. Один из возможных алгебраических подходов к геометрии и общей теории относительности получил яркое воплощение в платформе, созданной в школе профессора Л. В. Сабинина (смотри, например, [7]). Основной идеей является систематическое применение дифференцируемых неассоциативных универсальных алгебр, таких, например, как квазигруппа, лупа в решении актуальных проблем геометрии и физики. Безусловно, здесь первоначальной точкой отсчёта является теория групп и алгебр Ли, которая получает очень перспективное обобщение. Некоторые промежуточные итоги этого направления подведены в работе [8]. Импульс, началом которого явилась Россия, немедленно нашёл приложение в Японии, Германии, Латинской Америке, в Соединённых штатах Америки. Тематика актуальна.

В нашем веке, когда теория категорий вошла в повседневную жизнь, изучение различных пространств проводится сравнением по некоторым признакам с другими близкими пространствами, которые более глубоко исследованы. В хороших случаях одно пространство допускает некоторый морфизм на другое. Этот метод используется в работах [5; 6]. Одним из простейших, но важным в приложениях, является классическое геодезическое отображение, которое рассматривается, например, в работах [1; 2; 3; 7]. В настоящей работе мы приводим скромный эскиз к внушительной красивой картине построенного теоретического здания, которое всё-таки требует косметических улучшений.

Тождество псевдолинейности в многообразиях аффинной связности

Определение 1. Будем говорить, что в гладком многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности, если существуют гладкие локальные функции $\varphi : M\times M\times M \to \mathbb{R}$, $\Psi : M\times M\times M \to \mathbb{R}$ такие, что локально имеет место тождество:

$$L_x^y z = \left[\varphi\left(y,x,z\right)\right]_y x_y^+\left[\Psi\left(y,x,z\right)\right]_y z, \tag{1}$$

где $L_x^y z = \mathrm{Exp}_x \tau_x^y\left(\left(\mathrm{Exp}_y\right)^{-1} z\right)$, $\tau_x^y : T_y\left(M\right) \to T_x\left(M\right)$ – параллельный перенос касательных векторов вдоль отрезка геодезической линии, соединяющего точки y и x, T_y-пространство касательных векторов, выходящих из точки y, Exp – экспоненциальное отображение),

$$x_y^+ z = L_x^y z = \mathrm{Exp}_y\left(\left(\mathrm{Exp}_y\right)^{-1} x + \left(\mathrm{Exp}_y\right)^{-1} z\right),$$

$$t \cdot y = \mathrm{Exp}\ \left(t\left(\mathrm{Exp}\ \right)^{-1} y\right).$$

Лемма 1. Если в многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности, то существуют гладкие функции $\overline{\varphi} : M\times M\times M \to \mathbb{R}, \overline{\Psi} : M\times M\times M \to \mathbb{R}$ такие, что выполняется тождество:

$$\left(L_x^y\right)^{-1} z = \left[\overline{\varphi}\left(y,x,z\right)\right]_y x \overset{+}{_y} \left[\overline{\Psi}\left(y,x,z\right)\right]_y z. \qquad (2)$$

Доказательство. Применяя тождество (1) к очевидному равенству:

$$L_x^y \left(L_x^y\right)^{-1} z = z,$$

имеем:

$$\left[\varphi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]_y x \overset{+}{_y} \left[\Psi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]_y \left(L_x^y\right)^{-1} z = z.$$

Из этого соотношения следует тождество (2), если обозначить:

$$\overline{\varphi}\left(y,x,z\right) = -\varphi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\left[\Psi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]^{-1},$$

$$\overline{\Psi}\left(y,x,z\right) = \left[\Psi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]^{-1}$$

Лемма 2. Если в гладком многообразии аффинной связности выполняется тождество псевдолинейности, то существуют такие гладкие локальные функции $\alpha: M\times M\times M \to \mathbb{R}$, $\beta: M\times M\times M \to \mathbb{R}$, $\gamma: M\times M\times M \to \mathbb{R}$, что выполняется тождество:

$$h^y\left(x,z\right) w = \left[\alpha\left(y,x,z,w\right)\right]_y x \overset{+}{_y} \left[\beta\left(y,x,z,w\right)\right]_y z \overset{+}{_y} \left[\gamma\left(y,x,z,w\right)\right]_y w, \qquad (3)$$

где $h^y\left(x,z\right) = L_y^z L_z^x L_x^y$ – преобразование элементарной голономии.

Лемма 3. Если в гладком многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности, то для любых достаточно близких четырёх точек x, y, z, w, принадлежащих двумерному подмногообразию в M, существуют такие гладкие локальные функции $\overline{\alpha}: M\times M\times M\times M \to \mathbb{R}$, $\overline{\beta}: M\times M\times M\times M \to \mathbb{R}$, $\overline{\gamma}: M\times M\times M\times M \to \mathbb{R}$, что выполняется тождество:

$$L_x^w z = \left[\overline{\alpha}\left(y,x,z,w\right)\right]_y x \overset{+}{_y} \left[\overline{\beta}\left(y,x,z,w\right)\right]_y z \overset{+}{_y} \left[\overline{\gamma}\left(y,x,z,w\right)\right]_y w. \qquad (4)$$

Замечание. Тождество (4) естественно назвать обобщённым тождеством псевдолинейности.

Дифференциально-геометрическая характеристика тождества псевдолинейности

Предложение 1. Пусть в C^k – гладком ($k \geq 3$) многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности. Тогда в нормальных координатах с центром в точке y –компоненты Кристоффеля второго рода аффинной связности ∇ имеют вид:

$$\Gamma^i_{jk}(w) = \lambda_j(w)\delta^i_k + \mu_k(w)\delta^i_j + \nu_{jk}(w)w^i. \qquad (5)$$

Доказательство. Согласно формуле, приведённой, например, в работах [4; 5] имеем:

$$\Gamma^i_{jk}(w) = -\left.\frac{\partial^2\left[L^w_x z\right]^i}{\partial x^j \partial z^k}\right|_{x=z=w}. \qquad (6)$$

Согласно тождеству (4) в нормальных координатах с центром в точке y, получаем:

$$\left[L^w_x z\right]^i = \bar{\alpha}(y,x,z,w)x^i + \bar{\beta}(y,x,z,w)z^i + \bar{\gamma}(y,x,z,w)w^i. \qquad (7)$$

Подставляя выражение (7) в соотношение (6) и последовательно проводя дифференцирование, получаем формулу (5).

Предложение 2. Для того, чтобы в гладком многообразии аффинной связности (M, ∇) выполнялось тождество псевдолинейности (1) необходимо и достаточно, чтобы для любых достаточно близких трёх точек в M существовало содержащее их двумерное автопараллельное подмногообразие.

Предложение 3. Пусть C^k – гладкое ($k \geq 3$) многообразие аффинной связности (M, ∇) размерности больше, чем два, такое, что выполняется тождество псевдолинейности. Тогда тензоры кручения и кривизны многообразия аффинной связности имеют вид:

$$T(X,Y) = P(Y)\cdot X - P(X)\cdot Y. \qquad (8)$$

$$R(X,Y)Z = Q(X,Z)\cdot Y - Q(Y,Z)\cdot X + A(X,Y)\cdot Z, \qquad (9)$$

где P, Q, A – дифференциальные, соответственно, 1 и 2 – формы, причём:

$$A(X,Y) = -A(Y,X). \qquad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим нормальную систему координат с центром в точке y. Тогда по Предложению 1 имеем:

$$T^i_{jk}(y) = \Gamma^i_{jk}(y) - \Gamma^i_{kj}(y) = \lambda_i(y)\delta^i_k + \mu_k(y)\delta^i_j - \lambda_k(y)\delta^i_j - \mu_j(y)\delta^i_k =$$
$$= \left[\lambda_i(y) - \mu_j(y)\right]\delta^i_k - \left[\lambda_k(y) - \mu_k(y)\right]\delta^i_j.$$

И, следовательно, имеет место формула (8). Для того, чтобы вывести формулу (9), воспользуемся соотношением, доказанным в работе [2], согласно которому:

$$R^i_{jk,l}(y) = 2\left.\frac{\partial\left[h^y(x,z)w\right]^i}{\partial x^j \partial z^k \partial w^l}\right|_{x=z=w=y}. \qquad (11)$$

По Лемме 2 имеем:

$$\left[h^y(x,z)w\right]^i = \alpha(y,x,z,w)x^i + \beta(y,x,z,w)z^i + \gamma(y,x,z,w)w^i.$$

Последовательно три раза дифференцируя обе части этого равенства, получаем:

$$\left.\frac{\partial\left[h^y(x,z)w\right]^i}{\partial x^j}\right|_{x=y} = \tilde{\alpha}(y,z,w)\delta^i_j + \widetilde{\beta_j}(y,z,w)z^i + \tilde{\gamma}_j(y,z,w)w^i$$

$$\left.\frac{\partial^2\left[h^y(x,z)w\right]^i}{\partial z^k \partial x^j}\right|_{x=z=y} = \overline{\alpha}_k(y,w)\delta^i_j + \overline{\beta_j}(y,w)\delta^i_k + \overline{\gamma}_{jk}(y,w)w^i$$

$$\left.\frac{\partial^3\left[h^y(x,z)w\right]^i}{\partial w^l \partial z^k \partial x^j}\right|_{x=z=w=y} = \overline{\overline{\alpha}}_{kl}(y)\delta^i_j + \overline{\overline{\beta}}_{jl}(y)\delta^i_k + \overline{\overline{\gamma}}_{jk}(y)\delta^i_l.$$

Таким образом, для тензора кривизны получаем выражение:

$$R^i_{jk,l} = \alpha_{kl}\delta^i_j + \beta_{jl}\delta^i_k + \gamma_{jk}\delta^i_l. \qquad (12)$$

Так как тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам:

$$R^i_{jk,l} = -R^i_{kj,l}, \qquad (13)$$

то, подставляя выражение (12) в тождество (13), получаем:

$$\alpha_{kl}\delta^i_j + \beta_{jl}\delta^i_k + \gamma_{jk}\delta^i_l = -\alpha_{jl}\delta^i_k - \beta_{kl}\delta^i_j - \gamma_{kj}\delta^i_l. \qquad (14)$$

В силу того, что размерность многообразия M больше двух, то из (14) следует $\alpha_{kl} = -\beta_{kl}$ и $\gamma_{kj} = -\gamma_{jk}$, то есть справедливы соотношения (9) и (10). Доказательство закончено.

Непосредственным следствием Предложения (3) является следующее предложение.

Предложение 4. Если в гладком ($k \geq 3$) многообразии аффинной связности выполняется тождество псевдолинейности, то оно имеет общую псевдосвязность с многообразием аффинной связности без кручения.

Предложение 5. Если C^k – гладкие пространства аффинной связности (M, ∇) и $(M,\overline{\nabla})$ имеют общую псевдосвязность и в (M, ∇) выполняется тождество псевдосвязности, тогда и в $(M,\overline{\nabla})$ также выполняется тождество псевдолинейности.

Предложение 6. Пусть C^k – гладкое ($k > 5$) многообразие аффинной связности (M, ∇) размерности больше чем два имеет нулевое кручение и в нём выполняется тождество псевдолинейности. Тогда многообразие аффинной связности (M, ∇) – проективно плоское.

Доказательство. Используя предложение (3), подставим выражение (9) для тензора кривизны в тождестве Риччи:

$$R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X=0.$$

Получим:

$$\begin{gathered}Q(X,Z)Y-Q(Y,Z)X+A(X,Y)Z+\\+Q(Z,Y)X-Q(X,Y)Z+A(Z,X)Y+\\+Q(Y,X)Z-Q(Z,X)Y+A(Y,Z)X,\end{gathered}$$

или, приводя подобные члены:

$$\begin{gathered}\left[Q(Z,Y)-Q(Y,Z)+A(Y,Z)\right]X+\left[Q(X,Z)-Q(Z,X)+A(Z,X)\right]Y+\\+\left[Q(Y,X)-Q(X,Y)+A(X,Y)\right]Z=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Так как размерность носителя больше, чем два, то из (15) следует:

$$A(X,Y)=Q(X,Y)-Q(Y,X).\tag{16}$$

Итак, получаем следующее выражение для тензора кривизны:

$$R(X,Y)Z=Q(X,Z)Y-Q(Y,Z)X+\left[Q(X,Y)-Q(Y,X)\right]Z.\tag{17}$$

Следовательно, многообразие аффинной связности (M,∇) – проективно плоское.

Предложение 7. Пусть C^k – гладкое ($k>5$) многообразие аффинной связности (M,∇) имеет размерность больше чем два, и выполняется тождество псевдолинейности. Тогда многообразие аффинной связности (M,∇) – проективно плоское и имеет общую псевдосвязность (одинаковый параллелизм направлений) с некотором многообразием аффинной связности без кручения.

Предложение 8. Пусть C^k – гладкое ($k>5$) многообразие аффинной связности (M,∇) – проективно плоское и имеет общую псевдосвязность с многообразием аффинной связности $\left(\bar{M},\bar{\nabla}\right)$ без кручения. Тогда в многообразии аффинной связности (M,∇) выполняется тождество псевдолинейности.

Объединяя предложения (7) и (8), приходим к следующей дифференциально-геометрической характеристике тождества псевдолинейности.

Предложение 9. В C^k – гладком ($k>5$) многообразии аффинной связности (M,∇) размерности больше чем два выполняется тождество псевдолинейности тогда и только тогда, когда (M,∇) проективно плоское и имеет общую псевдосвязность с многообразием аффинной связности с нулевым тензором кручения.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть (M,∇) – C^k – гладкое ($k>5$) многообразие аффинной связности размерности больше чем два. Тогда следующие три условия равносильны:

1) в (M,∇) – локально выполняется тождество псевдолинейности;

2) (M, ∇) – проективно плоское и имеет общую псевдосвязность (одинаковый параллелизм направлений) с многообразием аффинной связности с нулевым тензором кручения;

3) для любых достаточно близких трёх точек в (M, ∇) существует содержащее их двумерное автопараллельное подмногообразие.

Замечание: в любом двумерном многообразии аффинной связности локально выполняется тождество псевдолинейности.

Пример многообразия аффинной связности с тождеством псевдолинейности.

Рассмотрим трёхмерное линейное пространство $\boldsymbol{R}^3$ с аффинной связностью, определяемой следующей формулой:

$$\nabla_X Y = \omega(X)\cdot Y - \omega(Y)\cdot X, \tag{18}$$

где ω – дифференциальная 1-форма на $\boldsymbol{R}^3$. В локальных координатах имеем:

$$\Gamma^i_{jk} = \omega_j \delta^i_k - \omega_k \delta^i_j, \tag{19}$$

где $\left\{\Gamma^i_{jk}\right\}$ – компоненты Кристоффеля 2-го рода.

(Здесь по правилу А. Эйнштейна производится суммирование по «слепым» индексам, если один и тот же индекс записан внизу и вверху). Для упрощения считаем, что все ω_j, $j = 1, 2, 3$, постоянные числа.

Компоненты тензора кручения и кривизны в локальных координатах имеют вид:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 2\left(\omega_j \delta^i_k - \omega_k \delta^i_j\right), \tag{20}$$

$$R^i_{ke,j} = \partial_k \Gamma^i_{ej} - \partial_e \Gamma^i_{kj} + \Gamma^m_{ej}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{em} = \omega_j\left(\omega_e \delta^i_k - \omega_k \delta^i_e\right). \tag{21}$$

Для любых двух несовпадающих точек $a(a^1, a^2, a^3)$ и $b(b^1, b^2, b^3)$ из $\boldsymbol{R}^3$ существует единственная геодезическая линия, проходящая через эти точки a и b:

$$t_a b = \mathrm{Exp}_a\left(t\left(\mathrm{Exp}_a\right)^{-1} b\right) = t_e a \overset{+}{_e} \left(1-t\right)_e b = \mathcal{L}^e_{t_e a}\left(1-t\right)_e b,$$

где $\mathcal{L}^e_a b = \mathrm{Exp}_e\left(\left(\mathrm{Exp}\right)^{-1}_e a + \left(\mathrm{Exp}\right)^{-1}_e b\right)$, t – аффинный (канонический) параметр вдоль геодезической.

Пусть точка e – начало нормальной системы координат в $\boldsymbol{R}^3$, и имеет нулевые координаты $e(0, 0, 0)$. Для упрощения записи нижний индекс e в формулах опускаем, окончательно имеем:

$$\left(t_a b\right)^i = ta^i + \left(1-t\right)b^i, \tag{23}$$

$$(L^e_a b)^i = \left(\omega_j b^j + 1\right)a^i + \left(1 - \omega_j a^j\right)b^i, \tag{24}$$

$$(L^c_a b)^i = \left(\omega_j\left(b-c\right)^j + 1\right)a^i + \left(1 - \omega_j\left(a-c\right)^j\right)b^i + \\ + \left(\omega_j\left(a^j - b^j\right) - 1\right)c^i. \tag{25}$$

В рассматриваемом пространстве аффинной связности все геодезические лупы изоморфны.

Заключение

При решении многих отдельных задач естествознания важно понимать, в каком геометрическом пространстве строится математическая модель того, или иного явления. Часто геометрическая составляющая конкретной ситуации остаётся «за кадром», понимается интуитивно, многозначно, что, естественно, приводит к разночтениям.

Простейшим с геометрической точки зрения является локально плоское многообразие аффинной связности, поэтому естественно в первую очередь, рассмотреть пространства, попадающие с ними в один геодезический класс, содержащий, в частности, эллиптические (сферические), гиперболические (геометрия Н. И. Лобаческого) пространства. Таким образом, доказанная теорема имеет место в проективно плоских пространствах нулевого кручения, в классических пространствах постоянной кривизны и в некоторых других более сложных многообразиях аффинной связности.

Статья поступила в редакцию 22.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко Т. А., Матвеев О. А., Птицына И. В. Локальная проективно плоская модель сферы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 6–13. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13.
2. Матвеев О. А., Марченко Т. А. О преобразовании голономии в пространствах аффинной связности [Электронный ресурс] // Актуальные проблемы математики, физики и математического образования: сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии. М.: ИИУ МГОУ, 2019. С. 56–58. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
3. Матвеев О. А., Мельник О. С., Марченко Т. А. К алгебраической теории геодезических отображений многообразий аффинной связности [Электронный ресурс] // Актуальные проблемы математики, физики и математического образования: сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии. Вып. 3: Научные исследования в начале III тысячелетия. М.: ИИУ МГОУ, 2020. С. 17–28. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
4. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Germany: Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 с.
5. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.
6. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces // Non-Associative Algebra and Its Applications / edited by L. Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov. Boca Raton, London, New York: Taylor and Francis Group, Chapman and Hall/CRC, 2006. P. 253–260 (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).
7. Sabinin L. Loop-theoretic foundations of Differential Geometry and Relativity. // Webs and Quasigroups. Tver: Tver University Press, 2002. P. 67–72 (English).

8. Non-Associative Algebra and Its Applications / edited by L. Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov. Boca Raton, London, New York: Taylor and Francis Group, Chapman and Hall/CRC, 2006. 516 p. (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).

REFERENCES

1. Marchenko T. A., Matveev O. A., Ptitsyna I. V. [The local projective flat model of the sphere]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2017, no. 4, pp. 6–13. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13.
2. Matveev O. A., Marchenko T. A. [On transformation of holonomy in spaces of affine connection]. In: *Aktual'nye problemy matematiki, fiziki i matematicheskogo obrazovaniya: sbornik trudov kafedry matematicheskogo analiza i geometrii* [Actual problems of mathematics, physics and mathematical education: collection of works of the Department of Mathematical Analysis and Geometry]. Moscow, MRSU Ed. Office Publ., 2019, pp. 56–58. 1 CD-ROM.
3. Matveev O. A., Mel'nik O. S., Marchenko T. A. [algebraic theory of geodesic mappings of manifolds with affine connection]. *In: Aktual'nye problemy matematiki, fiziki i matematicheskogo obrazovaniya: sbornik trudov kafedry matematicheskogo analiza i geometrii. Vyp. 3: Nauchnye issledovaniya v nachale III tysyacheletiya* [Actual problems of mathematics, physics and mathematical education: collection of works of the Department of Mathematical Analysis and Geometry. Issue 3: Scientific research at the beginning of the III millennium]. Moscow, MRSU Ed. Office Publ., 2020, pp. 17–28. 1 CD-ROM.
4. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim* [Algebraic theory of spaces close to symmetric]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing Publ., 2012. 125 p.
5. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim* [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric]. Moscow, Moscow Region State Unversity Publ., 2012. 132 p.
6. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces. In: Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I., eds. *Non-Associative Algebra and Its Applications*. Boca Raton, London, New York, Taylor and Francis Group Publ., Chapman and Hall/CRC Publ., 2006, pp. 253–260 (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).
7. Sabinin L. Loop-theoretic foundations of Differential Geometry and Relativity. In: *Webs and Quasigroups*. Tver, Tver University Press, 2002, pp. 67–72 (English).
8. Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I., eds. *Non-Associative Algebra and Its Applications*. Boca Raton, London, New York, Taylor and Francis Group Publ., Chapman and Hall/CRC Publ., 2006. 516 p. (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Марченко Татьяна Андреевна – магистрант физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Мельник Ольга Сергеевна – магистрант физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: mospretty@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg A. Matveyev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Tatyana A. Marchenko – Master's Degree Student, Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Olya S. Melnik – Master's Degree Student, Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: mospretty@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Матвеев О. А., Марченко Т. А., Мельник О. С. О некоторых свойствах проективно плоских многообразий аффинной связности. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 1. С. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-6-16

FOR CITATION

Matveyev O. A., Marchenko T. A., Melnik O. S. On some properties of projective flat manifolds with affine connection. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-6-16