УДК: 533.2, 51-72

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-39-53

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТОЧНОЙ СХОДИМОСТИ ЯВНОГО МЕТОДА МАК-КОРМАКА, ПРИМЕНЁННОГО К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННОГО АЭРОЗОЛЯ, ВЫЗВАННОГО ДВИЖЕНИЕМ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Тукмаков Д. А.

*Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр
Российской академии наук»*

420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31, Российская Федерация

Аннотация

Цель данной работы заключается в исследовании сеточной сходимости явного метода Мак-Кормака, применённого к решению уравнений континуальной математической модели динамики электрически заряженного аэрозоля.

Процедура и методы. В данной работе для описания течения аэрозоля применена континуальная модель движения неоднородной среды, предполагающая, что движение каждой из компонент смеси описывается полной системой уравнений динамики сплошной среды.

Результаты. Проведены численные расчёты на последовательности измельчающихся конечно-разностных сеток. Отличия в вычисленных решениях уменьшаются по мере измельчения разбиения расчётной области.

Теоретическая и/или практическая значимость. Результаты расчётов демонстрируют сходимость явного метода Мак-Кормака при моделировании течения двухкомпонентной смеси, вызванного движением дисперсной компоненты. Также численное моделирование выявило, что в процессе движения дисперсной фазы на динамику смеси влияет как величина силы Кулона, так и на межкомпонентное взаимодействие.

Ключевые слова: явная конечно-разностная схема; континуальная модель; многофазные среды; межкомпонентное взаимодействие; газовзвеси

INVESTIGATION OF THE GRID CONVERGENCE OF THE EXPLICIT MAC-CORMACK METHOD APPLIED TO SIMULATION OF ELECTRICALLY CHARGED AEROSOL FLOW CAUSED BY THE MOTION OF DISPERSED PARTICLES UNDER THE ACTION OF INTERNAL ELECTRIC ELECTRICITY

D. Tukmakov

*Federal Research Center "Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
ul. Lobachevskogo 2/31, 420111 Kazan, Russian Federation*

Abstract

Aim. We study the grid convergence of the explicit MacCormack method applied to solving the equations of a heterogeneous mathematical model of the dynamics of an electrically charged aerosol.

Methodology. The flow of aerosol is described by using a continuous model of the motion of an inhomogeneous medium, which assumes that the motion of each of the mixture components is described by a complete system of equations for the dynamics of a continuous medium.

Results. Numerical calculations are carried out on a sequence of refining finite-difference grids. Differences in the calculated solutions decrease as the partition of the computational domain becomes smaller.

Research implications. The calculation results demonstrate the convergence of the explicit MacCormack method in modeling the flow of a two-component mixture caused by the movement of the dispersed component. Also, numerical modeling revealed that during the movement of the dispersed phase, the dynamics of the mixture is influenced by both the magnitude of the Coulomb force and the inter-component interaction.

Keywords: explicit finite difference scheme, continual model, multiphase media, inter-component interaction, gas suspension.

Введение

Одним из развивающихся разделов механики сплошных сред является механика неоднородных сред [1–12]. В связи со сложностью экспериментального исследования существенное значение в изучении течений неоднородных сред имеет математическое моделирование. При этом из-за нелинейного характера уравнений математических моделей динамики неоднородных сред для решения уравнений используются численные алгоритмы. В монографии [1] выведены основные уравнения механики неоднородных сплошных сред. Монографии [2; 3] посвящены моделированию течений газокапельных и запылённых сред. Для описания динамики неоднородных сред существует несколько подходов. Широко распространён подход моделирования динамики неоднородных смесей, в рамках которого математическая модель предполагает, что все компоненты смеси движутся с одинаковой скоростью [1; 4; 11]. Также распространён подход в моделировании неоднородных сред, предполагающий расчёт полей скоростей только для несущей среды, при этом динамика дисперсной компоненты описывается уравнениями диффузии с конвективными слагаемыми, вычисленными при решении уравнений динамики несущей компоненты [5; 12].

В ряде случаев расчёт динамики смеси предполагает моделирование изменения динамических параметров дисперсной компоненты при стационарном распределении скорости несущей среды [6–8]. Объектом исследований являются также электрически заряженные запылённые среды [7–9], частным случаем которых можно считать низкотемпературную пылевую плазму. При изучении таких сред моделируются не только газодинамические, но и электрические поля. Континуальные математические модели динамики неоднородных сред [1–3; 10; 13] позволяют моделировать течения смесей, в которых массовые доли компонент являются величинами одного порядка. Как правило, данные модели применяются к исследованию течений многофазных сред – сред, в которых компоненты имеют различное агрегатное состояние: аэрозоли, суспензии, пенные среды [1; 2]. За счёт учёта межкомпонентного взаимодействия такие модели позволяют исследовать динамические процессы в многофазных средах, воз-

никающие вследствие движения дисперсной компоненты, например, течение жидкости, возникающее при осаждении суспензии [10]. В данной работе исследуется сеточная сходимость явного конечно-разностного метода Мак-Кормака при моделировании процесса генерации течения газа, вызванного движением электрически заряженной дисперсной компоненты. Математическая модель реализует методологию моделирования течений неоднородных сред, в рамках которой для каждой из компонент смеси решается полная гидродинамическая система уравнений динамики, а также учитывается взаимодействие компонент смеси. Представленная в работе математическая модель позволяет описывать электрическое поле, формируемое электрически заряженными твёрдыми частицами аэрозоля. Целью работы было исследование сходимости явного метода Мак-Кормака при решении уравнений континуальной математической модели аэрозоля. Также в работе выявлены возможности применения модели к исследованию эффектов взаимообратного влияния компонент смеси на общую динамику многофазной среды (аэрозоля).

Математическая модель

Для описания движения неоднородной среды применяется система уравнений динамики многоскоростной и многотемпературной газовой смеси со скоростным скольжением фаз и межфазным теплообменом. Одним из наиболее важных параметров дисперсной компоненты многофазной смеси является «средняя плотность», представляющая собой произведение объёмного содержания дисперсной компоненты на физическую плотность материала дисперсной фазы [1–3]. Физическая плотность материала дисперсных включений в процессе течения многофазной среды не изменяется. При этом объёмное содержание является функцией временной и пространственных переменных. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа [14–19] с учётом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [2]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla (\rho_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_1 V_1^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho_1 V_1^k V_1^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) = -F_k + \alpha \nabla^k p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_2 V_2^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho_2 V_2^i V_2^k) = F_k - \alpha \nabla^k p, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \nabla^i (V_1^i (e_1 + p - \tau_{ii}) - V_1^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) = -Q - |F_k| (V_1^k - V_2^k) + \alpha \nabla^k (p V_1^k), \quad (4)$$

$$\frac{\partial (e_2)}{\partial t} + \nabla^k (e_2 V_2^k) = Q, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \rho_2 q_0, \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_i = [u_i, v_i]; \quad i, k = 1, 2.$$

Тензор вязких напряжений несущей среды вычисляется следующим образом [17]:

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right),$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}.$$

Межфазное силовое взаимодействие описывалось уравнениями [2]:

$$F_x = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2) + \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) +$$

$$+ 0,5 \alpha \rho_2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - q_0 \rho_2 \partial \varphi / \partial x,$$

$$F_y = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2) + \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + 0,5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) - q_0 \rho_2 \partial \varphi / \partial y.$$

Компоненты вектора межфазного силового взаимодействия включают в себя силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда, силу присоединённых масс [1]; также при описании динамики частиц учитывается сила Кулона [20]. Здесь p , ρ_1 , u_1 , v_1 – давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей x и y , соответственно; T_1 , e_1 – температура и полная энергия газа; ρ_2 , T_2 , e_2 , u_2 , v_2 – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости дисперсной фазы; F_x , F_y – составляющие вектора силового взаимодействия дисперсной фазы и несущей среды; $k = 1, 2$; Q – тепловой поток между дисперсной фазой и несущей средой [1–3]; λ и μ – теплопроводность и вязкость несущей среды, соответственно. Температура несущей среды находится из уравнения $T_1 = (\gamma - 1) \cdot (e_1 / \rho_1 - 0,5(u_1^2 + v_1^2)) / R$, где R – газовая постоянная несущей фазы, γ – постоянная адиабаты. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_2 = \rho_2 C_p T_2$, где C_p – удельная теплоёмкость единицы массы вещества дисперсной фазы. Тепловой поток между компонентами смеси описывается выражением: $Q = 6\alpha Nu_{12} \lambda (T_1 - T_2) / (2r)^2$. Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительных чисел Маха, Рейнольдса и от числа Прандтля [2; 3]:

$$M_{12} = |\bar{V}_1 - \bar{V}_2| / c, \quad Re_{12} = \rho_1 |\bar{V}_1 - \bar{V}_2| 2r / \mu, \quad Pr = \gamma C_p \mu / \lambda,$$

$$Nu_{12} = 2 \exp(-M_{12}) + 0,459 Re_{12}^{0,55} Pr^{0,33},$$

Здесь c – скорость звука. Коэффициент аэродинамического сопротивления вычислялся с использованием следующего выражения [2]:

$$C_d = \frac{24}{Re_{12}} + \frac{4}{Re_{12}^{0,5}} + 0,4.$$

При моделировании течения аэрозоля для составляющих скорости несущей и дисперсной компонент смеси задавались однородные граничные условия Дирихле. Для остальных динамических функций на границе расчётной области задавались однородные граничные условия Неймана. Составляющие силы Кулона на единицу объёма газовой фазы определяются через её удельный заряд, объёмную плотность твёрдой фазы и напряжённость электрического поля. Потенциал электрического поля в расчётной области определяется из решения уравнения Пуассона [19]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho_{\text{эл}}}{\epsilon \epsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\bar{\nabla} \varphi, \quad \Delta^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{эл}}}{\epsilon \epsilon_0}, \\ \rho_{\text{эл}} &= \alpha \rho_{20} \cdot q_0 = \rho_2 \cdot q_0, \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Ф / м}, \quad \epsilon = 1. \end{aligned}$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твёрдой фракции, φ – потенциал электрического поля. Для уравнения Пуассона задавались однородные граничные условия Неймана в той части канала, в которой располагался однородный газ, и однородные граничные условия Дирихле в той части канала, в которой располагалась электрически заряженная дисперсная компонента смеси. Система уравнений динамики многофазной среды (1)–(5) решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [17]. Шаг по времени вычислялся, исходя из условия Куранта-Фридрихса-Леви [17]. Рассмотрим применение численного метода на примере скалярного нелинейного уравнения в частных производных (7):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x_1} + \frac{\partial b(f)}{\partial x_2} = c(f). \quad (7)$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака для нелинейного уравнения (7) имеет вид (8)–(9):

$$f_{j,k}^* = f_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (a_{j+1,k}^n - a_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (b_{j,k+1}^n - b_{j,k}^n) + \Delta t c_{j,k}^n. \quad (8)$$

$$f_{j,k}^{n+1} = 0,5(f_{j,k}^n + f_{j,k}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (a_{j,k}^* - a_{j-1,k}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (b_{j,k}^* - b_{j,k-1}^*) + 0,5 \Delta t c_{j,k}^*. \quad (9)$$

Здесь Δx_i – шаг по соответствующему пространственному направлению, Δt – шаг по времени. Для получения монотонного численного решения к сеточной функции на каждом временном шаге применялась схема нелинейной коррекции [18]. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль всех узлов. Рассмотрим алгоритм коррекции решения на примере функции f . В случае, если выполняются условия $(\delta f_{j-1/2} \cdot \delta f_{j+1/2}) < 0$ или $(\delta f_{j+1/2} \cdot \delta f_{j+3/2}) < 0$, то к функции f в j -ом узле применяется алгоритм схемы коррекции:

$$\tilde{f}_j = f_j + \kappa (\delta f_{j+1/2} - \delta f_{j-1/2}).$$

Нижний индекс обозначает номер узла сетки. Здесь использованы обозначения:

$$\delta f_{j-1/2} = f_j - f_{j-1}, \quad \delta f_{j+1/2} = f_{j+1} - f_j, \quad \delta f_{j+3/2} = f_{j+2} - f_{j+1},$$

в противном случае: $\tilde{f}_i = f_i$, $\tilde{f}_j$ – значение функции в j -ом узле после перехода на $(n+1)$ -ый временной слой по схеме Мак-Кормака, κ – коэффициент коррекции.

Для уравнения, описывающего внутреннее электрическое поле дисперсной компоненты газозвеси, задавались однородные граничные условия Дирихле в той части канала, в которой была расположена многофазная среда. И однородные граничные условия Неймана в той части моделируемой области, которая предполагалась заполненной однородным газом. Уравнение Пуассона (6) интегрировалось методом установления [21].

Результаты расчётов

На рис. 1 схематично изображён канал, разделённый на две части; в одной части канала расположена электрически заряженная запылённая среда, в другой части находится чистый газ. Так как все частицы дисперсной компоненты смеси имеют одинаковый заряд, то под действием силы Кулона начинается движение дисперсной компоненты смеси из той части канала, которая заполнена электрически заряженной газозвесью, в ту часть канала, которая заполнена чистым газом.

Рис. 1 / Fig. 1. Схематическое изображение канала, частично заполненного электрически заряженной запылённой средой / Schematic representation of a channel partially filled with an electrically charged dusty medium.

Источник: составлено автором.

Размеры моделируемого канала составляли: длина $L = 2$ м, ширина $h = 0,1$ м. Параметры электрически заряженного аэрозоля: $\rho_{20} = 2700$ кг/м³, удельный массовый заряд дисперсной компоненты $q_0 = 0,0001$ Кл/кг, размер частиц $d = 2$ мкм.

На рис. 2 представлено распределение объёмного содержания дисперсной компоненты в начальный и последующий моменты времени.

Рис. 2 / Fig. 2. Пространственное распределение объёмного содержания дисперсной компоненты аэрозоля в начальный (кривая 1) и последующий (кривая 2) моменты времени, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с) / Spatial distribution of the volumetric content of the dispersed aerosol component at the initial (curve 1) and subsequent (curve 2) moments of time, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ s).

Источник: составлено автором.

Под действием силы Кулона, за счёт межкомпонентного взаимодействия, начинается движение газовой компоненты смеси, при этом скорость газа меньше скорости движения дисперсной компоненты (рис. 3).

Рис. 3 / Fig. 3. Пространственное распределение продольных составляющих скорости газа (кривая 1) и дисперсной компоненты смеси (кривая 2), ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с) / Spatial distribution of the longitudinal components of the gas velocity (curve 1) and the dispersed component of the mixture (curve 2), ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ s).

Источник: составлено автором.

В процессе генерации акустического возмущения наибольшая скорость несущей среды наблюдается вблизи начальной поверхности раздела двухкомпонентной смеси и однородного газа (рис. 4).

Рис. 4 / Fig. 4. Пространственное распределение модуля скорости газа в канале / Spatial distribution of the gas velocity module in the channel.

Источник: составлено автором.

При уменьшении объёмного содержания дисперсной компоненты смеси происходит уменьшение интенсивности акустического возмущения: уменьшается скорость движения газа (рис. 5а) и уменьшается величина давления в акустическом возмущении (рис. 5б).

Рис. 5 / Fig. 5. Продольное пространственное распределение модуля скорости (а) и давления газа (б) для расчётов, проведённых с различным объёмным содержанием электрически заряженной дисперсной компоненты, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с) / Longitudinal spatial distribution of the velocity modulus (a) and gas pressure (b) for calculations carried out with different volumetric content of the electrically charged dispersed component, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с).

Источник: составлено автором.

При одинаковой массовой плотности заряда дисперсной компоненты интенсивности перепада давления в акустическом возмущении (разность максимального и минимального давлений в канале $\Delta p = p_{\max} - p_{\min}$) составляет $\Delta p_1 = 459$ Па, $\Delta p_2 = 122$ Па, $\Delta p_3 = 31$ Па для начальных объёмных содержаний дисперсной компоненты $\alpha_1 = 0,001$, $\alpha_2 = 0,0005$, $\alpha_3 = 0,00025$, соответственно. Данную закономерность можно объяснить тем, что в массовой модели электрического заряда дисперсной компоненты смеси уменьшение объёмного содержания дисперсной компоненты приводит к уменьшению потенциала внутреннего электрического поля дисперсной компоненты смеси, следовательно, уменьшается воздействие силы Кулона на дисперсные частицы.

При объёмных содержаниях электрически заряженной дисперсной компоненты $\alpha_1 = 0,001$, $\alpha_2 = 0,0005$, $\alpha_3 = 0,00025$ максимальное значение продольной составляющей силы Кулона на единицу массы твёрдой компоненты аэрозоля составляет $F_{x,1} = -0,213$ Кл/кг, $F_{x,2} = -0,105$ Кл/кг, $F_{x,3} = -0,0053$ Кл/кг, соответственно, (рис. 6).

Рис. 6 / Fig. 6. Распределение вдоль продольной координаты x -составляющей силы Кулона для расчётов с различными объёмными содержаниями электрически заряженной дисперсной компоненты смеси, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с) / Distribution along the longitudinal coordinate of the x -component of the Coulomb force for calculations with different volumetric contents of the electrically charged dispersed component of the mixture, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с).

Источник: составлено автором.

Таким образом, интенсивность воздействия внутреннего электрического поля дисперсной компоненты смеси кратна объёмному содержанию электрически заряженной компоненты аэрозоля.

Рассмотрим изменения значений численных решений при расчётах на измельчающихся сетках. В работе были проведены численные расчёты генерации

акустического возмущения в электрически заряженной газовой взвеси на последовательности измельчающихся сеток:

$$\{N_1 = 150, M_1 = 50\}, \{N_2 = 180, M_2 = 60\}, \{N_3 = 210, M_3 = 70\}, \\ \{N_4 = 240, M_4 = 80\}, \{N_5 = 270, M_5 = 90\}, \{N_6 = 300, M_6 = 100\}.$$

Обозначим через $\Delta^i f = |\max_{\{N_i, M_i\}} f(t, x, y) - \max_{\{N_{i+1}, M_{i+1}\}} f(t, x, y)|$ модули разности максимального значения физической величины f в момент времени t в расчётной области (x, y) , полученные численным расчётом на сетках с количеством узлов соответственно $\{N_i, M_i\}$ и $\{N_{i+1}, M_{i+1}\}$. Для модуля скорости газа разность значений, рассчитанных на последовательности сеток, изменяется следующим образом: $\Delta^1 V_1 = 0,11$ м/с, $\Delta^2 V_1 = 0,08$ м/с, $\Delta^3 V_1 = 0,06$ м/с, $\Delta^4 V_1 = 0,05$ м/с, $\Delta^5 V_1 = 0,04$ м/с (рис. 7а).

Аналогичная зависимость наблюдается и для модуля скорости дисперсной компоненты смеси: $\Delta^1 V_2 = 0,11$ м/с, $\Delta^2 V_2 = 0,09$ м/с, $\Delta^3 V_2 = 0,06$ м/с, $\Delta^4 V_2 = 0,055$ м/с, $\Delta^5 V_2 = 0,04$ м/с. (рис. 7б).

Рис. 7 / Fig. 7. Результаты расчёта модуля скорости несущей среды (а) и дисперсной компоненты (б) для расчётных сеток с различным количеством узлов, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с) / The results of calculating the velocity modulus of the carrier medium (a) and the dispersed component (b) for computational grids with a different number of nodes, ($y = 0,05$ m, $t = 0,0015$ s).

Источник: составлено автором.

В то же время интенсивность акустического возмущения уменьшается существенно быстрее, чем сила Кулона, действующая на единицу массы дисперсной компоненты. Это можно объяснить тем, что при уменьшении объёмного содержания дисперсной фазы уменьшается площадь соприкосновения несущей среды и дисперсной компоненты. А так как межкомпонентное взаимодействие определяется площадью контакта компонент смеси, то интенсивность воздействия дисперсной компоненты на движение газа уменьшается. Таким образом, при уменьшении объёмного содержания электрически заряженной дисперсной компоненты на уменьшение интенсивности течения газа влияют как электрофизические, так и аэродинамические факторы межкомпонентного взаимодействия в аэрозоле.

При измельчении сеток также происходит уменьшение количественных отличий в максимальном значении давления газа в канале: $\Delta^1 p = 300$ Па, $\Delta^2 p = 270$ Па, $\Delta^3 p = 200$ Па, $\Delta^4 p = 100$ Па, $\Delta^5 p = 50$ Па (рис. 8).

Рис. 8 / Fig. 8. Продольные распределение давления газа вычисленные на различных расчётных сетках, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с) / Longitudinal distribution of gas pressure calculated on various computational grids, ($y = 0,05$ м, $t = 0,0015$ с).

Источник: составлено автором.

Таким образом при расчётах явным конечно-разностным методом Мак-Кормака на последовательности измельчающихся сеток наблюдается постепенное уменьшение отличий максимальных значений физических величин, описывающих динамику смеси.

Заключение

В работе представлена математическая модель двухмерного нестационарного течения гетерогенной среды – аэрозоля и численный алгоритм решения уравнений математической модели. С помощью компьютерной реализации конечно-разностного решения уравнений математической модели исследовалось течение газа при движении электрически заряженной дисперсной компоненты аэрозоля. Численные расчёты течения аэрозоля при различных объёмных содержаниях электрически заряженной дисперсной компоненты аэрозоля выявили влияние на интенсивность генерируемого акустического возмущения как силы Кулона, зависящей от напряжения электрического поля, так и интенсивности межкомпонентного аэродинамического взаимодействия газа и дисперсной компоненты. Таким образом, в отличие от математических моделей динамики электрически заряженных сред [7–9], не учитывающих межкомпонентное взаимодействие, континуальная математическая модель динамики электрически заряженного аэрозоля позволяет выявить эффекты, связанные как с газодинамическими, так и с электростатическими полями. Численные расчёты на последовательности измель-

чающихся сеток, демонстрируют сходимость решения, получаемого явным методом Мак-Кормака.

Статья поступила в редакцию 30.10.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003. 284 с.
3. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Волновые процессы в газозвесах частиц металлов: монография. Новосибирск: Параллель, 2015. 301 с.
4. Суров В. С. Гиперболическая модель односкоростной многокомпонентной теплопроводной среды // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47. № 6. С. 905–913.
5. Шаповалов А. В., Шаповалов В. А., Рязанов В. И. Математическая модель распространения примесей в ближней зоне при работе ракетных двигателей // Наука. Инновации. Технологии. 2017. № 2. С. 87–96.
6. Моделирование движения частицы в наклонной плоскости под действием потока воды / Еремеева Н. Г., Куличкина Т. П., Матвеев И. А., Никифорова Л. В., Яковлев Б. В. // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26. № 4. С. 73–82. DOI: 10.25587/SVFU.2019.82.51.007.
7. Дикалюк А. С., Суржиков С. Т. Численное моделирование разреженной пылевой плазмы в нормальном тлеющем разряде // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 5. С. 611–619.
8. Семенов В. П., Тимофеев А. В. Параметрический резонанс и перенос энергии в пылевой плазме // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 3–17.
9. Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field / Tadaa Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 93. P. 778–787. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063.
10. Невский Ю. А., Осипцов А. Н. Медленная гравитационная конвекция дисперсных систем в областях с наклонными границами // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. № 2. С. 65–81.
11. Тукмаков Д. А. Конечно-разностная модель динамики гомогенной смеси в применении к исследованию распространения и отражения ударной волны большой интенсивности в водородно-воздушной среде // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2020. № 1 (33). С. 86–97. DOI: 10.21685/2227-8486-2020-1-7.
12. Тукмаков Д. А. Математическая модель нестационарной сорбции в двухфазной среде, учитывающая пространственную неравномерность распределения концентрации микрокомпонента в фазе сорбента // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Химия. 2019. № 4 (38). С. 24–35. DOI: 10.26456/vtchem2019.4.3.
13. Tukmakov D. A. Numerical study of polydisperse aerosol dynamics with the drop destruction // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. Iss. 6. P. 824–827. DOI: 10.1134/S1995080219060234.
14. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Применение неявной конечно-разностной схемы с весами для моделирования колебаний газа в акустическом резонаторе // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2011. № 4. С. 119–127.
15. Tukmakov D. A. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations // Journal of Physics: Conference series.

2019. Vol. 1328, Scientific Technical Conference on Low Temperature Plasma during the Deposition of Functional Coatings (5–8 November 2018, Kazan University, Kazan, Russian Federation). P. 012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 784 с.
17. Fletcher C. A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlang, 1988. 502 p.
18. Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 3. С. 74–83.
19. Тукмаков А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33–36.
20. Сальянов Ф. А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. М.: Наука, 1997. 240 с.
21. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Т. 2. М.: Наука, 1977. 401 с.

REFERENCES

1. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous environment]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 336 p.
2. Kutushev A. G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery environment]. St. Petersburg, Nedra Publ., 2003. 284 p.
3. Fedorov A. V., Fomin V. M., Khmel' T. A. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov* [Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk, Parallel' Publ., 2015. 301 p.
4. Surov V. S. [A hyperbolic model of one-velocity multicomponent heat-conducting medium]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2009, vol. 47, no. 6, pp. 905–913.
5. Shapovalov A. V., Shapovalov V. A., Ryazanov V. I. [A mathematical model of aerosol distribution in the near zone when working rocket engines]. In: *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovations. Technologies], 2017, no. 2, pp. 87–96.
6. Eremeeva N. G., Kulichkina T. P., Matveev I. A., Nikiforova L. V., Yakovlev B. V. [Modeling of the particle motion in an inclined plane under the influence of a stream of water]. In: *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical notes of NEFU], 2019, vol. 26, no. 4, pp. 73–82. DOI: 10.25587/SVFU.2019.82.51.007.
7. Dikalyuk A. S., Surzhikov S. T. [Numerical simulation of a rarefied dusty plasma in a normal glow discharge]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2012, vol. 50, no. 5, pp. 611–619.
8. Semenov V. P., Timofeev A. V. [Parametric resonance and energy transfer in dusty plasma]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2018, vol. 30, no. 2, pp. 3–17.
9. Tadaa Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 93, pp. 778–787. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063.
10. Nevskii Yu. A., Osipov A. N. [Slow gravitational convection of disperse systems in domains with inclined boundaries]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2011, no. 2, pp. 65–81.
11. Tukumakov D. A. [Finite difference dynamics model of a homogeneous mixture in application to the study of the large intensity of the shock wave in a hydrogen-air environment].

- In: *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* [Models, Systems, Networks in Economics, Engineering, Nature and Society], 2020, no. 1 (33), pp. 86–97. DOI: 10.21685/2227-8486-2020-1-7.
12. Tukmakov D. A. [Mathematical model of non-stationary sorption in a two-phase medium taking into account the spatial inequality of the distribution of the microcomponent concentration distribution in the sorbent phase]. In: *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Khimiya* [Bulletin of the Tver State University. Series: Chemistry], 2019, no. 4 (38), pp. 24–35. DOI: 10.26456/vtchem2019.4.3.
 13. Tukmakov D. A. Numerical study of polydisperse aerosol dynamics with the drop destruction. In: *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 6, pp. 824–827. DOI: 10.1134/S1995080219060234.
 14. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. [Application of the implicit finite-difference scheme with weights to simulate gas oscillations in an acoustic resonator]. In: *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A. N. Tupoleva* [Vestnik of KNRTU n. a. A. N. Tupolev], 2011, no. 4, pp. 119–127.
 15. Tukmakov D. A. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations. In: *Journal of Physics: Conference series*. 2019. Vol. 1328, Scientific Technical Conference on Low Temperature Plasma during the Deposition of Functional Coatings (5–8 November 2018, Kazan University, Kazan, Russian Federation). P. 012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.
 16. Loitsyanskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow, Drofa Publ., 2003. 784 p.
 17. Fletcher C. A. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*. Berlin, Springer-Verlag Publ., 1988. 502 p.
 18. Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V. [Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1993, vol. 5, no. 3, pp. 74–83.
 19. Tukmakov A. L. [Numerical simulation of acoustic flows at resonance gas oscillations in a closed tube]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatcionnaya tekhnika* [Russian Aeronautics], 2006, no. 4, pp. 33–36.
 20. Sal'yanov F. A. *Osnovy fiziki nizkotemperaturnoi plazmy, plazmennyykh apparatov i tekhnologii* [Fundamentals of physics of low-temperature plasma, plasma devices and technologies]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 240 p.
 21. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyi P. I. *Vychislitel'nye metody. T. 2* [Computational methods. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 401 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Тукмаков Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук»;
e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry A. Tukmakov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher, Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”;
e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Тукмаков Д. А. Исследование сеточной сходимости явного метода Мак-Кормака, применённого к моделированию течения электрически заряженного аэрозоля, вызванного движением дисперсных частиц под действием внутреннего электрического поля // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 39–53.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-39-53

FOR CITATION

Tukmakov D. A. Investigation of the grid convergence of the explicit Mac-Cormak method applied to simulation of electrically charged aerosol flow caused by the motion of dispersed particles under the action of internal electric electricity. In: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics, 2021, no. 1, pp. 39–53.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-39-53