УДК 532.5.013.12
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-77-91

# ОБ УТОЧНЕНИИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НАНОЧАСТИЦАМ

***Гладков С. О., Зо Аунг***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*
*125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация*

**Аннотация**
***Цель***. Главная цель работы заключается в уточнении уравнения Навье-Стокса применительно к наночастицам.
***Процедура и методы.*** Методика вычислений основана на использовании классического кинетического уравнения Больцмана.
***Результаты.*** Найденное уравнение представляет собой уточнённое уравнение Навье-Стокса, в правой части которого учтены слагаемые высших степеней по длине свободного пробега частиц.
***Теоретическая и/или практическая значимость.*** Во всех случаях, когда необходимо провести изучение гидродинамического движения наночастиц в потоке вязкой жидкости, полученное уравнение позволяет нам вычислить все интересующие нас поправки к любым гидродинамическим параметрам и, в частности, к силе Стокса.
**Ключевые слова:** кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Навье-Стокса, длина свободного пробега молекул.

# ON REFINING THE NAVIER–STOKES EQUATION IN RELATION TO NANOPARTICLES

***S. Gladkov, Zaw Aung***

*Moscow Aviation Institute (National Research University)*
*Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russian Federation*

**Abstract**
***Aim.*** The main purpose of the work is to refine the Navier–Stokes equation for nanoparticles.
***Methodology.*** The calculation technique is based on the use of classical Boltzmann kinetic equation.
***Results.*** The found equation is a refined Navier–Stokes equation, on the right side of which the components of the higher degrees along the length of the free run of particles are taken into account.
***Research implications.*** In all cases where it is necessary to study the hydrodynamic movement of nanoparticles in the flow of a viscous liquid, the resulting equation allows one to calculate all the necessary amendments to any hydrodynamic parameters and, in particular, to the Stokes strength.
**Keywords:** Boltzmann kinetic equation, Navier–Stokes equation, free length of molecules.

## Введение

Вопрос, поднимаемый в настоящей статье, посвящён анализу применения уравнения Навье-Стокса к малым частицам, характерная линейная длина которых соответствует размеру наночастиц. Подобная тема исследования в настоящее время является весьма актуальной благодаря быстро развивающимся в последнее время практическим приложениям нанотехнологий. Надо сказать, что в результате кропотливой работы над источниками, так или иначе близко связанными с тематикой нашего исследования, мы не смогли обнаружить оригинальных статей (и монографий), посвящённых изучению гидродинамического обтекания частиц малого линейного размера (см., к примеру, литературу [1–20]) из диапазона $10^{-4}$ – $10^{-6}$ см.

В этой работе речь пойдёт о вычислении дополнительных поправок к правой части уравнения Навье-Стокса по длине свободного пробега молекул жидкости $l$.

Ясно, что если мы говорим о размерах такого порядка, то классическое уравнение Навье-Стокса необходимо подвергнуть модификации. Действительно, в этом случае длина свободного пробега молекул может оказаться сравнимой с линейным размером наночастицы.

Чтобы подробно описать решение поставленной задачи можно воспользоваться хорошо проверенной методикой, а именно кинетическим уравнением Больцмана (см. [21; 22]).

## 1. Вывод уравнения Навье-Стокса с учётом поправок по длине свободного пробега

Представим классическое кинетическое уравнение Больцмана в следующем виде [21] (см. также [22]):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla f+\mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=L\left(f\right), \tag{1}$$

где $f = f(t, \mathbf{p}, \mathbf{r})$ – искомая функция распределения, $\mathbf{v}$ – скорость молекул, $\mathbf{p}$ – их импульс, $\mathbf{F}$ – сила, действующая на частицы жидкости, которая в нашем случае равна нулю, $L(f)$ – интеграл столкновений. Его явное выражение для максвелловского газа можно записать как (см. [22]):

$$L\left(f\right)=n\sum\left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1\right|\sigma\left[f\left(\mathbf{v}'\right)f\left(\mathbf{v}_1'\right)-f\left(\mathbf{v}\right)f\left(\mathbf{v}_1\right)\right],$$

где $n$ – концентрация молекул, $\sigma$ – сечение рассеяния.

В рамках решаемой нами задачи можно воспользоваться приближением времени релаксации (так называемое «тау-приближение» [21]) и в соответствии с [21] будем искать решение в виде ряда:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots, \tag{2}$$

где квазиравновесная функция распределения:

$$f_0=\frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon(p)-\mathbf{pV}}{T}}. \tag{3}$$

При этом время релаксации, если воспользоваться явным выражением для интеграла столкновений, можно представить как:

$$\frac{1}{\tau_v} = -\frac{\delta L(f)}{\delta f}\bigg|_{f=\bar{f}(\mathbf{v})} = n\sum\left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1\right|\sigma\bar{f}\left(\mathbf{v}_1\right).$$

Заметим, что ряд (2) представляет собой разложение по параметру $\frac{l}{L}$, где $l$ – длина свободного пробега молекул, а $L$ – некоторый характерный размер (в случае, если рассматривается, например, обтекание шара, то его можно считать равным радиусу шара $R$). Нормировочный множитель в (3) есть:

$$Z = \int \bar{f} d\Gamma = \int e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} d\Gamma. \tag{4}$$

Здесь $d\Gamma = d^3p dV$ – элемент фазового объёма [24], $\bar{f} = f_0\big|_{\mathbf{V}=0}$ – равновесная функция распределения, $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия молекулы, $m$ – её масса, а интегрирование ведётся по всему импульсному пространству, элемент объёма которого определяется как $d^3p = dp_x dp_y dp_z$. $dV = dxdydz$ – элемент объёма в декартовых координатах. Постоянную Больцмана $k_B$ здесь и везде далее будем полагать равной единице, вектор $V = V(t,\mathbf{r})$ представляет собой скорость гидродинамического потока, которым увлекаются молекулы жидкости, функции $f_1$, $f_2$, $f_3$, представляют собой искомые поправки к квазиравновесной функции распределения, которые нам следует найти. Температура $T$ считается постоянной во всей области пространства.

Для решения поставленной задачи правую часть уравнения (1) удобно представить в виде ряда:

$$L(f) \approx -\frac{f_0 + f_1 + f_2 + \ldots}{\tau_p}, \tag{5}$$

где $\tau_p$ – время между столкновениями молекул. В этом решении поправки $f_1, f_2, \ldots$ так же, как и в (2), есть величины порядка только чётных степеней, то есть $f_1 \sim \left(\frac{l}{L}\right)^2, f_2 \sim \left(\frac{l}{L}\right)^4, \ldots$ (см. вычисления далее).

Прежде, чем искать поправки в (2), нам следует записать общий принцип получения уравнений движения для случая, когда температура $T \neq 0$.

Если бы температура была равна нулю, то уравнение движения легко было бы получить из принципа сохранения полной мощности системы, аналогично тому, как это было сделано, например, в работах [20; 23], то есть, исходя из условия:

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0, \tag{6}$$

где полная энергия потока жидкости имеет вид:

$$E = \frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p) + \frac{m\mathrm{V}^2}{2}\right] f d\Gamma.$$

Поэтому изменение энергии в единицу времени будет равно:

$$\dot{E} = \frac{1}{Z}\int \varepsilon(p)\,\dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f} d\Gamma, \tag{7}$$

а диссипативная функция равна:

$$\dot{Q} = T\dot{S}, \tag{8}$$

где $S$ – энтропия. То есть при $T = 0$ это слагаемое попросту исчезает.

В случае же, когда $T \neq 0$ уравнение (6) не годится (в отличие от чисто механических задач, как это описывается, например, в [25]), и мы должны записать вместо него уравнение в виде:

$$\dot{F} = \frac{d}{dt}(E - TS) = 0, \tag{9}$$

где $F = E - TS$ – свободная энергия Гиббса.

При $T = \text{const}$ имеем отсюда:

$$E - Q = 0. \tag{10}$$

Согласно, например, [24] энтропию неравновесного классического больцмановского газа можно записать в виде:

$$S = -\frac{1}{Z}\int f \ln\left(\frac{f}{e}\right) d\Gamma. \tag{11}$$

Подставляя определение (11) в (8), получаем:

$$\dot{Q} = -\frac{T}{Z}\int \dot{f} \ln f d\Gamma. \tag{12}$$

Подставляя теперь (7) и (12) в (10), находим:

$$\frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p) + T\ln f\right]\dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f} d\Gamma = 0. \tag{13}$$

Следуя (5), имеем:

$$\dot{f} = L(f) \approx -\frac{f_0 + f_1 + f_2 + \ldots}{\tau_p}.$$

И поэтому из (13) получаем:

$$\frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p) + T\ln\left(f_0 + f_1 + f_2 + \ldots\right)\right]\frac{\left(f_0 + f_1 + f_2 + \ldots\right)}{\tau_p} d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f} d\Gamma = 0. \tag{14}$$

Легко проверить, что рекуррентная формула для определения произвольной поправки $n$-ого порядка к квазиравновесной функции распределения может быть представлена в виде (подробности см. в работе [26]):

$$f_n = (-1)^n \tau_p^n \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right]^n f_0. \tag{15}$$

Как видно из (15), в стационарном случае $\left(\frac{\partial f}{\partial t} = 0\right)$ все поправки чётной степени будут порядка $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ и т.д., о чем мы выше уже упоминали.

Для разложения логарифма, фигурирующего в (13), можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\ln(1+\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\lambda^k}{k}. \tag{16}$$

Для нашего конкретного случая мы будем интересоваться только решением с точностью до $n = 2$ в формуле (15).

Поэтому имеем:

$$f_1 = -\tau_p \left(\dot{f}_0 + \mathbf{v}\cdot\nabla f_0\right), \tag{17}$$

$$f_2 = \tau_p^2 \left(\ddot{f}_0 + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\dot{f}_0 + (\mathbf{v}\cdot\nabla)^2 f_0\right), \tag{18}$$

где точки над функцией $f_0$ означают частные производные по времени соответствующего порядка.

Составив относительные величины $\frac{f_1}{f_0}$ и $\frac{f_2}{f_0}$ с учётом явных выражений (17), (18) и (3), после несложных вычислений найдём:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\tau_p}{T}\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{v}\cdot\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V})\right). \tag{19}$$

В рамках нашей задачи выражение (19) должно быть записано с точностью до членов порядка $V^2$.

Поэтому согласно (3), так же как это делается в монографии [21], имеем приближённо:

$$f_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p)-\mathbf{pV}}{T}} \approx \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} \left(1 + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}}{T}\right) = \bar{f}\left(1 + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}}{T}\right). \tag{20}$$

Действительно, в силу того, что скорость потока сравнительно невелика, дробь $\frac{\mathbf{pV}}{T}$ по порядку величины должна составлять величину $\frac{\mathbf{pV}}{T} \sim \frac{m\mathrm{v}_T^2}{T}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{v}_T}$, но так как $T \sim m\mathrm{v}_T^2$, а $\mathrm{V} \ll v_T$, где $v_T$ – это средняя тепловая скорость молекулы, то отсюда и получается условие $\frac{\mathbf{pV}}{T} \ll 1,$ которое и является обоснованием возможности разложения вида (20). Подчеркнём, что это условие обусловлено именно гауссовским распределением.

Таким образом,

$$f_1 = \frac{\tau_p}{T}\bar{f}\left(\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\left(1+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\right)=$$

$$=\frac{\tau_p}{T}\bar{f}\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)^2}{T}+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right). \qquad (21)$$

Вполне аналогично находим, что

$$\frac{f_2}{f_0}=\frac{\tau_p^2}{T}\left[\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right] \qquad (22)$$

и, значит, с учётом (20) имеем:

$$f_2\approx\bar{f}\frac{\tau_p^2}{T}\left[\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\right]. \qquad (23)$$

Теперь с помощью (21) и (23) уравнение (14) можно записать в виде:

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\bar{f}}{T}\left\{\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)}{T}+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\right.$$

$$+\tau_p^2\left[\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\right.$$

$$-\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}-$$

$$\left.\left.-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\quad\right]\right\}^2 d\Gamma+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma=0. \quad (24)$$

После возведения в квадрат выражения в фигурных скобках (24), с точностью до членов порядка $\mathrm{V}^2$ получаем:

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\left\{\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)}{T}+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\right.$$

$$+\tau_p\left[\quad\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\right.$$

$$-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}-$$

$$\left.\left.-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\quad\right]\right\}^2 d\Gamma+$$

$$+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma=\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\times$$

$$\times\left\{\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)^2+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2+\tau_p^2\left[\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)^2+4\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\right)^2+\left(\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)^2\right]+\right.$$

$$+2\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\left[\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)-\tau_p\left(\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\right]-$$

$$-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\tau_p\left[\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right]+$$

$$+2\tau_p^2\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)\left(2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)+$$

$$\left.+4\tau_p^2\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\right)\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right\}d\Gamma+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma=0.$$

Оставляя в этом уравнении только квадратичные по импульсу слагаемые (комментарий по этому поводу см. чуть ниже), будем иметь:

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\left\{\frac{m\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p}+\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)^2+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2+\right.$$

$$+\tau_p^2\left[\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)^2+4\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\right)^2+\left(\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)^2\right]-$$

$$-2\tau_p\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\left[\left(\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\right]-4\tau_p\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\right)+$$

$$\left.+2\tau_p^2\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right\}d\Gamma=0. \qquad (25)$$

В уравнении (25) интегрирование по импульсам удобно провести в сферической системе координат. Как следствие, у нас возникает интегрирование по телесному углу $dO = \sin\theta d\theta d\varphi$, где угловые переменные меняются в пределах $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Сказанное означает, что, когда возводится в квадрат подынтегральное выражение в (21), у нас появляются усреднения от произведений, как чётных степеней импульса, так и нечётных. При этом, что вполне очевидно, результат усреднения от любого нечётного произведения импульсов будет давать нуль. Отличными от нуля оказываются только средние вида:

$$\overline{p_i p_k},\ \overline{p_i p_k p_l p_n},\ \overline{p_i p_k p_l p_n p_m p_s},$$

где чертой сверху мы подчеркнули, что усреднение ведётся только по угловым переменным от соответствующих произведений, а не от каждого по отдельности, поскольку среднее от одного $\overline{p_i}$ даёт просто нуль.

Непосредственно можно убедиться, что выполняются следующие правила усреднения:

$$\overline{p_i p_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik} p^2,$$

$$\overline{p_i p_k p_l p_n} = \frac{p^4}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{kl}\right),$$

$$\overline{p_i p_k p_l p_n p_m p_s} = \frac{p^6}{105}\Big[\delta_{ik}\left(\delta_{ln}\delta_{ms} + \delta_{lm}\delta_{ns} + \delta_{ls}\delta_{nm}\right) +$$

$$+\delta_{il}\left(\delta_{kn}\delta_{ms} + \delta_{km}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{nm}\right) + \delta_{in}\left(\delta_{kl}\delta_{ms} + \delta_{km}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{ml}\right) +$$

$$+\delta_{im}\left(\delta_{kl}\delta_{ns} + \delta_{kn}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{nl}\right) + \delta_{is}\left(\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{km}\delta_{nl}\right)\Big], \qquad (26)$$

где $\delta_{ik}$ – символ Кронекера.

В результате довольно громоздких преобразований, с учётом правил усреднения (26), уравнение (25) можно привести к следующему виду:

$$\frac{1}{Z}\int \frac{\tau_p \overline{f}}{T}\left\{\frac{mT\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \frac{p^2}{3}\left(\dot{\mathbf{V}} - \tau_p \ddot{\mathbf{V}}\right)^2 + \right.$$

$$+\frac{p^4}{15m^2}\left[\left(div\mathbf{V}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \mathrm{V}_k}{\partial x_i}\right] + \frac{4\tau_p^2 p^4}{15m^2}\times$$

$$\times\left[\left(div\dot{\mathbf{V}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_i}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_k}{\partial x_i}\right] - \frac{2\tau_p p^4}{15m^2}\left(\dot{\mathbf{V}}\cdot\Delta\mathbf{V} + 2\dot{\mathbf{V}}\cdot graddiv\mathbf{V}\right) - \frac{4\tau_p p^4}{15m^2}\times$$

$$\times\left[div\mathbf{V}div\dot{\mathbf{V}} + \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_k}{\partial x_i}\right] + \frac{2\tau_p^2 p^4}{15m^2}\left(\ddot{\mathbf{V}}\cdot\Delta\mathbf{V} + 2\ddot{\mathbf{V}}\cdot graddiv\mathbf{V}\right) + \frac{4\tau_p^2 p^6}{105m^4}\times$$

$$\times\left(\Delta\mathbf{V}\cdot graddiv\mathbf{V} + \left(graddiv\mathbf{V}\right)^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{V}_n}{\partial x_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{V}_k}{\partial x_i \partial x_n} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_i \partial x_k}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{4}\left(\Delta\mathbf{V}\right)^2\right)\right\} p^2 dp d\Omega = 0, \qquad (27)$$

где $d\Omega = dxdydz$ обычный элемент объёма.

После применения в уравнении (27) приёма интегрирования по частям с помощью теоремы Гаусса, преследуя цель выделить в явном виде скорость **V**, например, как:

$$\int_{\Omega}\left(div\mathbf{V}\right)^2 d\Omega = \int_{\Sigma_\Omega} div\mathbf{V}\left(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}\right) - \int_{\Omega}\mathbf{V}\cdot graddiv\mathbf{V}d\Omega = -\int_{\Omega}\mathbf{V}\cdot graddiv\mathbf{V}d\Omega,$$

и, считая, что интеграл по поверхности исчезает благодаря граничному условию $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Sigma_\Omega} = 0$, где **n** – нормаль к поверхности, получаем из (27):

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\left\{\frac{mT\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p}+\frac{p^2}{3}\left(\dot{\mathbf{V}}-\tau_p\ddot{\mathbf{V}}\right)^2-\frac{p^4}{15m^2}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta\mathbf{V}+2graddiv\mathbf{V}\right)-\right.$$
$$-\frac{4\tau_p^2p^4}{15m^2}\dot{\mathbf{V}}\cdot\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2grddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+\frac{2\tau_pp^4}{15m^2}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2graddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$+\frac{2\tau_p^2p^4}{15m^2}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta\ddot{\mathbf{V}}+2graddiv\ddot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$\left.+\frac{4\tau_p^2p^6}{35m^4}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta graddiv\mathbf{V}+\frac{1}{4}\Delta^2\mathbf{V}\right)\right\}p^2dpd\Omega=0. \tag{28}$$

Второе и четвёртое слагаемые в квадратных скобках можно также преобразовать с помощью интегрирования по частям, но теперь уже по времени, несмотря на тот факт, что интегрирование по времени в (28) отсутствует. Этот приём становится вполне понятным, если вспомнить, что любое уравнение движения получается благодаря применению классического действия Лагранжа [27], в котором присутствует явное интегрирование по времени. В результате уравнение (28) сводится к виду:

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\mathbf{V}\cdot\left\{\frac{mT\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p}+\frac{p^2}{3}\left(-\ddot{\mathbf{V}}+2\tau_p\dddot{\mathbf{V}}+\tau_p^2\mathbf{V}^{(4)}\right)-\right.$$
$$-\frac{p^4}{15m^2}\left(\Delta\mathbf{V}+2graddiv\mathbf{V}\right)+\frac{2\tau_pp^4}{15m^2}\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2graddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$\left.+\frac{2\tau_p^2p^4}{5m^2}\left(\Delta\ddot{\mathbf{V}}+2graddiv\ddot{\mathbf{V}}\right)+\frac{4\tau_p^2p^6}{35m^4}\left(\Delta graddiv\mathbf{V}+\frac{1}{4}\Delta^2\mathbf{V}\right)\right\}p^2dpd\Omega=0.$$

Полагая здесь выражение в фигурных скобках равным нулю, приходим к обобщённому уравнению Навье-Стокса:

$$\dot{\mathbf{V}}+\frac{\overline{p^2\tau_p}}{3mT}\left(-\ddot{\mathbf{V}}+2\tau_p\dddot{\mathbf{V}}+\tau_p^2\mathbf{V}^{(4)}\right)-\frac{\overline{p^4\tau_p}}{15m^3T}\left(\Delta\mathbf{V}+2graddiv\mathbf{V}\right)+$$
$$+\frac{\overline{2\tau_p^2p^4}}{15m^3T}\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2graddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+\frac{\overline{2\tau_p^3p^4}}{5m^3T}\left(\Delta\ddot{\mathbf{V}}+2graddiv\ddot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$+\frac{\overline{4\tau_p^3p^6}}{35m^5T}\left(\Delta graddiv\mathbf{V}+\frac{1}{4}\Delta^2\mathbf{V}\right)=0, \tag{29}$$

где черта сверху означает усреднение по импульсам молекул с помощью равновесной функции распределения Максвелла.

Считая жидкость несжимаемой, то есть, полагая $div\mathbf{V}=0$ и пренебрегая высшими производными по времени, находим отсюда искомое уравнение:

$$\dot{\mathbf{V}}=\nu\Delta\mathbf{V}-\nu^2\tau^*\Delta^2\mathbf{V}, \tag{30}$$

где кинематическая вязкость $\nu$ и время $\tau^*$ определяются формулами:

$$\nu = \frac{\overline{p^4 \tau_p}}{15m^3T} = \frac{1}{15m^3TZ_0}\int\limits_0^\infty \tau_p p^6 e^{-\frac{p^2}{2mT}}dp,$$

$$\nu^2\tau^* = \frac{\overline{\tau_p^3 p^6}}{35m^5T} = \frac{1}{35m^5TZ_0}\int\limits_0^\infty \tau_p^3 p^8 e^{-\frac{p^2}{2mT}}dp, \qquad (31)$$

а для удобства введён нормировочный множитель

$$Z_0 = \int\limits_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}}dp. \qquad (32)$$

Добавляя в уравнение (30) член с градиентом давления, окончательно приходим к следующему обобщённому уравнению Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{V} - \nu^2\tau^*\Delta^2\mathbf{V}. \qquad (33)$$

## 2. Выводы

Обратим ещё раз внимание на несколько важных моментов.

1. Уравнение (33) представляет собой обобщённое уравнение Навье-Стокса, в котором учтено дополнительное бигармоническое слагаемое, пропорциональное кубу длины свободного пробега молекул. Оно, как видим, входит со знаком «минус». Как с физической, так и с чисто математической точек зрения этот факт является вполне корректным. Связано это с тем, что если бы перед этим слагаемым был знак «плюс», то решение имело бы осциллирующий характер, для которого физических оснований просто нет, поскольку физическое решение может быть либо растущим, либо убывающим.

2. Когда мы задаёмся вопросом написать уравнение Навье-Стокса с учётом любых поправок по длине свободного пробега, то, следуя намеченному выше алгоритму, и в соответствии с (2) и (5) можно прийти к уравнению наиболее общего вида:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{V} - \nu^2\tau^*\Delta^2\mathbf{V} + \nu^3\tau^{**2}\Delta^3\mathbf{V} - \nu^4\tau^{***3}\Delta^4\mathbf{V} + \ldots, \qquad (34)$$

где времена $\tau^{**}$, $\tau^{***}$, ... можно вычислить с помощью алгоритма (31).

Как видно из (34), коэффициенты теплопереноса, которые были найдены с использованием метода «тау-приближения», имеют вполне определённый аналитический вид, который можно явно привести, с помощью подробно описанного выше приёма. И хотя целью Максвелла и др. авторов был вывод этих коэффициентов исходя непосредственно из вида интеграла столкновений, мы воспользовались здесь именно малостью параметра $\left(\frac{l}{L}\right)^{2n}$, где $L$ – линейный размер наночастицы.

Обратим внимание, что если использовать другие приближения и расчёты (к примеру, вейвлет–разложение), то численные коэффициенты будут отличаться от коэффициентов в (31).

Здесь стоит ещё раз подчеркнуть, что основной целью статьи было уточнение уравнения Навье-Стокса при учёте дополнительных слагаемых по длине свободного пробега (или иначе, по числу Кнудсена) молекул с помощью метода «тау-приближения», что и дало нам дополнительный бигармонический по оператору Лапласа вклад к правой части уравнения.

В представленном исследовании мы не ставили перед собой цель сравнения коэффициентов переноса, полученных нами, с работами других авторов, поскольку, как мы чуть выше это отметили, наша цель была иной.

Стоит отметить ещё, что при решении уравнений гидродинамики в любом криволинейном базисе удобно использовать простой алгоритм, подробно изложенный в работах [27; 28].

## Заключение

Заканчивая работу, отметим следующие положения:

1) благодаря классическому кинетическому уравнению Больцмана описан общий алгоритм получения уравнения Навье-Стокса в виде ряда по числу Кнудсена;

2) получено обобщённое уравнение Навье-Стокса, в котором учтены дополнительные слагаемые по $l$, приводящие к бигармоническому оператору Лапласа к его правой части;

3) отмечена важная роль этого слагаемого в деле исследования свойств наночастиц.

*Статья поступила в редакцию 12.10.2020 г.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х т. М.: ГИТТЛ, 1933–1935.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947. 929 с.
3. Прикладная газовая динамика: в 2-х частях. Часть 1 / Христианович С. А., Гальперин В. Г., Миллионщиков М. Д., Симонов Л. А. М.: ЦАГИ, 1948. 145 с.
4. Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. Том. 2. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1949. 765 с.
5. Липман Г.В., Пакет А. Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1949. 330 с.
6. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 520 с.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
8. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М.: Иностранная литература, 1963. 246 с.
9. Серрин Д. Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностранная литература,1963. 256 с.
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х ч. М.: Физматлит, 1963.

11. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 660 с.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. В 2-х ч. М., Наука, 1965–1967.
13. Рауз Х. Механика жидкости. М.: Стройиздат, 1967. 392 с.
14. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х т. М.: Наука, 1970.
15. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
16. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1971–1990. 310 с.
17. Гладков С. О. Об одном доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса // Известия высших учебных заведений. Физика. 2018. Т. 61. №. 6 (726). С. 103–105.
18. Gladkov S. O. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave // Solid State Communications. 1995. Vol. 94. Iss. 9. P. 787–791. DOI: 10.1016/0038-1098(95)00003-8.
19. Гладков С. О. К теории конвективного движения газа в цилиндрическом объеме // Письма в журнал технической физики. 2005. Т. 31. № 12. С. 71–78.
20. Гладков С. О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 3. С. 337–341. DOI: 10.21883/JTF.2018.03.45587.2349.
21. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. 1979. Т. 10. М.: Наука. 528 с.
22. Резибуа П., Де Лернер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир. 1980. 423 с.
23. Гладков С. О., Богданова С. Б. Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации) // Инженерная физика. 2019. № 1. С. 49–61.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука, 2003. 583 с.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Т. 1. М.: Наука, 1973. 207 с.
26. Гладков С. О., Богданова С. Б. Об аналитических решениях квазиклассического кинетического уравнения высших порядков теории возмущений по времени релаксации // Известия высших учебных заведений. Физика. 2018. Т. 61. № 5 (725). С. 28–35.
27. Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
28. Гладков С. О. К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 3. С. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.

## REFERENCES

1. Prandtl L., Tietjens O. *Gidro- i aeromekhanika: v 2-kh tomah* [Hydro- and aeromechanics: in 2 volumes]. Moscow, GITTL Publ., 1933–1935.
2. Lamb H. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, GITTL Publ., 1947. 929 p.
3. Khristianovich S. A., Gal'perin V. G., Millionshchikov M. D., Simonov L. A *Prikladnaya gazovaya dinamika: v 2-kh chastyakh. Cpast' 1* [Applied Gas Dynamics: in 2 parts. Part 1]. Moscow, Central Aerohydrodynamic Institute Publ., 1948. 145 p.
4. Zhukovskii N. E. *Sobranie sochinenii. Tom. 2. Gidrodinamika* [Collected Works. Vol. 2. Hydrodynamics]. Moscow, GITTL Publ., 1949. 765 p.

5. Liepmann H. W., Puckett A. E. *Vvedenie v aerodinamiku szhimaemoi zhidkosti* [Introduction to the aerodynamics of a compressible fluid]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1949. 330 p.
6. Slezkin N. A. *Dinamika vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti* [Dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow, GITTL Publ., 1955. 520 p.
7. Levich V. G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physicochemical hydrodynamics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 700 p.
8. Birkhoff G. *Gidrodinamika. Metody. Fakty. Podobie* [Hydrodynamics. Methods. Facts. Similarity]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1963. 246 p.
9. Serrin J. *Matematicheskie osnovy klassicheskoi mekhaniki zhidkosti* [Mathematical Foundations of Classical Fluid Mechanics]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1963. 256 p.
10. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika: v 2-kh chastyah* [Theoretical hydromechanics: in 2 parts]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963.
11. Milne-Thomson L. M. *Teoreticheskaya gidrodinamika* [Theoretical hydrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1964. 660 p.
12. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statisticheskaya gidromekhanika: v 2-kh chastyah* [Statistical fluid mechanics: in 2 parts]. Moscow, Nauka Publ., 1965-1967.
13. Rouse H. *Mekhanika zhidkosti* [Fluid mechanics]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1967. 392 p.
14. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy: v 2-kh tomah* [Continuum mechanics: in 2 volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1970.
15. Sokol'nikov I. S. *Tenzornyi analiz. Teoriya i primeneniya v geometrii i v mekhanike sploshnykh sred* [Tensor analysis. Theory and Applications in Geometry and Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 376 p.
16. Il'yushin A. A. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1971–1990. 310 p.
17. Gladkov S. O. [On one proof of the uniqueness of the Stokes hydrodynamic solution]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Russian Physics Journal], 2018, vol. 61, no. 6 (726), pp. 103–105.
18. Gladkov S. O. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave. In: *Solid State Communications*, 1995, vol. 94, iss. 9, pp. 787–791. DOI: 10.1016/0038-1098(95)00003-8.
19. Gladkov S. O. [To the theory of convective gas motion in a cylindrical volume]. In: *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Applied Physics Letters], 2005, vol. 31, no. 12, pp. 71–78.
20. Gladkov S. O. [On calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the time of entrainment of a coaxial external cylinder]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2018, vol. 88, no. 3, pp. 337–341. DOI: 10.21883/JTF.2018.03.45587.2349.
21. Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Teoreticheskaya fizika: v 10 tomakh. Tom 10. Fizicheskaya kinetika* [Theoretical physics: in 10 volumes. Volume 10. Physical kinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 528 p.
22. Rezibua P. De Lerner M. *Klassicheskaya kineticheskaya teoriya zhidkostei i gazo*v [Classical kinetic theory of liquids and gases]. Moscow, Mir Publ., 1980. 423 p.
23. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [Chaotic dynamics of interacting pendulums (decision of synchronization problem)]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2019, no. 1, pp. 49–61.
24. Landau L. D., Lifshits E. M. *Statisticheskaya fizika. T. 5* [Statistical physics. Vol. 5]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 583 p.
25. Landau L. D., Lifshits E. M., Mekhanika. T. 1 [Mechanics. Vol. 1]. Moscow, Nauka, 1973. 207 p.

26. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [On analytical solutions of the quasiclassical kinetic equation of the highest-order perturbation theory in the approximation of the relaxation time]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Russian Physics Journal], 2018, vol. 61, no. 5 (725), pp. 28–35.
27. Gladkov S. O. [Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 1, pp. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
28. Gladkov S. O. [Application of the second covariant derivative from the vector function to the problems of hydrodynamics and elasticity theory]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 3, pp. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Гладков Сергей Октябринович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru.

*Зо Аунг* – аспирант кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: shwehtikeaung1993@gmail.com.

## INFORMATIONS ABOUT THE AUTHORS

*Sergey O. Gladkov* – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department No. 311 "Applied software and mathematical methods", Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru.

*Zau Aung* – Postgraduate Student, Department No. 311 "Applied software and mathematical methods", Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: shwehtikeaung1993@gmail.com

## ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

*Гладков С. О., Зо Аунг* Об уточнении уравнения Навье–Стокса применительно к наночастицам // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 77–91.
DOI: 10.18384-2310-7251-2021-1-77-91

## FOR CITATION

*Gladkov S. O., Zaw Aung.* On refining the Navier–Stokes equation in relation to nanoparticles. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 77–91.
DOI: 10.18384-2310-7251-2021-1-77-91