УДК 519.852
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-103-119

ИЗУЧЕНИЕ СЛУЧАЯ ВЫРОЖДЕННОСТИ ОПОРНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Хасанов А. С.

Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация

Аннотация
Целью данной статьи является описание случая вырожденности опорных решений в симплекс-методе для использования преподавателями как на занятиях, так и при организации самостоятельной работы студентов.
Процедура и методы. Формулируются основные понятия линейного программирования и рассматриваются проблемы, вызванные избыточными ограничениями в условиях задачи. Приведены причины возникновения такого особого случая в симплексном методе, как вырожденность опорных решений. Описаны случаи временной вырожденности и зацикливания. Приведено правило, позволяющее избежать зацикливания. Все вышесказанное проиллюстрировано на конкретных примерах. Поскольку при переходе к общему случаю возникает проблема, связанная с невозможностью видеть математические объекты, используется метод визуализации математических объектов.
Результаты. Приведено подробное описание случая вырожденности опорных решений при применении симплекс-метода.
Практическая значимость работы обусловлена возможностью её использования при изучении одного из четырёх особых случаев, возникающих при применении симплекс-метода.
Ключевые слова: математическое программирование, линейное программирование, симплекс-метод, опорные решения, вырожденные опорные решения

STUDY OF THE DEGENERACY CASE OF BASIC FEASIBLE SOLUTIONS IN THE SIMPLEX METHOD

A. Khasanov

Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract
Aim. We describe the degeneracy case of basic feasible solutions in the simplex method for use by lecturers both in the classroom and in self-study of students.
Methodology. The basic concepts of linear programming are formulated and the problems caused by excessive constraints in the problem conditions are considered. The reasons for the occurrence of such a special case in the simplex method as the degeneracy of basic feasible

solutions are presented. The cases of temporal degeneracy and cycling are described. A rule is given to avoid cycling. All of the above is illustrated by concrete examples. Since the transition to the general case raises a problem related to the inability to see mathematical objects, the method of visualization of mathematical objects is used.
Results. A detailed description of the degeneracy case of basic feasible solutions in the simplex method is presented.
Research implications. The work is of practical significance, since it can be used in the study of one of the four special cases that arise when using the simplex method.
Keywords: mathematical programming, linear programming, simplex method, basic feasible solutions, degenerate basic feasible solutions.

Введение

Общая задача линейного программирования имеет вид:

$$z = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le (\ge) b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in I. \tag{3}$$

Допустимым решением называется последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям системы ограничений (2) и условиям неотрицательности (3). Множество допустимых решений называется областью допустимых решений. Оптимальным решением называется такое допустимое решение, при котором целевая функция достигает максимума (или минимума). Задача называется разрешимой, если имеет хотя бы одно оптимальное решение. В задаче (1)–(3) требуется найти множество всех оптимальных решений и искомое значение экстремума целевой функции.

Последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ рассматривается как вектор n-мерного пространства R^n. Слова «вектор» и «точка» используются как синонимы для обозначения элемента R^n. В n-мерном координатном пространстве $Ox_1 \ldots x_n$ последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ можно интерпретировать и как точку $M(x_1, \ldots, x_n)$, и как вектор с началом $O(0, \ldots 0)$ и концом $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Если в исходной задаче (1)–(3) к целевой функции прибавить число или её умножить на (-1) и заменить задачу минимизации (максимизации) задачей максимизации (минимизации), то последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ является оптимальным решением новой задачи тогда и только тогда, когда она является оптимальным решением исходной задачи, т. е. можно считать, что в равенстве (1) $c_0 = 0$, и рассматривать только задачи максимизации.

В пространстве R^n отрезком с концами в точках X_1 и X_2 называется совокупность точек:

$$X = (1-t)X_1 + tX_2, \text{ где } 0 \le t \le 1. \qquad (4)$$

Точка X называется выпуклой линейной комбинацией точек $X_1, \ldots, X_k$, если

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k, \qquad (5)$$

где $\alpha_i \ge 0 \, \forall i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$ Формула (4) является частным случаем формулы (5) при $k = 2$. Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок с концами в этих точках. Легко доказать, что выпуклое множество вместе с любыми своими точками $X_1, X_2, \ldots, X_k$ содержит все выпуклые линейные комбинации этих точек.

Можно доказать, что область допустимых решений задачи (1)–(3) является выпуклым множеством. Точка X области допустимых решений задачи (1)–(3) называется её вершиной, если её нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации двух различных точек этой области, отличных от точки X. Подмножество R^n называется ограниченным, если существуют числа m_1 и m_2 такие, что для любой точки $(x_1, ..., x_n)$ этого множества неравенства $m_1 \le x_i \le m_2$ выполняются для всех $i = 1, 2, ..., n$. В общем случае условия неотрицательности (3) относятся не ко всем переменным, а только к тем, индексы которых принадлежат множеству I. Но если переменная x_j не связана с условием неотрицательности, то её можно заменить разностью двух неотрицательных переменных: $x_j = x_j' - x_j''$, где $x_j' \ge 0, x_j'' \ge 0.$ Далее будем считать, что $x_j \ge 0 \, \forall j$.

В этой работе рассматриваются задачи, в которых область допустимых решений является непустым ограниченным множеством. В этом случае можно доказать [1], что справедливы следующие утверждения:

1) задача линейного программирования разрешима;
2) область допустимых решений имеет непустой конечный набор вершин;
3) хотя бы одна вершина является оптимальным решением;
4) если $X_1, ..., X_k$ – набор всех оптимальных вершин области допустимых решений, то множеством всех оптимальных решений является множество всех выпуклых линейных комбинаций этих вершин.

Многие экономические задачи [1–3], а порой неожиданно [4], приводят к задаче линейного программирования. Так как линейное программирование является частью высшей математики, то изучая линейную алгебру, мы изучаем инструменты линейного программирования, а изучая линейное программирование – инструменты для решения экономических задач линейной оптимизации [5; 6][1]. Основным методом решения задач линейного программирования явля-

[1] Также см.: Справочник для студентов технических вузов: Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / Полянин А. Д., Полянин В. Д., Попов В. А., Путятин Б. В., Сафрай В. М., Черноуцан А. И. М.: Издательство АСТ, 2002. 735 с.

ется симплекс-метод. При применении этого метода могут встретиться четыре особых случая [2]: вырожденность, альтернативные решения, неограниченные решения, отсутствие допустимых решений. В данной работе мы рассматриваем случай вырожденности (в работе [7] нами рассматривались задачи линейного программирования с неограниченными областями допустимых решений).

При изучении линейного программирования особое значение приобретают вопросы организации самостоятельной работы студентов [8]. Кроме индивидуальных заданий [9–11], актуальным является создание комплекса материалов для самостоятельного изучения студентами. Тогда, рассмотрев на занятиях классический случай единственного решения и коротко обозначив особые случаи, подробное изучение особых случаев может быть оставлено для самостоятельного изучения студентами. Этой цели посвящена данная работа. Основную часть теории и методов линейного программирования можно найти в работах [1; 2; 12; 13].

Вырожденные опорные решения

Рассмотрим следующую задачу с двумя переменными:

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max, \tag{6}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{8}$$

Перейдём к точечной интерпретации допустимых решений (x_1, x_2) на координатной плоскости Ox_1x_2. Область допустимых решений этой задачи состоит из точек ΔOAB (см. рис. 1):

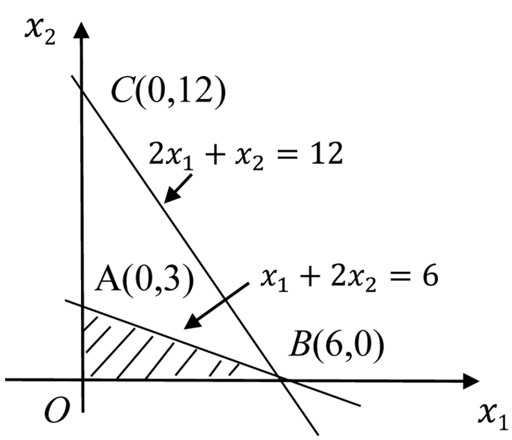

Рис. 1 / Fig. 1. Область допустимых решений задачи (6)–(8) /
Domain of feasible solutions to problem (6)–(8).

Источник: составлено автором.

Так как область допустимых решений является непустым ограниченным множеством, то задача разрешима. Так как точки $O(0,0)$, $A(0,3)$, $B(6,0)$ – вершины области допустимых решений и среди них есть оптимальное решение, то (6,0) – оптимальное решение, $z_{\max} = z(6,0) = 18$ ($z(0,0) = 0 < 18$, $z(0,3) = 3 < 18$). Задача имеет единственное решение.

В следующем разделе мы рассмотрим решение этой задачи симплекс-методом. Но симплекс-метод применяется для решения канонической задачи. Задачу линейного программирования называют канонической, если в ней система ограничений является системой уравнений и все переменные удовлетворяют условиям неотрицательности. Если присутствуют неравенства, то перейти от неравенства типа «≤» («≥») к соответствующему уравнению можно путем прибавления к левой части неравенства (вычитания из левой части неравенства) неотрицательной, так называемой дополнительной переменной. Эти переменные вводятся в целевую функцию с нулевым коэффициентом и отбрасываются при переходе от решения канонической задачи к решению исходной задачи. В дальнейшем будем считать, что правые части уравнений системы ограничений канонической задачи неотрицательны. Если в каком-нибудь уравнении правая часть отрицательна, то обе части этого уравнения умножается на (–1). Каноническую задачу можно записать в виде:

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_j \geq 0 \,\forall j. \tag{11}$$

где $b_i \geq 0 \forall i$.

Итак, перейдём от задачи (6)–(8) к канонической задаче:

$$z = 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max, \tag{12}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 12, \end{cases} \tag{13}$$

$$x_j \geq 0 \,\forall j. \tag{14}$$

Система (13) является разрешённой системой, в которой x_3 и x_4 – разрешённые, а x_1 и x_2 – свободные неизвестные. Разрешённые неизвестные называются базисными переменными, а свободные неизвестные – небазисными. Присвоим небазисным переменным нулевые значения. Получим частное решение (0, 0, 6, 12), которое называется базисным решением с базисом (x_3, x_4). О системе (13) говорят, что она приведена к базису (x_3, x_4). Найдём все базисные решения системы (13) методом перебора. Для перехода к новому базису достаточно выполнить жорданово преобразование с разрешающим элементом, являющимся коэффициентом при некоторой небазисной переменной x_j. При таком преобразовании переменная x_j вводится в базис, а одна из переменных выводится из базиса. Так как в этой задаче из четырёх переменных два являются базисными, то переберём $C_4^2 = 6$ вариантов. Результаты перебора приведены в табл. 1. В столбце «*Б*» этой таблицы приведены базисы, а в первом столбце приведены их номера (начальному базису присвоен нулевой номер). Разрешающие элементы заключены в рамку и выделены жирным шрифтом. Из табл. 1 следует, что у системы (13) четыре базисных решения. Допустимые базисные решения канонической задачи называются её опорными решениями. Следовательно, в этой задаче (0, 0, 6, 12), (6, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 9) – опорные решения, а (0,12, – 18,0) не является опорным решением, так как не удовлетворяет условиям (14).

Таблица 1 / Table 1

Базисные решения системы (13) и их базисы / Basic solutions of system (13) and their bases

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	*b*	Пояснение
0	x_3	1	2	1	0	6	(0, 0, 6, 12) – базисное решение с базисом *Б*
	x_4	2	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	1	12	= (x_3, x_4). Вводится в базис x_2, выводится x_4.
1	x_3	–3	0	1	–2	–18	(0,12, – 18,0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_2	$\boxed{\mathbf{2}}$	1	0	1	12	= (x_3, x_2). Вводится в базис x_1, выводится x_2.
2	x_3	0	$\boxed{\mathbf{3/2}}$	1	–1/2	0	(6, 0, 0, 0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_1	1	1/2	0	1/2	6	= (x_3, x_1). Вводится в базис x_2, выводится x_3.
3	x_2	0	1	2/3	$\boxed{\mathbf{-1/3}}$	0	(6, 0, 0, 0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_1	1	0	–1/3	2/3	6	= (x_2, x_1). Вводится в базис x_4, выводится x_2.
4	x_4	0	–3	–2	1	0	(6, 0, 0, 0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_1	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	1	0	6	= (x_4, x_1). Вводится в базис x_2, выводится x_1.
5	x_4	3/2	0	–1/2	1	9	(0, 3, 0, 9) – базисное решение с базисом *Б*
	x_2	1/2	1	1/2	0	3	= (x_4, x_2). Все C_4^2 вариантов рассмотрены.

Источник: составлено автором.

Можно доказать [1], что допустимое решение (x_1, ..., x_n) канонической задачи является опорным решением тогда и только тогда, когда оно является вершиной её области допустимых решений. Таким образом, в задаче (12)–(14) область допустимых решений имеет три вершины: (0, 0, 6, 12), (6, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 9). На рис. 1 вершине (0, 0, 6, 12) соответствует точка *O* (точка *O* и вершина (0, 0, 6, 12) определяются условиями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$), вершине (0, 3, 0, 9) – точка *A* (точка *A* и вершина (0, 3, 0, 9) определяются условиями $x_1 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 6 \Leftrightarrow x_3 = 0$), а вершине (6, 0, 0, 0) – точка *B* (точка *B* и вершина (6, 0, 0, 0) определяются условиями $x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 6$). Заметим, что базисному решению (0,12, – 18,0) на рис. 1 соответствует точка *C*(0,12). Опорные решения, у которых базисные координаты положительны, называются невырожденными опорными решениями. Если хотя бы одна базисная координата равна нулю, то опорное решение называется вырожденным. В нашей задаче опорные решения (0, 0, 6, 12) и (0, 3, 0, 9) являются невырожденными, а опорное решение (6, 0, 0, 0) – вырожденное. Из табл. 1

мы видим, что у вырожденного опорного решения может быть несколько базисов. Базис же невырожденного опорного решения однозначно определяется по его положительным координатам. Причину вырожденности опорного решения (6, 0, 0, 0) можно увидеть на рис. 1, на котором опорному решению (6, 0, 0, 0) соответствует точка B. На плоскости для определения точки достаточно двух пересекающихся прямых, а точка B является точкой пересечения трёх прямых $x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 6$, $2x_1 + x_2 = 12$. Эта точка переопределена. Вырожденность в канонической задаче (12)–(14) объясняется тем, что в исходной задаче (6)–(8) присутствует избыточное ограничение $2x_1 + x_2 \le 12$.

Вырожденность при применении симплекс-метода

Симплекс-метод – метод последовательного улучшения опорных решений задачи (9)–(11) путём перехода от одного базиса опорного решения к другому базису опорного решения. Пусть, для определённости, система ограничений приведена к базису $(x_1, x_2, ..., x_m)$ опорного решения $X_1 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, где $b_i \ge 0 \forall i$. Запишем целевую функцию (9) в виде уравнения $z - c_1x_1, - ... - c_mx_m - ... - c_nx_n = 0$ добавим это уравнение к системе ограничений (10) (запишем его под системой ограничений), исключим базисные переменные из целевой функции и заполним симплекс-таблицу (см. табл. 2). Последняя строка этой таблицы называется z-строкой или строкой оценок, в ней Δ_j – коэффициент при небазисной переменной x_j; обычно столбец коэффициентов при z не включается в эту таблицу. Легко убедиться путём простой подстановки, что z_0 – значение целевой функции на опорном решении $X_1 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$.

Таблица 2 / Table 2

Симплекс-таблица / Simplex table

Б	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n	b
x_1	1	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	0	…	1	…	0	$a_{i,m+1}$	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
z	0	…	0	…	0	Δ_{n+1}	…	Δ_j		Δ_n	z_0

Источник: составлено автором.

Пусть в табл. 2 выбран отличный от нуля коэффициент a_{ij} при небазисной переменной x_j в качестве разрешающего элемента для выполнения жорданова преобразования и перехода к другому базису опорного решения. После выполнения жорданова преобразования с разрешающим элементом a_{ij} в базис вводится переменная x_j, а из базиса выводится переменная x_i. В результате получим следующую таблицу (см. табл. 3)

Таблица 3 / Table 3

Симплекс-таблица, приведенная к другому базису / Simplex table reduced to another basis

Б	x_1	...	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n	b
x_1	1	...	a'_{1i}	…	0	$a'_{1,m+1}$	…	0	…	a'_{1n}	$b_1 - a_{1j}b_i/a_{ij}$
…	…	...	...	…	…	…	…	...	…	...	...
x_j	0	...	a'_{ij}	…	0	$a'_{i,m+1}$	…	1	…	a'_{in}	b_i/a_{ij}
…	…	...	...	…	…	...	…	...	…	...	...
x_m	0	...	a'_{mj}	…	1	$a'_{m,m+1}$	…	0	…	a'_{mn}	$b_m - a_{mj}b_i/a_{ij}$
z	0	...	Δ'_j	…	0	Δ'_{m+1}	…	0	…	Δ'_n	$z_0 - \Delta_j b_i/a_{ij}$

Источник: составлено автором.

Новому базису соответствует новое базисное решение. Из столбца b табл. 3 видно, что оно будет опорным, если $a_{ij} > 0$ (тогда $b_i/a_{ij} \geq 0$) и отношение b_i/a_{ij} является наименьшим среди всех отношений вида b_k/a_{kj}, где $a_{kj} > 0$ (тогда $b_k - a_{kj}b_i/a_{ij} = a_{kj}(b_k/a_{kj} - b_i/a_{ij}) \geq 0$). Заметим, что при $a_{kj} \leq 0$ неотрицательность величин $b_k - a_{kj}b_i/a_{ij}$ столбца b табл. 3 выполняется автоматически, так как $b_k \geq 0$, $b_i/a_{ij} \geq 0$. Отношения b_k/a_{kj}, вычисленные для $a_{kj} > 0$, называются допустимыми отношениями и для этих отношений далее в симплекс-таблице отведём справа от столбца правых частей столбец θ. Если $a_{kj} \leq 0$, то в k-й строке столбца θ ставится прочерк. Минимальное допустимое отношение обозначим символом θ_0. Из сказанного следует правило выбора разрешающего элемента и переменной, выводимой из базиса, при переходе от одного базиса опорного решения к другому базису опорного решения, если в базис вводится переменная x_j, т. е. разрешающий элемент выбирается из столбца x_j: разрешающий элемент и выводимая из базиса переменная должны находиться в той же строке, в которой расположено минимальное допустимое отношение θ_0. Если отношение θ_0 встречается в нескольких строках, то из этих строк выбирается любая. Пусть, для определённости, $\theta_0 = b_i/a_{ij}$. Из z-строки табл. 3 следует формула для приращения целевой функции при таком переходе:

$$\Delta z = -\Delta_j \theta_0. \tag{15}$$

Из формулы (15) следует, что если симплекс-таблица приведена к базису невырожденного опорного решения, то в задаче максимизации опорное решение будет улучшено, т. е. значение целевой функции станет ближе к максимуму, если в базис ввести переменную x_j, для которой оценка $\Delta_j < 0$, так как в этом случае в табл. 2 $b_j > 0 \forall i$, следовательно, $\theta_0 > 0$ и $\Delta z = -\Delta_j\theta_0 > 0$. На этом основано правило выбора переменной, вводимой в базис, в методе последовательного улучшения опорных решений: в базис вводится переменная x_j, входящая в z-строку с отрицательным коэффициентом $\Delta_j < 0$. Если таких переменных несколько, то можно выбрать любую из них. В случае вырожденного опорного решения это правило может не дать улучшения опорного решения, если $\theta_0 = 0$, так как в этом случае $\Delta z = -\Delta_j\theta_0 = 0$. В этом случае вместо улучшения мы перейдём к другому базису того же вырожденного опорного решения, так как при $\theta_0 = b_i/a_{ij} = 0$ столбцы b таблиц 2 и 3 совпадают.

Приведём достаточное условие максимума, используемое при применении симплекс-метода: если симплекс-таблица приведена к базису опорного решения X' и в z-строке $\Delta_j \geq 0 \forall$j, то опорное решение является оптимальным. Действительно, из определения z-строки следует, что $z = z_0 - \Sigma_{j\in J}\Delta_j x_j$ для любого допустимого решения $(x_1, ..., x_n)$, где z_0 – значение целевой функции на опорном решении X', J – множество индексов небазисных переменных. Так как $\Delta_j \geq 0\forall$j и $x_j \geq 0\forall$j, то $z \leq z_0$ в области допустимых решений. Если симплекс-таблица приведена к базису оптимального опорного решения X' и в z-строке коэффициенты всех небазисных переменных положительны, то оптимальное решение X' является единственным. Действительно, из формулы $z = z_0 - \Sigma_{j\in J}\Delta_j x_j$ следует, что $z = z_0$ только при нулевых значениях небазисных переменных, но таким опорным решением является только X'.

Заметим только, что, если симплекс-таблица приведена к базису оптимального опорного решения X' и в z-строке коэффициент Δ_j при небазисной переменной x_j равен нулю и минимальное допустимое отношение θ_0, вычисленное по положительным элементам a_{kj} столбца x_j, положительное число, то существуют альтернативные решения. Действительно, пусть, для определённости, $\theta_0 = b_i/a_{ij}$. Если ввести в базис переменную x_j, то разрешающим элементом будет a_{ij}, переменная x_i выводится из базиса, из формулы (15) следует, что значение целевой функции не изменится, так как $\Delta z = -\Delta_j\theta_0 = 0$. Мы получим новое оптимальное опорное решение, так как в табл. 2 $x_j = 0$, а в табл. 3 $x_j = b_i/a_{ij} = \theta_0 > 0$.

Рассмотрим решение задачи (12)–(14) симплекс-методом (табл. 4).

Таблица 4 / Table 4

Решение задачи (12)–(14) симплекс-методом / Solution of problem (12)–(14) by the simplex method

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	*b*	θ	Пояснение
0	x_3	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	1	0	6	**3**	(0, 0, 6, 12) – опорное решение. $z_0 = 0$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_2, выводится x_3 из базиса.
	x_4	2	1	0	1	12	12	
	z	–3	–1	0	0	0		
1	x_2	0,5	1	0,5	0	3	6	(0, 3, 0, 9) – опорное решение. $z_0 = 3$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_1. θ_0 повторяется. Выводится x_4 из базиса.
	x_4	$\boxed{\mathbf{1{,}5}}$	0	–0,5	1	9	**6**	
	z	–2,5	0	0,5	0	3		
2	x_2	0	1	$\boxed{\mathbf{2/3}}$	–1/3	0	0	(6, 0, 0, 0) – вырожденное опорное решение. $z_0 = 18$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_3, выводится x_2 из базиса
	x_1	1	0	–1/3	2/3	6	–	
	z	0	0	–1/3	5/3	18		
3	x_3	0	1,5	1	–0,5	0		Перешли к другому базису опорного решения (6, 0, 0, 0). Признак оптимальности выполняется. Единственное решение.
	x_1	1	0,5	0	0,5	6		
	z	0	0,5	0	1,5	18		

Источник: составлено автором.

В нулевом базисе значение $\Delta_2 < 0$ указывает на рост целевой функции по переменной x_2, а значение $\theta_0 = 3$ даёт нам максимальное приращение этой переменной. На рис. 1 мы видим, что при таком приращении мы перейдём от точки O к точке A. Но если мы нарушим правило выбора переменной, выводимой из базиса, и выведем переменную x_4, то на рис. 1 мы видим, что будет осуществлён переход от точки O к точке C, которая не принадлежит области допустимых решений задачи (6)–(8). В первом базисе в столбце θ минимальное допустимое отношение встречается более одного раза. Это привело к неоднозначности при выборе переменной, выводимой из базиса. Из-за этого в следующем базисе появилась вырожденность. Заметим, что в одном базисе одного и того же вырожденного опорного решения достаточное условие оптимальности выполняется, а в другом – нет. Итак, оптимальным решением задачи (12)–(14) является (6, 0, 0, 0) и $z_{\max} = 18$. Решением исходной задачи (6)–(8) является (6, 0) и $z_{\max} = z(6, 0) = 18$.

В рассмотренной задаче вырожденность появилась на завершающем этапе, и вырожденное опорное решение является оптимальным. Рассмотрим следующую задачу с двумя переменными:

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max, \tag{16}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \end{cases} \tag{17}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{18}$$

Перейдём к канонической задаче и решим её симплекс-методом (табл. 5).

Таблица 5 / Table 5

Решение задачи (16)–(18) симплекс-методом / Solution of problem (16)–(18) by the simplex method

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	b	θ	Пояснение
0	x_3	1	1	1	0	1	1	(0, 0, 1, 2) – опорное решение. $z_0 = 0$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_2. θ_0 повторяется. Выводится x_4 из базиса.
	x_4	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	0	1	2	1	
	z	−2	−1	0	0	0		
1	x_3	$\boxed{\mathbf{0{,}5}}$	0	1	−0,5	0	**0**	(0, 1, 0, 0) – вырожденное опорное решение. $z_0 = 1$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_1, выводится x_3 из базиса.
	x_2	0,5	1	0	0,5	1	2	
	z	−1,5	0	0	0,5	1		
2	x_1	1	0	2	−1	0	–	Перешли к другому базису опорного решения (0, 1, 0, 0). Нет признака оптимальности. Вводится x_4, выводится x_2.
	x_2	0	1	−1	$\boxed{\mathbf{1}}$	1	**1**	
	z	0	0	3	−1	1		
3	x_1	1	1	1	0	1		(1, 0, 0, 1) – невырожденное опорное решение. $z_0 = 2$. Признак оптимальности выполняется. Единственное решение.
	x_4	0	1	−1	1	1		
	z	0	1	2	0	2		

Источник: составлено автором.

Легко убедиться на координатной плоскости, что в задаче (16)–(18) есть избыточное условие. По этой причине при решении канонической задачи θ_0 встречается более одного раза, то есть появляется вырожденное опорное решение. Вырожденность в задаче является временной, оптимальным решением канонической задачи является невырожденное опорное решение (1, 0, 0, 1), $z_{\max} = 2$. Ответ исходной задачи (16)–(18): (1, 0), $z_{\max} = 2$.

Зацикливание

Рассмотрим решение следующей задачи симплекс-методом [1; 14]:

$$Z(X) = x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max, \tag{19}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0, \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1, \end{cases} \tag{20}$$

$$x_j \geq 0\, \forall j. \tag{21}$$

Таблица 6 / Table 6

Решение задачи (19)–(21) до появления цикла из шести итераций / Solution of problem (19)–(21) before the appearance of a six iterations cycle

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*b*	θ	Пояснение
0	x_1	1	0	**1**	–2	–3	4	0	0	**0**	$X_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ – вырожден-ное опорное решение. Введём x_3 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_1. Переход к другому базису X_1.
	x_2	0	1	4	–3	–2	1	0	0	0	
	x_7	0	0	1	1	1	1	1	1	1	
	z	0	0	–1	1	–1	1	0	0		
1	x_3	1	0	1	–2	–3	4	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введём x_4 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_2 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_2	–4	1	0	**5**	10	–15	0	0	**0**	
	x_7	–1	0	0	3	4	–3	1	1	1/3	
	z	1	0	0	–1	–4	5	0	0		
2	x_3	–0,6	0,4	1	0	**1**	–2	0	0	**0**	Признака оптимальности нет. Введём x_5 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_3 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_4	–0,8	0,2	0	1	2	–3	0	0	0	
	x_7	1,4	–0,6	0	0	–2	6	1	1	–	
	z	0,2	0,2	0	0	–2	2	0	0		
3	x_5	–0,6	0,4	1	0	1	–2	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введём x_6 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_4 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_4	0,4	–0,6	–2	1	0	**1**	0	0	**0**	
	x_7	0,2	0,2	2	0	0	2	1	1	1/2	
	z	–1	1	2	0	0	–2	0	0		
4	x_5	**0,2**	–0,8	–3	2	1	0	0	0	**0**	Признака оптимальности нет. Введём x_1 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_5 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_6	0,4	–0,6	–2	1	0	1	0	0	0	
	x_7	–0,6	1,4	6	–2	0	0	1	1	–	
	z	–0,2	–0,2	–2	2	0	0	0	0		

№	Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	θ	Пояснение
5	x_1	1	–4	–15	10	5	0	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введём x_2 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_6 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_6	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	4	–3	–2	1	0	0	0	
	x_7	0	–1	–3	4	3	0	1	1	–	
	z	0	–1	–5	4	1	0	0	0	–	
6	x_1	1	0	1	–2	–3	4	0	0		Вернулись к ранее встречавшемуся нулевому базису (x_1, x_2, x_7). Произошло зацикливание.
	x_2	0	1	4	–3	–2	1	0	0		
	x_7	0	0	1	1	1	1	1	1		
	z	0	0	–1	1	–1	1	0	0		

Источник: составлено автором.

Если при применении симплекс-метода в нескольких последовательных переходах $\theta_0 = 0$, то, как было сказано выше, мы не переходим к новому опорному решению, а переходим от одного базиса к другому базису одного и того же вырожденного опорного решения. Этот процесс может привести к зацикливанию, т. е. к возврату к ранее встречавшемуся базису этого опорного решения. Известно, что цикл не может содержать менее шести переходов [1]. В рассматриваемой нами задаче система ограничений (20) приведена к базису (x_1, x_2, x_7) вырожденного опорного решения $X_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. После шести переходов произошло зацикливание. Хотя вероятность зацикливания очень мала, требуются практические рекомендации, предотвращающие зацикливание, ведь рассматриваемая задача не является сложной и может быть решена простым методом перебора вершин. Из третьего уравнения системы (20) и условий (21) следует, что $0 \le x_i \le 1$ при $i = 3, 4, 5, 6, 7$. Но тогда из первых двух уравнений системы (20) и условий (21) следует, что $0 \le x_i \le 5$ при $i = 1,2$. Итак, $0 \le x_i \le 5 \forall i$, т. е. область допустимых решений является непустым ограниченным множеством, задача разрешима. Методом перебора нетрудно найти все базисные решения системы (20), а затем выбрать из них опорные решения (вершины области допустимых решений). Всего в этой задаче одно вырожденное опорное решение $X_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ с пятнадцатью базисами и восемь невырожденных опорных решений $X_2 = (2, 3, 0, 1, 0, 0, 0)$, $X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$, $X_4 = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0\right)$, $X_5 = \left(0, \frac{5}{7}, 0, 0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)$, $X_6 = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$, $X_7 = \left(0, \frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$, $X_8 = \left(0, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $X_9 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, 0\right)$. Так как $z(X_1) = 0$, $z(X_2) = -1$, $z(X_3) = 1$, $z(X_4) = -\frac{1}{7}$, $z(X_5) = \frac{1}{7}$, $z(X_6) = 1$, $z(X_7) = -1$, $z(X_8) = \frac{1}{3}$, $z(X_9) = -\frac{1}{3}$, то $z_{\max} = 1$ достигается на множестве оптимальных решений $(1 - t)X_3 + tX_6$ (см. формулу (4)).

Правило против зацикливания

Решим задачу (19)–(21) симплекс-методом, соблюдая правило, исключающее возврат к базису, который ранее встречался. Как было сказано выше, мы ограничимся каноническими задачами с непустыми ограниченными областями допустимых решений. Для этого случая были приведены правила для выбора вводимой в базис и выводимой из базиса переменных. Эти правила часто приводят к неоднозначности при выборе. Исключим неоднозначности. Если при выборе переменной для включения в базис (переменной для исключения из базиса) под сформулированные правила подходят несколько переменных, то выбираем из них переменную с наименьшим индексом [13]. Так как в табл. 6 при переходах от нулевого базиса до третьего базиса новое правило не нарушается, то решение задачи (19)–(21) продолжим, начиная с третьего базиса с соблюдением нового правила (оставим без изменения нумерацию вершин из предыдущего раздела, см. табл. 7).

Таблица 7 / Table 7

Решение задачи (19)-(21) с соблюдением нового правила / Solution of the problem (19)-(21) in accordance with the new rule

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*b*	θ	Пояснение
3	x_5	−0,6	0,4	1	0	1	−2	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введем x_1 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_4 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_4	$\boxed{\mathbf{0,4}}$	−0,6	−2	1	0	1	0	0	**0**	
	x_7	0,2	0,2	2	0	0	2	1	1	5	
	z	−1	1	2	0	0	−2	0	0		
4	x_5	0	−0,5	−2	1,5	1	−0,5	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введем x_2 в базис. $\theta_0 = 2$. Выведем x_7 из базиса. Переход к базису X_3.
	x_1	1	−1,5	−5	2,5	0	2,5	0	0	–	
	x_7	0	$\boxed{\mathbf{0,5}}$	3	−0,5	0	1,5	1	1	**2**	
	z	0	−0,5	−3	2,5	0	0,5	0	0		
5	x_5	0	0	1	1	1	1	1	1	1	$X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$ – невырожденное опорное решение. Есть признак оптимальности. Есть альтернативные решения.
	x_1	1	0	4	1	0	7	3	3	3/4	
	x_2	0	1	6	−1	0	3	2	2	**1/3**	
	z	0	0	**0**	2	0	2	1	1		

Источник: составлено автором.

После пяти переходов мы перешли к базису (x_5, x_1, x_2) невырожденного опорного решения $X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$. Из z-строки следует, что это опорное решение удовлетворяет условиям признака оптимальности. Так как в z-строке коэффициент при небазисной переменной x_3 равен нулю и минимальное допустимое отношение θ_0, вычисленное по положительным элементам столбца x_3, положительное число, то, как было сказано выше, есть альтернативные решения. Продолжим процесс решения, см. табл. 8.

Таблица 8 / Table 8

Нахождение альтернативных оптимальных решений задачи (19)–(21) / Search for alternative optimal solutions of problem (19)–(21)

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	θ	Пояснение
5	x_5	0	0	1	1	1	1	1	1	1	Введем x_3 в базис. $\theta_0 = 1/3$. Выведем x_2 из базиса. Перейдем к новому оптимальному решению.
	x_1	1	0	4	1	0	7	3	3	3/4	
	x_2	0	1	$\boxed{6}$	–1	0	3	2	2	**1/3**	
	z	0	0	0	2	0	2	1	1		
6	x_5	0	–1/6	0	7/6	1	0,5	2/3	2/3		$X_6 = \left(\frac{5}{3},0,\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},0,0\right)$, – оптимальное опорное решение. Других оптим. опорных решений нет.
	x_1	1	–2/3	0	5/3	0	5	5/3	5/3		
	x_3	0	1/6	1	–1/6	0	0,5	1/3	1/3		
	z	0	0	0	2	0	2	1	1		

Источник: составлено автором.

Заметим, что если ввести переменную x_2 в шестой базис, то мы вернёмся к оптимальному опорному решению X_3. Множество оптимальных решений в этой задаче находим по формуле (4): $X = (1 - t)X_3 + tX_6$, где $X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$, $X_6 = \left(\frac{5}{3},0,\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},0,0\right)$, $0 \le t \le 1$, а $z_{\max} = 1$.

Заключение

Наличие избыточности условий в исходной задаче линейного программирования может привести к вырожденному опорному решению при решении соответствующей канонической задачи симплекс-методом. Вырожденное решение может привести к увеличению количества итераций, но не приводит к непреодолимым препятствиям. В практических разрешимых задачах появление вырожденного опорного решения приводит в алгоритме к особому случаю, который можно назвать как временная вырожденность. Связано это с тем, что вырожденное опорное решение может иметь несколько базисов. Либо в каком-нибудь своём базисе вырожденное опорное решение будет удовлетворять условиям признака оптимальности, либо оно будет улучшено при переходе к базису другого опорного решения. В редких случаях правила выбора вводимой в базис и выводимой из базиса переменных могут привести к зацикливанию. Существуют правила, позволяющие избежать зацикливания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука, 1969. 424 с.
2. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. Harlow, England: Pearson Education. 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. 798 p.
4. Макжанова Я. В., Шаракшане А. А., Зверева А. И. Оптимизация нагрузки доцента как задача линейного программирования // Известия Российского экономического

университета им. Г. В. Плеханова. (электронный журнал). 2016. № 1 (23). С. 160–177. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
5. Попов В. А. Математика и экономика // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 7. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2020. С. 435–441.
6. Попов В. А. Преподавание экономики и математики в единстве // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 6. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2019. С. 362–370.
7. Хасанов А. С. Об особенностях алгоритмов решения задач линейного программирования с неограниченными областями допустимых решений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 1. С. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
8. Рыжкова Т. В., Тушканов Д. А., Чистякова Н. А. К вопросу об организации самостоятельной работы студентов (на примере кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова) // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный журнал). 2015. № 4 (22). С. 411–431. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
9. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейного программирования // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный журнал). 2013. № 4 (14). С. 92–121. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
10. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейной алгебры // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный журнал). 2013. № 4 (14). С. 122–165. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
11. Высшая математика (для гуманитарных специальностей) / Сухорукова И. В., Савина О. И., Лавриненко Т. А., Артюшина Т. Г. М.: Издательство Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова, 2018. 112 с.
12. Курс высшей математики для экономистов / Бобрик Г. И., Гладких И. М., Гринцевичюс Р. К., Матвеев В. И., Рудык Б. М., Сагитов Р. В., Шершнев В. Г. М.: ИНФРА-М, 2016. 647 с.
13. Элементы линейной алгебры и линейной оптимизации / Барбаумов В. Е., Полякова С. Т., Рудык Б. М., Сафонова Т. А., Чуйко А. С. М.: Издательство РЭА им. Г. В. Плеханова, 2007. 134 с.
14. Beale E. M. L. Cycling in the dual simplex algorithm // Naval Research Logistics Quarterly. 1955. Vol. 2. Iss. 4. P. 269–275. DOI: 10.1002/nav.3800020406.

REFERENCES

1. Yudin D. B., Gol'shtein E. G. *Lineinoe programmirovanie (teoriya, metody i prilozheniya)* [Linear programming (theory, methods and applications)]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.
2. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. Harlow, England, Pearson Education Publ., 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences. Englewood Cliffs, Prentice Hall Publ., 1989. 798 p.
4. Makzhanova Ya. V., Sharakshane A. A., Zvereva A. I. [Optimization of an associate

professor's workload as a linear programming problem]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova. (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2016, no. 1 (23), pp. 160–177. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).

5. Popov V. A. [Mathematics and Economics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 7. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 7. No. 1]. Moscow, Publishing house MFO, 2020, pp. 435–441.
6. Popov V. A. [Education in economics, finance and mathematics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 6. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 6. No. 1]. Moscow, Publishing house MFO, 2019, pp. 362–370.
7. Khasanov A. S. [Peculiarities of algorithms for solving linear programming problems with unbounded feasible regions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 1, pp. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
8. Ryzhkova T. V., Tushkanov D. A., Chistyakova N. A. [On the organization of students' independent work (on the example of the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics)]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2015, no. 4 (22), pp. 411–431. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).
9. Khasanov A. S. [Individual homework on the basics of linear programming]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2013, no. 4 (14), pp. 92–121. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).
10. Khasanov A. S. [Individual homework on the fundamentals of linear algebra]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2013, no. 4 (14), pp. 122–165. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).
11. Sukhorukova I. V., Savina O. I., Lavrinenko T. A., Artyushina T. G. *Vysshaya matematika (dlya gumanitarnykh spetsial'nostei)* [Higher mathematics (for humanitarian specialties)]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2018. 112 p.
12. Bobrik G. I., Gladkikh I. M., Grintsevichyus R. K., Matveev V. I., Rudyk B. M., Sagitov R. V., Shershnev V. G. *Kurs vysshei matematiki dlya ekonomistov* [The course of higher mathematics for economists]. Moscow, INFRA-M Publ., 2016. 647 p.
13. Barbaumov V. E., Polyakova S. T., Rudyk B. M., Safonova T. A., Chuiko A. S. *Elementy lineinoi algebry i lineinoi optimizatsii* [Elements of linear algebra and linear optimization]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2007. 134 p.
14. Beale E. M. L. Cycling in the dual simplex algorithm. In: Naval Research Logistics Quarterly, 1955, vol. 2, iss. 4, pp. 269–275. DOI: 10.1002/nav.3800020406.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С. Изучение случая вырожденности опорных решений при применении симплекс-метода // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 1. С. 103–119.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-103-119

FOR CITATION

Khasanov A. S. Study of the degeneracy case of basic feasible solutions in the simplex method. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 103–119.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-103-119.