РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 53.091
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-18-29

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА СУХОГО ТРЕНИЯ

Гладков С. О.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация

Аннотация
Цель: исходя из общих принципов теории корреляции, вычислить зависимость коэффициента сухого трения скольжения *k* в виде функции от коэффициентов Пуассона обоих тел σ, σ' и температуры *T*.
Процедура и методы. Метод исследования основан на применении температурных функций Грина для неравновесных процессов.
Результаты. Найдена зависимость коэффициента сухого трения от коэффициентов Пуассона обоих тел и температуры.
Теоретическая и/или практическая значимость заключается в том, что предложено математическое описание зависимости коэффициента сухого трения от параметров, то есть функция $k = k(\sigma, \sigma', T)$; это является чрезвычайно важным для практического приложения полученной зависимости.
Ключевые слова: сухое трение, коэффициент Пуассона, температура

ANALYTICAL CALCULATION OF THE DRY FRICTION COEFFICIENT

S. Gladkov

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe sh. 4, 125993 Moscow, Russian Federation

Abstract
Aim. Based on the principles of correlation theory, calculate the dependence of the dry friction sliding factor *k* in the form of function from the Poisson coefficients of both bodies σ, σ' and temperature *T*.

Methodology. The research method is based on the application of Green's temperature functions for unbalanced processes.
Results. the dependence of the dry friction factor on the Poisson coefficients of both bodies and temperature has been found.
Research implications. A mathematical description of the dry friction factor depending on the parameters, meaning the function $k = k(\sigma, \sigma', T)$; this is extremely important for the practical application of the resulting dependency.
Keywords: dry friction, Poisson coefficient, temperature

Введение

Вопрос, решению которого посвящена настоящая статья, имеет весьма давнее историческое происхождение и берет своё начало с работ Амонтона-Кулона, в которых была впервые введена эмпирическая связь между силой нормального давления тела на поверхность контакта и усилием, необходимым для придания телу ускорения в некотором направлении. При внимательном изучении литературы, посвящённой обсуждению проблем, связанных с физической природой коэффициента трения скольжения k, предлагаются вполне разумные обоснования его физической сущности и возможной параметрической зависимости (см., например, монографии [1–4]). Например, в [1] обсуждается проблема внутреннего трения в металлах и его физика, связанная со взаимодействием электронов, а, скажем, в [4] (см. также [5]), проводится связь между коэффициентом трения k и диссипативными свойствами обоих тел. Некоторые аспекты и теоретические оценки, касающиеся вопросов, связанных с трением, изложены также и в ряде оригинальных статей [6–9]. Мы не станем придерживаться ни одной из отмеченных выше версий, а изложим несколько иной подход, позволяющий непосредственно вычислять величину k в виде функции от температуры T, модулей Юнга обоих тел E и E', и двух других упругих параметров: σ и σ', где, соответственно, σ – коэффициент Пуассона тела 1, а σ' – тела 2. Как увидим, полученная зависимость $k(E, E', \sigma, \sigma', T)$ вполне удовлетворительно позволяет рассчитывать численные значения k, согласующиеся с экспериментами по его измерению для различных видов материалов. Как известно из курса физики, линейная связь между силой трения $\mathbf{F}_{fr}$ и силой нормального давления $\mathbf{N}$ определяется по формуле $\mathbf{F}_{fr} = \hat{k}\mathbf{N}$, где $\hat{k}$ – тензор сухого трения с компонентами k_{ij}, $i, j = x, y, z$. Выберем систему координат на плоскости контакта обоих тел и пусть $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – радиус-векторы, проведённые из начала координат, соответственно, к произвольной точке наблюдения A на плоскости контакта и к локальному месту приложения внешней силы $\mathbf{F} \leq \mathbf{F}_{fr}$.

Основные вычисления

Рассмотрим коррелятор

$$k_{ijnm} = \frac{\sqrt{\left\langle F_i G_j F_n G_m \right\rangle}}{\left\langle \mathbf{G}^2 \right\rangle}, \tag{1}$$

где угловые скобки означают некоторое усреднение, о котором мы поговорим немного ниже. Как видим, если положить здесь $F_y = k_{yz}G_z$ в частном случае, когда $k_{yzyz} = k_{yz} = \mu$, где μ – привычный коэффициент трения, получим тождество $\mu = \mu$. Перепишем (1) несколько иначе, введя более удобное представление. Для этого положим $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, а $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ – ускорение, m – масса тела. Тогда

$$k_{yz} = \frac{\sqrt{\left\langle a_y^2 g_z^2 \right\rangle}}{2\left\langle g_z^2 \right\rangle}. \tag{2}$$

Множитель $\frac{1}{2}$ появляется ввиду того, что имеются два равноправных и неразличимых коэффициента трения: k_{yz} и k_{xz}. Заметим здесь, что формула (2) относится к вычислению только трения покоя, о котором и будет идти речь в настоящей статье. Согласно основному уравнению статической теории упругости [10] для вектора смещений внутренних точек деформируемых объектов справедливо уравнение:

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} graddiv\mathbf{u} = \frac{\mathbf{g}}{c_{st}^2}, \tag{3}$$

где скорость поперечных звуковых волн $c_{st} = \sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\sigma)}}$, E – модуль Юнга, ρ –плотность тела 1. Полагая в (2), что $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$, а ускорение силы тяжести согласно (3) есть:

$$\mathbf{g} = c_{st}^2\left(\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} graddiv\mathbf{u}\right), \tag{4}$$

получаем из (2):

$$k_{yz} = \frac{\sqrt{\left\langle \ddot{u}_y^2 \left(\Delta u_z + \dfrac{1}{1-2\sigma}\dfrac{\partial}{\partial z} div\mathbf{u}\right)^2 \right\rangle}}{2c_{st}^2\left\langle \left(\Delta u_z + \dfrac{1}{1-2\sigma}\dfrac{\partial}{\partial z} div\mathbf{u}\right)^2 \right\rangle}. \tag{5}$$

Перейдём в формуле (4) к методу вторичного квантования [11] и представим вектор смещений $\mathbf{u}$ в виде оператора $\hat{\mathbf{u}}$ согласно, например, [12; 13], как:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t) = i\sum_{k,\alpha,\nu}\left(\frac{\hbar}{\rho V \omega_{k\alpha}^{(\nu)}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\alpha\nu}\left(\hat{b}_{k\alpha\nu} e^{i\mathbf{kr} - i\omega_{k\alpha}^{(\nu)} t} + \hat{b}_{k\alpha\nu}^{+} e^{-i\mathbf{kr} + i\omega_{k\alpha}^{(\nu)} t}\right), \tag{6}$$

где i – мнимая единица, $\hbar$ – постоянная Планка, V – объём тела, индекс $\nu = 1$, 2, $\omega_{k\alpha}^{(1)} = c_{s\alpha}k$ – спектр акустических фононов с поляризацией α, $c_{s\alpha}$ – фазовая скорость акустических волн, k – волновой вектор, $\omega_s^{(2)} = \omega_0 + \omega^* - \dfrac{\omega^*}{\left(1+\beta\left(\overline{a}k\right)^2\right)}$ – дисперсия оптических фононов, где ω_0, ω^* и β – некоторые константы, причём β безразмерна, $\overline{a}$ – некоторое среднее межатомное расстояние, $\mathbf{e}_{\alpha\nu}$ – вектор поляризации, $\hat{b}^+_{k\alpha\nu}\left(\hat{b}_{k\alpha\nu}\right)$ – оператор рождения (уничтожения) фонона с поляризацией α и волновым вектором $\mathbf{k}$ ветви спектра ν, индекс $\alpha = t, l$, где латинская буква t характеризует поперечную звуковую акустическую волну, а l – продольную акустическую волну. Мы будем полагать, что направлению вдоль оси z соответствует продольная звуковая волна, а направлению вдоль оси y – поперечная. Причём поперечных волн – две. Тогда

$$\Delta\hat{u}_z\left(\mathbf{r},t\right) = -ie_l\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\hbar}{2\rho V\omega_{kl}}\right)^{\frac{1}{2}}k^2\left(\hat{b}_{kl}e^{i\mathbf{kr}-i\omega_{kl}t} + \hat{b}^+_{kl}e^{-i\mathbf{kr}+i\omega_{kl}t}\right),$$

$$\hat{\ddot{u}}_y\left(\mathbf{r},t\right) = -2ie_t\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\hbar}{2\rho V\omega_{kt}}\right)^{\frac{1}{2}}\omega_{kt}^2\left(\hat{b}_{kt}e^{i\mathbf{kr}-i\omega_{kt}t} + \hat{b}^+_{kt}e^{-i\mathbf{kr}+i\omega_{kt}t}\right).$$

Подставляя их в (4) и подразумевая теперь под угловыми скобками усреднение по основному состоянию фононов, то есть при $T = 0$, после несложных преобразований, вводя далее оператор хронологического упорядочения $\hat{T}_t$ (см., например, [14]), можно записать в итоге следующий нелокальный коррелятор трения:

$$k_{yz}\left(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{\begin{gathered}\sum_k e_l^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1}\omega_{kt}^3 k^2 \varphi_{1yz}\left(\mathbf{n}\right)\left(\tilde{G}_{kt}\left(t_1-t_2\right)e^{ik(r_2-r_1)} + \tilde{G}_{kt}\left(t_2-t_1\right)e^{-ik(r_2-r_1)}\right)\times \\ \times\sum_k k^2\varphi_{1yz}\left(\mathbf{n}\right)\left(\tilde{G}_{kl}\left(t_1-t_2\right)e^{ik(r_2-r_1)} + \tilde{G}_{kl}\left(t_2-t_1\right)e^{-ik(r_2-r_1)}\right)\end{gathered}}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_k \frac{k^4\varphi_2\left(\mathbf{n}\right)}{\omega_{kl}}\left(\tilde{G}_{kl}\left(t_1-t_2\right)e^{ik(r_2-r_1)} + \tilde{G}_{kl}\left(t_2-t_1\right)e^{-ik(r_2-r_1)}\right)}, \qquad (7)$$

где функции

$$\varphi_{1yz}\left(\mathbf{n}\right) = 1 + \frac{n_z^2}{1-2\sigma},$$

$$\varphi_2\left(\mathbf{n}\right) = 1 + \frac{2n_z^2}{(1-2\sigma)} + \frac{n_z^2}{\left(1-2\sigma\right)^2}.$$

Фигурирующие в (7) обобщённые функции Грина в представлении Гейзенберга имеют вид:

$$\tilde{G}_{k\alpha\nu}(t_1 - t_2) = -i\left\langle \hat{T}_t \left| \tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}(t_1)\tilde{\hat{b}}^{+}_{k\alpha\nu}(t_2) \right| \right\rangle, \tag{8}$$

где $\tilde{\hat{b}}^{+}_{k\alpha\nu}(t)\left(\tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}(t)\right)$ – операторы рождения (уничтожения) фонона, записанные в представлении Гейзенберга (о чём свидетельствует значок «тильда» над соответствующими величинами (см. [14])). Формула (7) является общей и позволяет нам учесть влияние на коэффициент трения процессов взаимодействия фононов друг с другом, с примесями, неоднородностями, дислокациями, с границами тела и т. п. Если это суммарное взаимодействие обозначить как $\hat{V}$, то полный гамильтониан системы фононов можно представить в следующем аддитивном виде:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{9}$$

где $\hat{H}_0 = \dfrac{\hbar}{N}\sum_{\mathbf{k},\alpha,\nu} \omega^{(\nu)}_{k\alpha}\hat{b}^{+}_{k\alpha\nu}\hat{b}_{k\alpha\nu}$ – основной гамильтониан, а N – количество атомов в кристалле. Везде далее будем считать, что постоянная Планка $\hbar = 1$. Согласно определению, имеем:

$$\tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}(t) = e^{i\int_{-\infty}^{t}\hat{V}(t)dt}\,\hat{b}_{k\alpha\nu}(t)\,e^{-i\int_{-\infty}^{t}\hat{V}(t)dt},\quad \tilde{\hat{b}}^{+}_{k\alpha\nu}(t) = e^{i\int_{-\infty}^{t}\hat{V}(t)dt}\,\hat{b}^{+}_{k\alpha\nu}(t)\,e^{-i\int_{-\infty}^{t}\hat{V}(t)dt},$$

где $\hat{b}_{k\alpha\nu}(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{b}_{k\alpha\nu}(t)e^{-i\hat{H}_0 t}$, $\hat{b}^{+}_{k\alpha\nu}(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{b}^{+}_{k\alpha\nu}(t)e^{-i\hat{H}_0 t}$ – соответствующие операторы в представлении взаимодействия. Рассмотрим формулу (7) в случае отсутствия взаимодействия и в пределе, когда $t_2 \to t_1 + 0$. В результате получим:

$$k_{yz}(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\sqrt{\begin{array}{c}\sum_k e_l^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1}\omega_{kt}^{3} k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n})\left(\left(1 + iG_{0kt}(+0)\right)e^{ik(r_2 - r_1)} + iG_{0kt}(+0)e^{-ik(r_2 - r_1)}\right)\times \\ \times \sum_k k^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})\left(\left(1 + iG_{0kl}(+0)\right)e^{ik(r_2 - r_1)} + iG_{0kl}(+0)e^{-ik(r_2 - r_1)}\right)\end{array}}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_k \dfrac{k^4\varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}}\left(\left(1 + iG_{0kl}(+0)\right)e^{ik(r_2 - r_1)} + iG_{0kl}(+0)e^{-ik(r_2 - r_1)}\right)}, \tag{10}$$

где учтено правило коммутации Бозе – операторов

$$\hat{b}_{kt,l}\hat{b}^{+}_{kt,l} - \hat{b}^{+}_{kt,l}\hat{b}_{kt,l} = \delta_{\alpha\alpha'},$$

где $\alpha, \alpha' = t, l.$

Согласно определению (8) для нулевой функции Грина имеем:

$$G_{0k\alpha\nu}(+0) = -i\left\langle \hat{b}^{+}_{k\alpha\nu}\hat{b}_{k\alpha\nu}\right\rangle = -if_{0k\alpha\nu},$$

где равновесная функция распределения в случае статистики Бозе имеет вид (см. [15]):

$$f_{0kt,l} = \left(e^{\frac{\omega_{kt,l}}{T}} - 1 \right)^{-1}.$$

С физической точки зрения формула (10) вполне понятна, если не учитывается временное запаздывание, то есть считается, что как только мы подействовали силой **F** на тело, оно мгновенно начинает двигаться. С точки зрения введённых нами в рассмотрение корреляторов это, конечно, неверно. Однако, в механике и в трибологии, в частности, этим временем всегда пренебрегают и считают, что движение начинается одновременно с силовым воздействием. Таким образом, выражение (10) можно представить в виде:

$$k_{yz}\left(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{\begin{array}{c}\sum_k e_l^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1} \omega_{kt}^3 k^2 \varphi_{1yz}\left(\mathbf{n}\right)\left(\left(1 + f_{0kt}\right) e^{ik(r_2 - r_1)} + f_{0kt} e^{-ik(r_2 - r_1)}\right) \times \\ \times \sum_k k^2 \varphi_{1yz}\left(\mathbf{n}\right)\left(\left(1 + f_{0kl}\right) e^{ik(r_2 - r_1)} + f_{0kl} e^{-ik(r_2 - r_1)}\right)\end{array}}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_k \frac{k^4 \varphi_2\left(\mathbf{n}\right)}{\omega_{kl}}\left(\left(1 + f_{0kl}\right) e^{ik(r_2 - r_1)} + f_{0kl} e^{-ik(r_2 - r_1)}\right)}, \quad (11)$$

Формула (11), хотя и не учитывает взаимодействие фононов, является довольно общей и позволяет нам вычислить не только сам коэффициент трения, но даже его зависимость от места приложения внешней силы. Если считать, что основной вклад дают фононы с малыми волновыми векторами, то есть, когда выполняется условие $k\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right| \ll 1$, координатная зависимость исчезает. Однако, в случае массивных тел это неверно. При сравнительно высоких температурах, превышающих, когда речь идёт о кристаллических телах, температуру Дебая, функцию распределения можно разложить по степеням $\frac{\omega_{kt,l}}{T} < 1$, то есть:

$$f_{0kt,l} = \left(e^{\frac{\omega_{kt,l}}{T}} - 1 \right)^{-1} \approx \frac{T}{\omega_{kt,l}}.$$

Поэтому, опуская пространственную зависимость коэффициента трения, получим:

$$k_{yz} \approx S - \frac{A}{T} \quad (12)$$

где функция S равна:

$$S = \frac{\sqrt{\sum_{\mathbf{k}} e_l^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1} \omega_{kt}^3 k^2 \varphi_{1yz}\left(\mathbf{n}\right) \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{1yz}\left(\mathbf{n}\right)}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^4 \varphi_2\left(\mathbf{n}\right)}{\omega_{kl}}},$$

а функция A равна:

$$A=\frac{\sqrt{\sum_{\mathbf{k}} e_l^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1}\omega_{kt}^3 k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n})\sum_{\mathbf{k}} k^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^4\varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}}}\times$$
$$\times\left(2\frac{\sum_{\mathbf{k}}\frac{k^4\varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}}}{\sum_{\mathbf{k}}\frac{k^4\varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}^2}}-\frac{\sum_{\mathbf{k}}\omega_{kl}^{-2}\omega_{kt}^2(\omega_{kl}+\omega_{kt})k^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})\sum_{\mathbf{k}}k^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{k}}\omega_{kl}^{-2}\omega_{kt}^2k^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})\sum_{\mathbf{k}}k^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})}\right). \qquad (13)$$

Переходя в (13) от суммирования по **k** к интегрированию, благодаря правилу:

$$\sum_{\mathbf{k}}(...)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int(...)d^3k,$$

где $d^3k=dk_xdk_ydk_z$, и используя удобную в нашем случае сферическую систему координат, а также правило усреднения по угловой переменной **n** в виде:

$$\overline{n_in_j}=\frac{1}{3}\delta_{ij},\ \overline{n_in_kn_nn_m}=\frac{1}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{nm}+\delta_{in}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kn}\right),$$

находим, согласно (13), что

$$S=c_{sl}\frac{\sqrt{\int_0^{k_0}k^4dk\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e_l^2e_t^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})\sin\theta d\theta d\varphi\int_0^{k_0}k^4dk\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{1yz}(\mathbf{n})\sin\theta d\theta d\varphi}}{c_{st}\int_0^{k_0}k^4dk\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e_l^2\varphi_2(\mathbf{n})\sin\theta d\theta d\varphi}, \qquad (14)$$

$$A=5c_{sl}^2k_0\frac{\sqrt{\int_0^{k_0}k^4dk\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e_l^2e_t^2\varphi_{1yz}(\mathbf{n})\sin\theta d\theta d\varphi\int_0^{k_0}k^4dk\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{1yz}(\mathbf{n})\sin\theta d\theta d\varphi}}{c_{st}\int_0^{k_0}k^4dk\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e_l^2\varphi_2(\mathbf{n})\sin\theta d\theta d\varphi}\left(1-\frac{c_{st}}{c_{sl}}\right). \qquad (15)$$

При интегрировании по угловым переменным весьма удобно выбрать полярную ось вдоль вектора продольной поляризации $\mathbf{e}_l$. Поэтому, полагая, что $e_l = 1$, а $e_t = \sin\varphi$, после простых вычислений получаем:

$$S(\sigma)=\sqrt{2}\frac{(2-3\sigma)(1-\sigma)}{(3-8\sigma+6\sigma^2)}, \qquad (16)$$

$$A = 5\sqrt{2}c_{sl}k_0 \frac{(2-3\sigma)(1-2\sigma)}{(3-8\sigma+6\sigma^2)}\left(\frac{c_{sl}}{c_{st}}-1\right) =$$
$$= 5\sqrt{2}c_{sl}k_0 \frac{(2-3\sigma)(1-2\sigma)}{(3-8\sigma+6\sigma^2)}\left(\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}-1\right) =$$
$$= 5\sqrt{2}c_{sl}k_0 \frac{(2-3\sigma)}{(3-8\sigma+6\sigma^2)}. \quad (17)$$

Фигурирующий в (14) – (17) параметр $k_0 = \frac{\pi}{a}$ представляет собой верхний предел интегрирования по первой зоне Бриллюэна.

Общее выражение для коэффициента трения в пренебрежении температурной зависимостью принимает в результате следующий вид:

$$\mu = \frac{1}{2}\left(S(\sigma) + S(\sigma')\right), \quad (18)$$

где

$$S(\sigma') = \sqrt{2}\frac{(2-3\sigma')(1-\sigma')}{(3-8\sigma'+6\sigma'^2)}. \quad (19)$$

Оценки по формуле (18) дают:

$\sigma_{\text{чугун}} = 0{,}25$ $\mu_{\text{чугун}} = 0{,}964$, $\sigma_{\text{олово}} = 0{,}3$ $\mu_{\text{олово}} = 0{,}956$, $\sigma_{\text{латунь}} = 0{,}38$ $\mu_{\text{латунь}} = 0{,}912$, $\sigma_{\text{медь}} = 0{,}4$ $\mu_{\text{медь}} = 0{,}894$, $\sigma_{\text{резина}} = 0{,}5$ $\mu_{\text{резина}} = 0{,}7$.

Сравнение с экспериментом

Согласно формуле (17), величина A может быть легко оценена. Действительно, если в качестве примера взять олово и положить, например, что $\sigma_{\text{олово}} = 0{,}3$, продольная скорость звука $c_{sl} = 3\cdot 10^5\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $k_0 = \frac{\pi}{a} \approx 10^8$ см, постоянная Планка $\hbar = 10^{-27}$ эрг · с, а постоянная Больцмана $k_B = 1{,}38\cdot 10^{-16}\ \frac{\text{эрг}}{°\text{K}}$, то получим, что $A \approx 217$ °K. Поэтому при температурах выше 217 °K должно наблюдаться спадание коэффициента трения скольжения. Согласно формулам (12) и (18) зависимости $\mu(\sigma)$ и $\mu(T)$, в их сравнении с экспериментальными значениями, можно проиллюстрировать в соответствии с рис. 1 и 2.

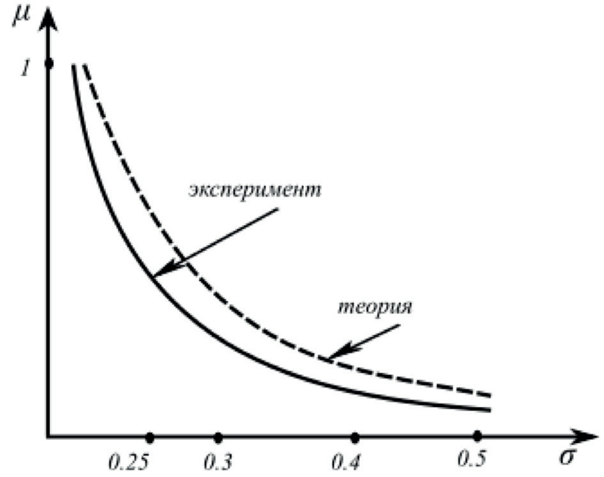

Рис. 1 / Fig. 1. Зависимость коэффициента трения покоя от коэффициента Пуассона контактирующих тел. Видно качественное согласие теории с многочисленными экспериментами по измерению трения покоя / Dependence of the coefficient of friction at rest on the Poisson's ratio of contacting bodies. One can see the qualitative agreement of the theory with numerous experiments on the measurement of static friction.

Источник: составлено автором.

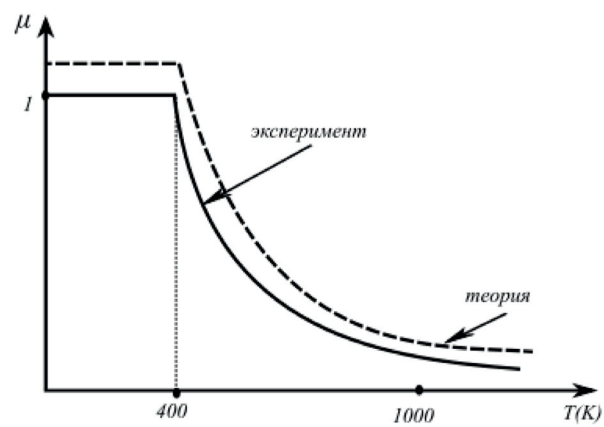

Рис. 2 / Fig. 2. Температурная зависимость коэффициента трения покоя и скольжения. Как следует из рисунка, имеется вполне удовлетворительное, как качественное, так и количественное согласие с экспериментальными данными / Temperature dependence of the coefficient of static friction and sliding. As follows from the figure, there is quite satisfactory, both qualitative and quantitative agreement with the experimental data.

Источник: составлено автором.

Заключение

В заключение работы стоит ещё раз обратить внимание на ряд полученных выше результатов.

1. Предложен довольно общий математический подход для описания коэффициента сухого трения контактирующих твёрдых материалов.
2. Найдена температурная зависимость коэффициента трения и его зависимость от коэффициентов Пуассона обоих тел.
3. Приведено сравнение теоретически полученных результатов с экспериментальными и показано их вполне удовлетворительное согласие.

Статья поступила в редакцию 06.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. М.: Металлургия, 1974. 352 с.
2. Persson B. N. J. Sliding friction physical principles and applications. New York: Springer Verlag, 2000. 516 p.
3. Джеллетт Дж. Х. Трактат по теории трения / пер. Н. А. Зубченко. Ижевск: Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика (R&C Dynamics), 2009. 264 с.
4. Буфеев В. А., Буфеев К. В. Внешнее трение и его закономерности. М.: Ленанд, 2014. 328 с.
5. Гладков С. О. О законе Дарси в условиях сохранения энтальпии // Письма в Журнал технической физики. 2002. Т. 28. № 20. С. 50–57.
6. Paranjape B. V. On the Theory of Internal Friction in Metals // Proceedings of the Physical Society. Section A. 1953. Vol. 66. No. 6. P. 572–584. DOI: 10.1088/0370-1298/66/6/309.
7. Mason W. P., Bцmmel H. E. Ultrasonic Attenuation at Low Temperatures for Metals in the Normal and Superconducting States // The Journal of the Acoustical Society of America. 1956. Vol. 28. No. 5. P. 930–941. DOI: 10.1121/1.1908524.
8. Постников В. С. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов // Успехи физических наук. 1958. Т. 66. № 9. С. 43–77. DOI: 10.3367/UFNr.0066.195809b.0043.
9. Persson B. N. J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces // Physical Review Letters. 2001. Vol. 87. Iss. 11. P. 116101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.116101.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
12. Займан Дж. Принципы теории твёрдого тела. М.: Мир, 1974. 472 с.
13. Гладков С. О. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.
14. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Т. IV. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. 704 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. М.: Наука, 1978. 584 с.

REFERENCES

1. Postnikov V. S. *Vnutrennee trenie v metallakh* [Internal friction in metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1974. 352 p.
2. Persson B. N. J. Sliding friction physical principles and applications. New York, Springer Verlag Publ., 2000. 516 p.
3. Jellett J. H. A Treatise on the Theory of Friction (Russ. ed.: Zubchenko N. A., transl. *Traktat po teorii treniya*. Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovanii, Regulyarnaya i khaotiches-kaya dinamika (R&C Dynamics) Publ., 2009. 264 p.).
4. Bufeev V. A., Bufeev K. V. *Vneshnee trenie i ego zakonomernosti* [External friction and its patterns]. Moscow, Lenand Publ., 2014. 328 p.
5. Gladkov S. O. [On Darcy's law under conditions of enthalpy conservation]. In: *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Applied Physics Letters], 2002, vol. 28, no. 20, pp. 50–57.
6. Paranjape B. V. On the Theory of Internal Friction in Metals. In: *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 1953, vol. 66, no. 6, pp. 572–584. DOI: 10.1088/0370-1298/66/6/309.
7. Mason W. P., Bцmmel H. E. Ultrasonic Attenuation at Low Temperatures for Metals in the Normal and Superconducting States. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, no. 5, pp. 930–941. DOI: 10.1121/1.1908524.
8. Postnikov V. S. [Temperature dependence of the internal friction of metals and alloys]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences], 1958, vol. 66, no. 9, pp. 43–77. DOI: 10.3367/UFNr.0066.195809b.0043.
9. Persson B N. J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. In: *Physical Review Letters*, 2001, vol. 87, iss. 11, pp. 116101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.116101.
10. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. VII. Teoriya uprugosti* [Theoretical physics. T. VII. Elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 246 p.
11. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. III. Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya* [Theoretical physics. T. III. Quantum mechanics. Nonrelativistic theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 752 p.
12. Ziman J. M. Printsipy teorii tverdogo tela [Principles of Solid State Theory]. Moscow, Mir Publ., 1974. 472 p.
13. Gladkov S. O. *Fizika kompozitov: termodinamicheskie i dissipativnye svoistva* [Physics of composites: thermodynamic and dissipative properties]. Moscow, Nauka Publ., 1999. 330 p.
14. Berestetskii V. B., Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Teoreticheskaya fizika. T. IV. Kvantovaya elektrodinamika* [Theoretical physics. T. IV. Quantum electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 704 p.
15. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. V. Statisticheskaya fizika* [Theoretical physics. T. V. Statistical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 584 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru

INFORMATIONS ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof., Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу об аналитическом вычислении коэффициента сухого трения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. №2. С. 18–29.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-18-29

FOR CITATION

Gladkov S. O. Analytical calculation of the dry friction coefficient. In: *Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 18–29.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-18-29