

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОФИЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ ВОКРУГ ДВУХ НАГРЕВАЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ОДИНАКОВЫХ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ

Хасанов А. С.

*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

Аннотация

Целью данной статьи является вывод операторными методами формул для профилей температуры и концентрации вокруг двух испаряющихся в диффузионном режиме взаимодействующих аэрозольных капель в поле электромагнитного излучения.

Процедура и методы. Поля температур и концентраций представляются в виде стандартных разложений по сферическим функциям, неопределённые коэффициенты этих разложений рассматриваются как координаты векторов бесконечномерного линейного нормированного пространства. Нахождение неопределённых коэффициентов сводится к нахождению бесконечномерных векторов из граничных условий с помощью линейных операторов. Скалярные величины представляются в виде линейных функционалов, определённых на упомянутом выше бесконечномерном линейном нормированном пространстве.

Результаты. Получены формулы для профилей температуры и концентрации вокруг двух одинаковых капель и приведены соответствующие графики. Проведено сравнение приведённых графиков с графиками, полученными методом, использующим биполярную систему координат.

Теоретическая и практическая значимость. Получены простые формулы для профилей температуры и концентрации, алгоритмы расчётов по которым при решении конкретных задач могут быть легко реализованы в Excel.

Ключевые слова: аэрозольные капли, испарение капель, взаимодействующие капли

FORMULAS FOR TEMPERATURE AND CONCENTRATION PROFILES AROUND TWO IDENTICAL EVAPORATING DROPS HEATED BY ELECTROMAGNETIC RADIATION

A. Khasanov

*Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation*

Abstract

Aim. We derive formulas by operator methods for the temperature and concentration profiles around two interacting identical aerosol drops heated by radiation and evaporating in the diffusion regime.

Methodology. The temperature and concentration fields are represented as standard expansions in spherical functions, and the undefined coefficients of these expansions are considered as coordinates of vectors of an infinite-dimensional linear normed space. The search for the undefined coefficients is reduced to finding infinite-dimensional vectors from the boundary conditions by means of linear operators. Scalar quantities are represented as linear functionals defined on the infinite-dimensional linear normed space mentioned above.

Results. Formulas for temperature and concentration profiles around two identical drops are obtained and corresponding graphs are presented. These graphs are compared with the graphs obtained by the method using the bipolar coordinate system.

Research implications. Simple formulas are obtained for temperature and concentration profiles. When solving specific problems, calculation algorithms based on these formulas can be easily implemented in Excel.

Keywords: aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops

Введение

При сближении капель в аэродисперсных системах до расстояний, сравнимых с их радиусами, возникает необходимость учёта их взаимодействия. Наибольшей вероятностью обладают сближения двух капель. Начиная с некоторого расстояния между центрами капель, процесс испарения капель этой пары может заметно отличаться от процесса испарения одиночной капли. Теоретическое описание процесса испарения двух капель дано в работах [1–2] с использованием биполярной системы координат. Более простым для решения широкого класса задач о двух взаимодействующих аэрозольных частицах является использованный нами в данной статье операторный метод. Мы рассматриваем неподвижные капли, но метод применим и при изучении движения взаимодействующих аэрозольных частиц во внешних полях с учётом различных эффектов [3–5]. Изучение процессов испарения капель с учётом различных эффектов остаётся актуальным [6–9]. Так как объяснение особенностей процесса испарения двух капель проводится с опорой на вид профилей температуры и концентрации вокруг них, основной целью данной работы является вывод формул для этих профилей операторным методом.

Методы

Пусть две одинаковые неподвижные капли чистого вещества, на которые падает монохроматическое излучение с длиной волны λ и с интенсивностью I_0 , находятся в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси состоит из молекул вещества капли, а второй компонент – из молекул несущего газа. Молекулы газа на поверхностях капель не испытывают фазового перехода. Пусть a – радиус капель, l – расстояние между их центрами. В случае крупных капель $\bar{\lambda}/a \ll 1$, где $\bar{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега молекул бинарной смеси. Предполагается, что радиус a достаточно мал, чтобы можно было пренебречь временем релаксаций полей температур и концентраций и рассматривать процесс испарения в квазистационарном приближении. Пусть n_1 и n_2 – числен-

ные концентрации молекул первого и второго компонентов смеси, $n = n_1 + n_2$, $c_1 = \frac{n_1}{n}$. Будем считать, что $c_1 \ll 1$, т. е. $\frac{n_2}{n} \approx 1$.

Пусть T_e – распределение температуры в бинарной смеси. На большом расстоянии от капель температура T_e и относительная концентрация c_1 равны постоянным величинам $T_{e\infty}$ и $c_{1\infty}$. Задача решается в предположении, что поле T_e характеризуется малыми относительными перепадами: $\left| \frac{T_e - T_{e\infty}}{T_{e\infty}} \right| \ll 1$. Поля T_e и c_1

описываются системой уравнений $\Delta T_e = 0$, $\Delta c_1 = 0$. В данной задаче коэффициент теплопроводности капель значительно больше коэффициента теплопроводности несущего газа. В этих условиях распределение температуры вдоль поверхности капли можно считать однородным. Пусть $T_{i0}^{(d)}$ – температура поверхности капель, $c_{1s}(T_{i0}^{(d)})$ – относительная концентрация молекул насыщенных паров вещества капли при температуре $T_{i0}^{(d)}$. Величина $T_{i0}^{(d)}$ является неизвестной величиной, и ниже мы приведём уравнение, из которого её можно найти. В случае крупных капель мы можем пренебречь слоем Кнудсена и считать, что на поверхности капли $c_1 = c_{1s}(T_{i0}^{(d)})$, $T_e = T_{i0}^{(d)}$.

Пусть O_1 и O_2 – центры капель. Выберем декартову систему координат $O_1x_1y_1z_1$ так, чтобы направление оси O_1z_1 совпадало с направлением вектора $\vec{O_1O_2}$. Декартова система координат $O_2x_2y_2z_2$ получена путем параллельного переноса декартовой системы координат $Ox_1y_1z_1$. Везде далее r_j , θ_j , φ_j – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O_j . Так как прямая O_1O_2 является осью симметрии полей T_e и c_1 , то эти поля не зависят от сферической координаты φ .

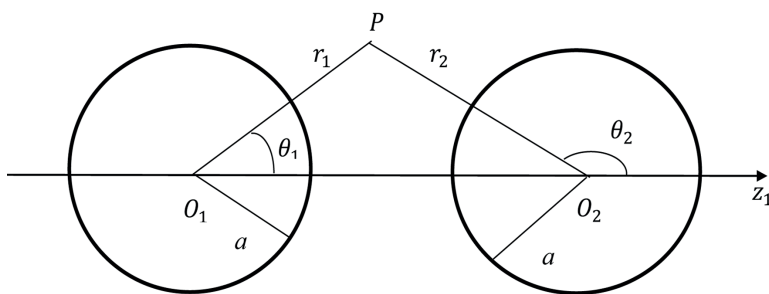


Рис. 1 / Fig. 1. Сферические координаты r_1 , θ_1 и r_2 , θ_2 одной и той же точки P в бинарной смеси в сферических системах координат с началами в точках O_1 и O_2 / Spherical coordinates r_1 , θ_1 and r_2 , θ_2 of the same point P in a binary mixture in spherical coordinate systems with origins at points O_1 and O_2 .

Источник: составлено автором.

Пусть $\delta_T = T_{i0}^{(d)} - T_{e\infty}$, $\delta_c = c_{1s} \left(T_{i0}^{(d)} \right) - c_{1\infty}$, P_n – полином Лежандра. Поля T_e и c_1 ищем в виде [10]:

$$T_e = T_{e\infty} + \delta_T \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_1) + \delta_T \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{en}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_2); \quad (1)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + \delta_c \sum_{n=0}^{\infty} x_{cn}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_1) + \delta_c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{cn}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_2), \quad (2)$$

где $x_{en}^{(1)}$, $x_{en}^{(2)}$, $x_{cn}^{(1)}$, $x_{cn}^{(2)}$ – неопределённые коэффициенты.

При рассмотрении граничного условия на поверхности одной капли, слагаемые, записанные в системе координат с центром другой капли, находятся по формулам [10]:

$$(-1)^n \left(\frac{l}{r_2} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_2) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^n \left(\frac{r_1}{l} \right)^s P_s(\cos \theta_1)$$

вблизи первой капли и

$$\left(\frac{l}{r_1} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_1) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^n (-1)^s \left(\frac{r_2}{l} \right)^s P_s(\cos \theta_2)$$

вблизи второй капли, где C_{n+s}^n – биномиальные коэффициенты. Следовательно, формулы (1)–(2) вблизи первой капли могут быть записаны в виде:

$$T_e = T_{e\infty} + \delta_T \sum_{s=0}^{\infty} \left[x_{es}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1} \right)^{s+1} + \left(\frac{r_1}{a} \right)^s \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+s}^n \tau^{n+s+1} x_{en}^{(2)} \right] P_s(\cos \theta_1), \quad (3)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + \delta_c \sum_{s=0}^{\infty} \left[x_{cs}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1} \right)^{s+1} + \left(\frac{r_1}{a} \right)^s \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+s}^n \tau^{n+s+1} x_{cn}^{(2)} \right] P_s(\cos \theta_1), \quad (4)$$

где $\tau = a/l$. Аналогично, вблизи второй капли:

$$T_e = T_{e\infty} + \delta_T \sum_{s=0}^{\infty} \left[x_{es}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2} \right)^{s+1} + \right.$$

$$+ \left(\frac{r_2}{a}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+s}^n \tau^{n+s+1} x_{en}^{(1)}] (-1)^s P_s(\cos \theta_2), \quad (5)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + \delta_c \sum_{s=0}^{\infty} \left[x_{cs}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2}\right)^{s+1} + \left(\frac{r_2}{a}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+s}^n \tau^{n+s+1} x_s^{(1)} \right] (-1)^s P(\cos \theta_2). \quad (6)$$

Пусть

$$X_e^{(1)} = (x_{e0}^{(1)}, x_{e1}^{(1)}, \dots)^T, \quad X_e^{(2)} = (x_{e0}^{(2)}, x_{e1}^{(2)}, \dots)^T, \quad X_c^{(1)} = (x_{c0}^{(1)}, x_{c1}^{(1)}, \dots)^T, \quad X_c^{(2)} = (x_{c0}^{(2)}, x_{c1}^{(2)}, \dots)^T,$$

где T – операция транспонирования. Поиск этих четырёх векторов будем вести в пространстве $l_1 = \left\{ X \mid X = (x_1, x_2, \dots)^T, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty \right\}$. Пространство l_1

является линейным нормированным пространством с нормой $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Пусть $L_1^{(M)}$ – линейное пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов, элементы a_{sn} которых удовлетворяют условию $\sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}| < +\infty$. Это

пространство является линейным нормированным пространством с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. В пространстве l_1 рассмотрим линейный оператор, действующий

из l_1 в l_1 по формуле $Y = AX$, где $A \in L_1^{(M)}$, $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X . Для матрицы и порожденного ею матричного оператора будем использовать одно и то же обозначение. Можно показать, что норма матричного оператора A , согласованная с нормой вектора X , равна $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Для

элемента матрицы A с индексами s и n кроме стандартного обозначения a_{sn} будем использовать и обозначение $(A)_{sn}$.

Пусть $E_1 = (1, 0, 0, \dots)^T$, а элементы матрицы $M \in L_1^{(M)}$ определяются по формуле $(M)_{sn} = C_{n+s-2}^{n-1} \tau^{n+s-1}$, где $s \geq 1, n \geq 1$. С учётом формул (3) – (6), граничные условия на поверхностях капель приводят к следующим матричным уравнениям:

$$X_e^{(1)} + MX_e^{(2)} = E_1, \quad X_e^{(2)} + MX_e^{(1)} = E_1$$

$$X_c^{(1)} + MX_c^{(2)} = E_1, \quad X_c^{(2)} + MX_c^{(1)} = E_1.$$

Из этих уравнений следует, что:

$$X_e^{(1)} = X_e^{(2)} = X_c^{(1)} = X_c^{(2)} = (E + M)^{-1} E_1, \quad (7)$$

где $(E)_{sn} = \delta_{sn}$ – символ Кронекера, $s \geq 1, n \geq 1$. Ясно, что в общем случае $0 < \tau < 0,5$, так как $2a < l < +\infty$, если не рассматривать касающиеся капли (в случае касания $2a = l, \tau = 0,5$) и не переходить от пары капель к одиночной капле (в этом случае $l \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow 0$). Можно показать, что $\|M\| < 1$ при $\forall \tau \in [0, 1/2)$, то есть линейный оператор $(E + M)^{-1}$ существует при $\forall \tau \in [0, 1/2)$. Заметим, что результаты для двух касающихся капель и одиночной капли могут быть получены из наших результатов путём предельного перехода при $l \rightarrow 2a$ (т. е. при $\tau \rightarrow 0,5$) и $l \rightarrow \infty$ (то есть при $\tau \rightarrow 0$).

Пусть m – линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей $Y = (y_1, y_2, \dots)$ с нормой $Y = \sup_k |y_k|$. Любую точку $Y \in m$ можно

рассматривать как матрицу (как вектор-строку) и определить матричный оператор, т. е. функционал, действующий из l_1 в $(-\infty, +\infty)$ по формуле $y = YX$, где $X = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1$. Этот функционал будем обозначать буквой Y . Норма Y функционала Y , согласованная с нормой вектора $X = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1$, совпадает с числом $Y = \sup_k |y_k|$. Пусть r_1, θ_1 и r_2, θ_2 – координаты точки P в сферических системах

координат с началами в точках O_1 и O_2 , где $r_1 \geq a$ и $r_2 \geq a$. Определим в точке

P вектор-строку $Y^{(1)}(P) = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots) \in m$, где $y_k^{(1)} = \left(\frac{a}{r_1}\right)^k P_{k-1}(\cos \theta_1)$, и вектор-

строку $Y^{(2)}(P) = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots) \in m$, где $y_k^{(2)} = (-1)^{k-1} \left(\frac{a}{r_2}\right)^k P_{k-1}(\cos \theta_2)$. Из формул

(1)–(2) и (7) получим следующие формулы для полей T_e и c_1 :

$$T_e(P) = T_{e\infty} + \delta_T [Y^{(1)}(P) + Y^{(2)}(P)](E + M)^{-1} E_1, \quad (8)$$

$$c_1(P) = c_{1\infty} + \delta_c [Y^{(1)}(P) + Y^{(2)}(P)](E + M)^{-1} E_1. \quad (9)$$

Формулы (8)–(9) характеризуют взаимовлияние капель на процесс их испарения. Так как наиболее сильно это взаимодействие выражено на линии центров капель, то рассмотрим поля (8) – (9) на этой линии. Так мы получим профили температуры и концентрации. В этом случае координаты θ_1 и θ_2 , в зависимости от положения точки P на линии центров, принимают только два значения 0 и π , а координаты r_1 и r_2 легко выражаются через координату z_1 . В результате получим следующие формулы для профилей температуры и концентрации:

$$T_e(P) = T_{e\infty} + \delta_T Y(z_1)(E + M)^{-1} E_1, \quad (10)$$

$$c_1(P) = c_{1\infty} + \delta_c Y(z_1)(E + M)^{-1} E_1, \quad (11)$$

где k -я координата $(Y(z_1))_k$ вектор-строки $Y(z_1) \in m$ определяется по формуле:

$$(Y(z_1))_k = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{1-\tau z_1/a}\right)^k - \left(\frac{a}{z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \leq -a, \\ \left(\frac{a}{z_1}\right)^k + \left(\frac{\tau}{1-\tau z_1/a}\right)^k & \text{при } a \leq z_1 \leq l-a, \\ \left(\frac{a}{z_1}\right)^k - \left(\frac{\tau}{1-\tau z_1/a}\right)^k & \text{при } z_1 \geq l+a. \end{cases} \quad (12)$$

Нахождение температуры поверхности капель

Так как поля температуры и концентрации обладают плоскостью симметрии, проходящей через середину отрезка O_1O_2 перпендикулярно линии центров, то в дальнейшем будем рассматривать эти поля только вблизи первой капли. Зная поля T_e и c_1 , мы можем найти поток тепла $Q_T^{(d)}$ и поток первого компонента бинарной смеси $Q_1^{(d)}$ через поверхность первой капли. Вычисления проведём в сферической системе координат с центром в точке O_1 . Поток тепла $dQ_T^{(d)}$ и поток первого компонента бинарной смеси $dQ_1^{(d)}$ через бесконечно малый элемент поверхности $ds = a^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$ первой капли со сторонами $ad\theta_1$ и $a \sin\theta_1 d\varphi_1$ находим по формулам:

$$dQ_T^{(d)} = -\kappa_e (\nabla T_e, \vec{n}_e) ds = -\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a} a^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

$$dQ_1^{(d)} = -nD_{12} (\nabla c_1, \vec{n}_e) ds = -nD_{12} \frac{\partial c_1}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a} a^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

где κ_e – коэффициент теплопроводности газовой среды, D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси, \vec{n}_e – единичный вектор внешней нормали к рассматриваемому бесконечно малому элементу поверхности ds . Величины $\frac{\partial T_e}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a}$ и $\frac{\partial c_1}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a}$ легко могут быть найдены из формул (3)–(4).

Проинтегрировав выражения для $dQ_T^{(d)}$ и $dQ_1^{(d)}$ по φ_1 от 0 до 2π и по θ_1 от 0 до π с учётом свойств полиномов Лежандра, получим формулы $Q_T^{(d)} = 4\pi a \kappa_e \delta_T x_{e0}^{(1)}$, $Q_1^{(d)} = 4\pi a n D_{12} \delta_c x_{c0}^{(1)}$. Так как $x_{e0}^{(1)} = E_1^T X_e^{(1)}$ и $x_{c0}^{(1)} = E_1^T X_c^{(1)}$, то из формул (7) следует, что

$$Q_1^{(d)} = 4\pi a n D_{12} \delta_c E_1^T (E + M)^{-1} E_1, \quad (13)$$

$$Q_T^{(d)} = 4\pi a \kappa_e \delta_T E_1^T (E + M)^{-1} E_1. \quad (14)$$

Пусть Q_w – тепло, выделяющееся в единицу времени в объёме первой капли. Эта величина равна суммарной мощности тепловых источников, которые возникают вследствие поглощения этой каплей монохроматического излучения с длиной волны λ и с интенсивностью I_0 . Величину Q_w можно найти [11] по формуле:

$$Q_w = \pi a^2 I_0 K_w, \quad (15)$$

где K_w – фактор поглощения. Если пренебречь влиянием лучистого переноса тепла на процесс испарения капель, то должно выполняться условие:

$$Q_w = L_1 m_1 Q_1^{(d)} + Q_T^{(d)}, \quad (16)$$

где L_1 и m_1 – удельная теплота фазового перехода и масса молекул первого компонента, соответственно. Из формул (13)–(16) получим следующее уравнение для определения неизвестной температуры поверхности капли $T_{i0}^{(d)}$:

$$K_e \left(T_{i0}^{(d)} - T_{e\infty} \right) + L_1 m_1 n D_{12} \left(c_{1s} \left(T_{i0}^{(d)} \right) - c_{1\infty} \right) = \frac{a I_0 K_w}{4 E_1^T \left(E + M \right)^{-1} E_1}. \quad (17)$$

Хотя поле температуры T_e в нашей задаче характеризуется малыми относительными перепадами, при решении уравнения (17) в конкретных задачах нами учитывались не только известные зависимости величин n и c_{1s} от температуры, но и зависимости от температуры величин K_e , L_1 и D_{12} .

Анализ полученных результатов

Рассмотрим расчёты для капель воды в атмосфере. В случае капель воды при падении на них монохроматического излучения с длиной волны λ величину K_w можно найти [11] по формуле:

$$K_w = e^{-0,2 \left(\sqrt{n_\lambda^2 + m_\lambda^2} - 1 \right)} \left(1 - e^{-8\pi m_\lambda \frac{a}{\lambda}} \right), \quad (18)$$

где n_λ и m_λ – действительная и мнимая части показателя преломления воды. В работе [11] приведены расчёты профилей температуры и концентрации с использованием биполярной системы координат вокруг двух одинаковых капель воды в воздухе для расстояний между их центрами $l = 2a$ (случай касающихся капель) и $l = 20a$ (случай большого расстояния между центрами капель) при значении радиуса капель $a = 5$ мкм. При значении давления $p = 101325$ Па в этой работе выбраны следующие значения температуры и концентрации на большом расстоянии от капель: $T_{e\infty} = 20$ °С, $c_{1\infty} = 0$. Капли находятся в поле электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 10,6$ мкм с интенсивностью $I_0 = 1000$ Вт/см². Такому значению длины волны соответствуют [12] действительная и мнимая части показателя преломления воды $n_\lambda = 1,1750$ и $m_\lambda = 0,0802$. Зная a , λ , n_λ , m_λ , легко найти значение K_w по формуле (18).

Сравним результаты наших расчётов с результатами расчётов в работе [11]. Величина $E_1^T (E + M)^{-1} E_1$, фигурирующая в наших формулах, расположена в левом верхнем углу матрицы $(E + M)^{-1}$ с бесконечным числом строк и столбцов и может быть легко найдена в Excel с большой точностью, так как в расчётах могут быть использованы урезанные матрицы. Для достижения высокой точности в матрицах E и M нами были оставлены первые 52 строки и 52 столбца, а у бесконечномерной вектор-строки $Y(z_1)$ оставлены первые 52 элемента. При известных значениях $T_{e\infty}$, m_1 , $c_{1\infty}$, a , I_0 , K_w , l уравнение (17) легко решить в Excel с большой точностью относительно температуры $T_{i0}^{(d)}$ с учётом зависимости K_e , L_1 , D_{12} , n и c_{1s} от $T_{i0}^{(d)}$. Ниже приведены графики профилей температуры и концентрации, построенные по формулам (10) – (12) для расстояний между их центрами $l = 2a$ и $l = 20a$.

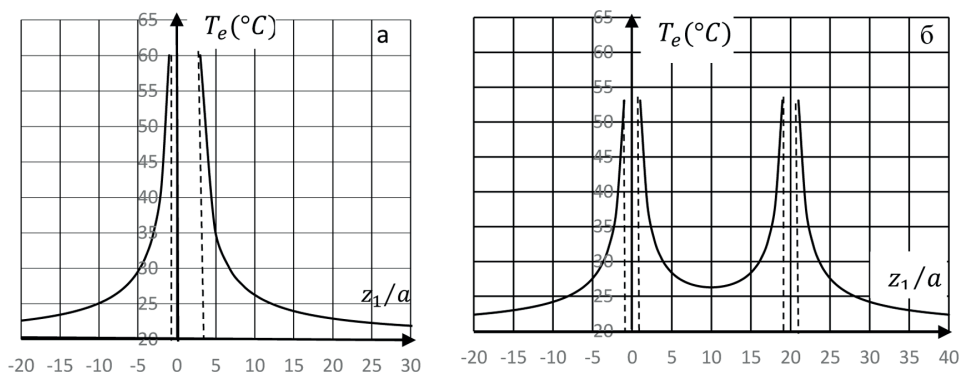


Рис. 2 / Fig. 2. Профили температуры вокруг двух испаряющихся капель воды радиуса $a = 5 \mu\text{м}$ в воздухе при $T_{e\infty} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ и $c_{1\infty} = 0$, нагреваемых излучением с длиной волны $\lambda = 10,6 \mu\text{м}$ и с интенсивностью $I_0 = 1000 \text{ Вт/см}^2$: а – при $l = 2a$; б – при $l = 20a$ /
Temperature profiles around two evaporating water droplets of radius $a = 5 \mu\text{м}$ in air at $T_{e\infty} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ and $c_{1\infty} = 0$, heated by radiation with a wavelength $\lambda = 10,6 \mu\text{м}$ and an intensity $I_0 = 1000 \text{ w/cm}^2$: а – for $l = 2a$; б – for $l = 20a$.

Источник: составлено автором.

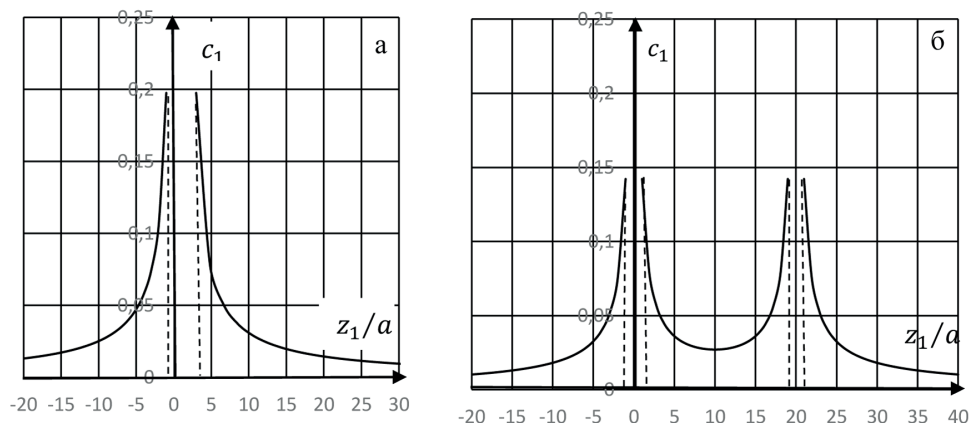


Рис. 3 / Fig. 3. Профили концентрации вокруг двух испаряющихся капель воды радиуса $a = 5 \text{ мкм}$ в воздухе при $T_{\infty} = 20 \text{ °C}$ и $c_{1\infty} = 0$, нагреваемых излучением с длиной волны $\lambda = 10,6 \text{ мкм}$ и с интенсивностью $I_0 = 1000 \text{ Вт/см}^2$: a – при $l = 2a$; b – при $l = 20a$ / Concentration profiles around two evaporating water droplets of radius $a = 5 \text{ }\mu\text{m}$ in air at $T_{\infty} = 20 \text{ °C}$ and $c_{1\infty} = 0$, heated by radiation with a wavelength $\lambda = 10,6 \text{ }\mu\text{m}$ and an intensity $I_0 = 1000 \text{ w/cm}^2$: a – for $l = 2a$; b – for $l = 20a$.

Источник: составлено автором.

Приведённые графики практически совпадают с графиками в работе [11].

Заключение

Достаточно широкий класс задач о двух сферических аэрозольных частицах может быть решён с использованием биполярной системы координат. Но такой метод имеет ограниченную область применения. Дело в том, что для двух сфер, расположенных одна вне другой, существует единственная биполярная система координат, в которой эти сферы являются координатными плоскостями. В таком образом подобранной криволинейной системе координат очень просто записываются граничные условия на поверхностях двух сферических частиц. Но уже при рассмотрении пары двухслойных сферических аэрозольных частиц, образовавшихся на некотором твёрдом сферическом ядре конденсации и состоящих из однородного ядра и однородной оболочки, нельзя выбрать биполярную систему координат, в которой четыре сферические поверхности ядер и оболочек были бы координатными поверхностями. Более широкую область применения имеет операторный метод. В данной работе операторными методами получены достаточно простые формулы (8)–(9) для полей температуры и концентрации вокруг капель и формулы (10)–(12) для профилей этих полей. Расчёты по этим формулам легко выполнить в Excel, а результаты расчётов соответствуют результатам расчётов достаточно сложным методом биполярной системы координат.

Формулы для профилей температуры концентрации имеют важное теоретическое значение. Из приведённых выше графиков мы видим, как при сближении капель (при $l \rightarrow 2a$) повышается температура их поверхности. Из зависимости

относительной концентрации молекул насыщенных паров воды от температуры следует, что повышается при этом и концентрация c_1 на их поверхности. Повышение температуры поверхности капель происходит из-за затруднения отвода тепла и испаряющейся воды от поверхностей капель. Этот эффект приводит к увеличению времени полного испарения капель при их взаимодействии. При увеличении расстояния между центрами капель l взаимодействие капель ослабевает. Профили вокруг первой капли, приведённые для $l = 20a$, близки к профилям вокруг одиночной первой капли. При $l = 20a$ значения температуры T_e и концентрации c_1 на поверхности первой капли равны, соответственно, 53°C и $0,1422$. Путём перехода к пределу при $l \rightarrow \infty$ из наших формул можно получить, что в случае одиночной первой капли значения температуры T_e и концентрации c_1 на её поверхности равны, соответственно, 52°C и $0,1352$.

В данной работе мы рассмотрели для простоты две одинаковые аэрозольные капли. Но из хода наших рассуждений можно заключить, что метод можно обобщить и для двух капель с различными радиусами.

Статья поступила 10.10.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 27. Iss. 5. P. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.
2. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 28. Iss. 7. P. 244–247. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
3. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Теория термофореза неоднородных аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 6. С. 929–935.
4. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 2. С. 293–297.
5. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Термофорез твердой сферической крупной аэрозольной частицы с учётом инерционных эффектов в уравнениях гидродинамики. М.: Московский педагогический университет, 1995. 33 с. Деп. в ВИНТИ № 3196-B95.
6. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
7. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Испарение капель воды в высокотемпературной газовой среде // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 133–142.
8. Захаревич А. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Экспериментальное исследование изменения температуры в центре капли воды в процессе ее испарения в разогретом воздухе // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 3. С. 537–547.
9. Влияние поверхностных явлений на испарение и конденсацию водных систем / Кочурова Н. Н., Коротких О. П., Абдуллин Н. Г., Айрапотова Е. Р., Караев Р. Р., Petzold G. // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 104–108.
10. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 632 с.

11. Щукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей. Москва: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
12. Centeno M. V. The Refractive Index of Water in the Near Infra-Red Spectrum // *Journal of the Optical Society of America*. 1941. Vol. 31. Iss. 3. P. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244.

REFERENCES

1. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 27, iss. 5, pp. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.
2. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 28, iss. 7, pp. 244–247. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
3. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [The theory of thermophoresis of inhomogeneous aerosol particles]. In: *Теплофизика высokikh температур* [High Temperature], 1996, vol. 34, no. 6, pp. 929–935.
4. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Теплофизика высokikh температур* [High Temperature], 2006, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.
5. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. *Termoforez tverdoi sfericheskoi krupnoi aerol'noi chastitsy s uchetom inertsiionnykh effektov v uravneniyakh gidrodinamiki* [Thermophoresis of a solid spherical large aerosol particle with allowance for inertial effects in the equations of hydrodynamics]. Moscow, Moskovskii pedagogicheskii universitet Publ., 1995. 33 p. Deposited in VINITI, no. 3196-B95.
6. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Predictive determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gas media with a varying temperature]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
7. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Evaporation of water droplets in a high-temperature gaseous medium]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 1, pp. 133–142.
8. Zakharevich A. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Experimental investigation of the change in temperature at the center of a water droplet in the process of evaporation in heated air]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 3, pp. 537–547.
9. Kochurova N. N., Korotkikh O. P., Abdullin N. G., Airapetova E. R., Karaev R. R., Petzold G. [Effect of surface phenomena on evaporation and condensation of water systems]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 1, pp. 104–108.
10. Happel J., Brenner H. *Gidrodinamika pri malykh chislakh Reynoldsa* [Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Applications to Particulate Media]. Moscow, Mir Publ., 1976. 632 p.
11. Shchukin E. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. *Izbrannye voprosy fiziki aerolei* [Selected topics of the physics of aerosols]. Moscow, Moskovskii pedagogicheskii universitet Publ., 1992. 297 p.
12. Centeno M. V. The Refractive Index of Water in the Near Infra-Red Spectrum. In: *Journal of the Optical Society of America*, 1941, vol. 31, iss. 3, pp. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С. Формулы для профилей температуры и концентрации вокруг двух нагреваемых электромагнитным излучением одинаковых испаряющихся капель // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 64–76.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76

FOR CITATION

Khasanov A. S. Formulas for temperature and concentration profiles around two identical evaporating drops heated by electromagnetic radiation. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 64–76.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76