ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378.662.147:53

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-92-102

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ КУРСОВ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Бугримов А. Л., Ветшева А. А., Лобов В. И., Родэ С. В., Шампаров Е. Ю.

*Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина (Технологии.
Дизайн. Искусство)*

117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, Российская Федерация

Аннотация

Цель: продемонстрировать необходимость апелляции к основным положениям математики при построении физических моделей.

Процедура и методы. Сопоставление и анализ существующих подходов к методам вычислений работы в физике и соответствующих им методам математического анализа (методам высшей математики).

Результаты. Достоверные в эвристическом смысле результаты вычислений в рамках общефизических подходов в процессе обучения требуют демонстрации учёта основных методов высшей математики в построении физической картины процесса.

Теоретическая и/или практическая значимость. Продemonстрирована необходимость учёта межпредметных связей физики и высшей математики при вычислении механической работы.

Ключевые слова: механическая работа, поле потенциальных сил, центральное поле сил, потенциальная энергия, определенный интеграл

INTERSUBJECT RELATIONS OF GENERAL PHYSICS AND HIGHER MATHEMATICS COURSES IN THE STUDY OF MECHANICAL WORK

A. Bugrimov, A. Vetsheva, V. Lobov, S. Rode, E. Shamparov

Kosygin State University of Russia

ul. Sadovnicheskaya 33, 117997 Moscow, Russian Federation

© СС ВУ Бугримов А. Л., Ветшева А. А., Лобов В. И., Родэ С. В., Шампаров Е. Ю., 2021.

Abstract

Aim. We demonstrate the need to appeal to the main mathematical concepts in the construction of physical models.

Methodology. The existing approaches to methods of computing work in physics and corresponding methods of mathematical analysis (methods of higher mathematics) are compared and analyzed.

Results. Heuristically reliable results of calculations within the framework of general physical approaches in the learning process require the consideration of the main methods of higher mathematics in the construction of the physical picture of the process.

Research implications. The necessity of taking into account the intersubject relations of physics and higher mathematics in the calculation of mechanical work is demonstrated.

Keywords: mechanical work, field of potential forces, central field of forces, potential energy, definite integral

Введение

Статья имеет целью продемонстрировать необходимость учёта межпредметных связей физики и высшей математики при моделировании физических процессов, в частности, при вычислении механической работы.

Изучение механической работы

По определению работа силы $\vec{f}$ при движении по пути s (рис. 1) из точки 1 в точку 2 определяется как [1]:

$$\delta A = (\vec{f} d\vec{s}); \quad A_{1s2} = \int_{1s2} (\vec{f} d\vec{s}). \quad (1)$$

Рис. 1 / Fig. 1. Работа силы / Work of Force.

Источник: составлено авторами.

Однако, в простых случаях работу силы вычисляют не по формуле (1), а основываясь на очевидных понятиях. Так, например, работа однородного поля по перемещению тела массой m с высоты h_1 до h_2 записывается просто [1–5]¹:

$$A = mg(h_1 - h_2), \quad (2)$$

¹ Также см.: Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике; 3-е изд., испр. М.: Наука, 1990. 624 с.

после чего определяется потенциал поля:

$$U(h) = mgh + \text{const.} \quad (3)$$

Затем традиционно рассматривается поле потенциальных сил. В качестве основного рассматривается центральное поле сил:

$$f = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (4)$$

и доказывается, что работа по перемещению точечного тела массой m из точки 1 в точку 2 не зависит от радиусов-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, а зависит только лишь от расстояний этих точек от центра притяжения r_1 и r_2 (рис. 2).

Рис. 2 / Fig. 2. Перемещение в центральном поле сил / Moving in the central force field.

Источник: составлено авторами.

Однако, при вычислении работы поля или внешней силы по перемещению точечного тела массой m не удаётся проследить общность логики вычислений в соответствии с формулой (1) и преемственность методов математического анализа применительно к реализации вычислительных процессов. Так, например, согласно [1]: «При перемещении массы m из бесконечности гравитационные силы совершают работу»:

$$A = \int_r^\infty G \frac{Mm}{r^2} dr = G \frac{Mm}{r}. \quad (5)$$

При этом неясно, о какой работе идёт речь: о работе сил поля по перемещению массы (из бесконечности в точку, удалённую от центра на расстояние r) или, наоборот, о работе внешней силы по перемещению массы из точки r в бесконечность (интегрирование в пределах от r до бесконечности).

Согласно [2], работа на всём пути:

$$A = \int_n^{n_2} f(r) dr. \quad (6)$$

Делается замечание: «Последнее выражение зависит, очевидно, только от вида функции $f(r)$ и от значений r_1 и r_2 . От вида траектории оно никак не зависит». Примеров вычислений работы не приводится.

Согласно [3], «рассматривается работа по удалению тела массой m от Земли. На расстоянии R на тело действует сила:

$$F = G \frac{Mm}{R^2}. \quad (7)$$

При перемещении этого тела на расстояние dR затрачивается работа:

$$dA = -G \frac{Mm}{R^2} dR. \quad (8)$$

Знак минус появляется потому, что сила и перемещение в данном случае противоположны по направлению».

В данном случае неясно, какие силы совершают работу. Если внешняя, то направление силы совпадает с перемещением. Если силы притяжения, то речь должна идти о работе сил поля, тогда действие силы также совпадает с перемещением.

В справочнике по физике Б. М. Яворского и А. А. Детлафа¹ отмечается, что «в потенциальном поле центральных сил на материальную точку действуют силы $\vec{F}$, которые всюду направлены вдоль прямых, проходящих через одну и ту же точку – центр сил, и зависят только от расстояния r до центра сил»:

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (9)$$

и считается, что «если материальная точка притягивается к центру сил, то»

$$F_r(r) = -|\vec{F}| < 0. \quad (10)$$

«Элементарная работа силы $\vec{F}$ $\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_r(r) dr$ ».

Ясно, что при таком определении элементарная работа должна быть отрицательной.

В [4] определяется работа внешней силы при перемещении материальной точки из близкого положения в удалённое:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{внешн}} dr. \quad (11)$$

При этом направление действия силы совпадает с направлением перемещения. Связь между работой поля по перемещению материальной точки и работой внешней силы по перемещению материальной точки не анализируется.

В [5] подчёркивается, что «гравитационная сила $\vec{F}_r$ направлена против радиуса-вектора и её проекция на последний отрицательна, т. е.»:

¹ Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике; 3-е изд., испр. М.: Наука, 1990. 624 с.

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2}. \quad (12)$$

При этом направление движения точки (также против радиуса-вектора) отрицательным знаком не снабжается.

Реализация межпредметных связей курсов высшей математики и общей физики при изучении механической работы

В классических пособиях [6; 7] понятие потенциальной энергии определяется вполне конструктивно, но – в силу определённых ограничений – без использования идей интегрального исчисления.

Для вычисления работы поля или внешней силы по перемещению массы с точки зрения единообразия подходов к вычислениям в соответствии с формулой (1), а также с учётом межпредметных связей с методами математического анализа применительно к реализации вычислительных процессов прежде всего следует обратить внимание на понятие определённого интеграла.

Как известно (например, [8]), определённый интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b (рис. 3) есть предел интегральных сумм при измельчении отрезков разбиения ($\max(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$):

$$\lim_{\max(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (13)$$

Рис. 3 / Fig. 3. Определённый интеграл / Definite integral.

Источник: оставлено авторами.

Одним из свойств определённого интеграла является изменение его знака при изменении пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (14)$$

Чтобы сохранить смысл определённого интеграла (площади под кривой $f(x)$), в случае интегрирования от большего значения предела к меньшему следует поставить знак «минус» и записать:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (15)$$

Это и понятно, поскольку теперь в соотношении (13) $\Delta x_i = x_i - x_{i+1} < 0$.

Кроме того, запись (1) никак не учитывает направление вектора силы $\vec{f}$ относительно радиуса-вектора, а лишь только взаимное направление $\vec{f}$ и $d\vec{s}$.

Приведённые соображения лежат в основе определения работы однородного поля по перемещению точечного тела массой m с высоты h_1 до h_2 (рис. 4).

Рис. 4 / Fig. 4. Работа однородного поля по перемещению точечного тела массой m с высоты h_1 до h_2 / Work of a homogeneous field on the displacement of a point body of mass m from a height of h_1 to h_2 .

Источник: составлено авторами.

В выбранной системе координат Oxy перемещение и сила тяжести имеют одинаковое направление, переменная интегрирования изменяется в пределах от 0 до $h_1 - h_2$:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (\vec{f} d\vec{s}) = \int_0^{h_1-h_2} mg dx = mg(h_1 - h_2) = \\ &= mgh_1 - mgh_2 = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U. \end{aligned} \quad (16)$$

Силы поля совершают работу за счёт убыли потенциальной энергии.

Подъём тела. Работа внешних сил против сил поля:

$$\vec{f}_{\text{поля}} = m\vec{g}. \quad (17)$$

Направление действия внешних сил совпадает с направлением перемещения материальной точки. С учётом равенства:

$$f_{\text{внешн}} = mg \quad (18)$$

и выбранной системы координат (рис. 5):

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (\vec{f} d\vec{s}) = \int_{h_1}^{h_2} mg dx = mg(h_2 - h_1) = \\ &= mgh_2 - mgh_1 = U_2 - U_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Работа внешней силы идёт на увеличение потенциальной энергии материальной частицы.

Рис. 5 / Fig. 5. Работа внешней силы по перемещению тела массой m с высоты h_1 до h_2 / The work of an external force to move a body of mass m from a height of h_1 to h_2 .
Источник: составлено авторами.

Работа поля по перемещению точечного тела массой m из точки, находящейся на расстоянии от центра притяжения r_1 до r_2 (рис. 6):

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (\vec{f} d\vec{s}) = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = -GMm \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = G \frac{Mm}{r_2} - G \frac{Mm}{r_1} = \\ &= -G \frac{Mm}{r_1} - \left(-G \frac{Mm}{r_2} \right) = U_1 - U_2, \end{aligned} \quad (20)$$

откуда естественным образом следует понятие потенциальной энергии:

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}. \quad (21)$$

Рис. 6 / Fig. 6. Работа центрального поля сил / Central force field work.

Источник: составлено авторами.

Работа поля осуществляется за счёт убыли потенциальной энергии частицы. Полезна демонстрация независимости результата от выбора системы координат.

Рис. 7 / Fig. 7. Работа силы в системе координат / Force work in the coordinate system

Источник: составлено авторами.

Следует учесть (рис. 7): сила и перемещение – однонаправленны! Необходимо также учесть изменение вида функции (12) в новой системе координат:

$$f = G \frac{Mm}{(r_1 - x)^2}. \quad (22)$$

Поэтому:

$$A = \int_0^{r_1 - r_2} G \frac{Mm}{(r_1 - x)^2} dx = GMm \frac{1}{r_1 - x} \Big|_0^{r_1 - r_2} = G \frac{Mm}{r_2} - G \frac{Mm}{r_1}. \quad (23)$$

Следует рассмотреть работу перемещения тела под действием внешней силы от расстояния r_1 до r_2 (рис. 8):

$$A = \int_1^2 (\vec{f} d\vec{s}) = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = -G \frac{Mm}{r_2} - \left(-G \frac{Mm}{r_1} \right) = U_2 - U_1. \quad (24)$$

При этом очевидно, что работа внешних сил идёт на увеличение потенциальной энергии от U_1 до U_2 .

Рис. 8 / Fig. 8. Работа внешней силы / External force work.

Источник: составлено авторами.

Рассмотренные примеры вычислений не зависят от вида поля: поля гравитационных сил или поля электростатических сил.

Вывод

Приведённые выше соображения демонстрируют необходимость учёта межпредметных связей, которые с необходимостью возникают при изучении любых разделов физики и тесно связанных с нею разделов высшей математики.

Статья поступила в редакцию 23.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учеб. пособие: для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 560 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. Том 1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. М.: Наука, 1973. 512 с.
3. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов; 11-е изд., стер. М.: Академия, 2006. 560 с.
4. Александров Н. В., Яшкин А. Я. Курс физики. Механика: учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед ин-тов. М.: Просвещение, 1978. 416 с.

5. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. Т. 1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. М.: Наука, 1974. 336 с.
6. Физика: 10 класс: базовый и углубленный уровни: учебник для обучающихся общеобразовательных организаций / Хижнякова Л. С., Синявина А. А., Холина С. А., Кудрявцев В. В. М.: Вентана-Граф, 2017. 400 с.
7. Физика: 10 класс: базовый уровень: углубленный уровень: учебник для обучающихся общеобразовательных учреждений; 2-е изд., доп. и испр./ Грачев А. В., Погожев А. В., Салецкий А. М., Боков П. Ю. М.: Вентана-Граф, 2019. 464 с.
8. Фиктенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2; 14-е изд, стереот. СПб.: Лань, 2020. 800 с.

REFERENCES

1. Sivukhin D. V. *Obshchii kurs fiziki. V 5 t. T. I. Mekhanika* [General course of physics. In 5 volumes. Vol. I. Mechanics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005. 560 p.
2. Savelev I. V. *Kurs obshchei fiziki. Tom 1. Mekhanika, kolebaniya i volny, molekulyarnaya fizika* [General physics course. Volume 1. Mechanics, Oscillations and Waves, Molecular Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 512 p.
3. Trofimova T. I. *Kurs fiziki* [Physics course]. Moscow, Akademiya Publ., 2006. 560 p.
4. Aleksandrov N. V., Yashkin A. Ya. *Kurs fiziki. Mekhanika* [Physics course. Mechanics]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1978. 416 p.
5. Zisman G. A., Todes O. M. *Kurs obshchei fiziki. T. 1. Mekhanika, molekulyarnaya fizika, kolebaniya i volny* [General physics course. Vol. 1. Mechanics, Molecular Physics, Oscillations and Waves]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 336 p.
6. Khizhnyakova L. S., Sinyavina A. A., Kholina S. A., Kudryavtsev V. V. *Fizika: 10 klass: bazovyi i uglublennyy urovni* [Physics: Grade 10: basic and advanced levels]. Moscow, Ventana-Graf Publ., 2017. 400 p.
7. Grachev A. V., Pogoshev A. V., Saletskii A. M., Bokov P. Yu. *Fizika: 10 klass: bazovyi uroven': uglublennyy uroven'* [Physics: Grade 10: basic level: advanced level]. Moscow, Ventana-Graf Publ., 2019. 464 p.
8. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. V 3-kh tt. Tom 2* [Differential and integral calculus course. In 3 vols. Volume 2]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2020. 800 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Ветшева Алиса Александровна – заведующий лабораторией кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: alsavetsheva@mail.ru;

Лобов Владимир Иванович – старший преподаватель кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: lobov-vi@rguk.ru;

Родэ Сергей Витальевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: rode-sv@rguk.ru;

Шампаров Евгений Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Departmental Head, Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Alisa A. Vetsheva – Laboratory Head, Laboratory of the Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: alsavetsheva@mail.ru;

Vladimir I. Lobov – Senior Lecturer, Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: lobov-vi@rguk.ru;

Sergey V. Rode – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Evgeniy Yu. Shamparov – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бугримов А. Л., Ветшева А. А., Лобов В. И., Родэ С. В., Шампаров Е. Ю. Межпредметные связи курсов общей физики и высшей математики при изучении механической работы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 92–102.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-92-102

FOR CITATION

Bugrimov A. L., Vetsheva A. A., Lobov V. I., Rode S. V., Shamparov E. Yu. Intersubject relations of General physics and higher mathematics courses in the study of mechanical work. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2021. no. 1. pp. 92–102.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-92-102