УДК 533 6.011
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЕСТА В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация
Целью данной работы является получение аналитической оценки наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлёста в ударной волне. Основное состояние рассматриваемой ударно-сжатой бинарной газовой смеси является сильно диспергированным по концентрациям лёгкого (значительное преобладание) и тяжёлого компонентов.
Процедура и методы. В работе использовались аналитические методы теоретической физики и, в первую очередь, высшей алгебры и математического анализа, позволяющие, ввиду их большой универсальности, установить границы максимального значения рассматриваемого эффекта. Сделать это численными методами было бы значительно труднее.
Результаты. Получены аналитические оценки, позволяющие, в первую очередь, определить принципиальные условия существования высокоскоростного эффекта. Кроме того, дана аналитическая оценка наибольшего значения этого эффекта.
Теоретическая и/или практическая значимость. Полученные результаты существенны для воспроизведения эффекта высокоскоростного перехлёста в оптимальных условиях его наибольшей интенсивности.
Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна, диспергация

Благодарности. Исследование выполнено в рамках гранта РФФИ 20-07-00740 А и в рамках гранта Президента РФ для молодых учёных – кандидатов наук МК-1330.2020.9.

ANALYTICAL ESTIMATION OF THE HIGHEST VALUE OF THE EFFECT OF HIGH-SPEED OVERSHOOT IN A SHOCK WAVE

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, Mytishchi 141014, Moscow region, Russian Federation

Abstract
Aim. The purpose of this work is to obtain an analytical estimate of the highest value of the effect of high-speed overlap in a shock wave. The ground state of the considered shock-compressed

binary gas mixture is highly dispersed in the concentrations of light (significant predominance) and heavy components.
Methodology. The paper uses analytical methods of theoretical physics, and first of all, higher algebra and mathematical analysis, which allow one, due to their great versatility, to set the limits of the maximum value of the effect under consideration, which would be much more difficult to do by numerical methods.
Results. Analytical estimates are obtained that allow one, first of all, to determine the fundamental conditions for the existence of the high-speed effect. In addition, an analytical assessment of the highest value of this effect is presented.
Research implications. The results obtained are certainly essential for reproducing the effect of high-speed overlap under optimal conditions of its greatest intensity.
Keywords: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave, dispersion

Acknowledgments. This study is supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 20-07-00740A) and the RF President's Grants Council (State Support of Young Scientists – Candidates of Sciences Program, Grant No. MK-1330.2020.9).

Введение

Авторами [1–4] ранее были аналитически установлены общие необходимые и достаточные условия эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатых бинарных смесях газов (без ограничений на их состав и соотношение молекулярных масс). В качестве основной математической модели использовалось так называемое бимодальное распределение Тамма–Мотт-Смита, априорно задаваемое для каждого из компонентов смеси. Применение этого распределения в большинстве аналитических исследований структуры фронта ударной волны неоднократно верифицировалось и подтвердило его хорошую пригодность.

В большинстве упомянутых исследований задача о структуре ударной волны решалась на уровне одночастичных бимодальных распределений для каждого отдельного компонента. Такого «одночастичного» использования молекулярных распределений вполне хватало для определения изменения макропараметров сжимаемой смеси газов при прохождении ею ударной волны. Специфика задач, рассматриваемых в работах авторов, связана с ускорением скоростей процессов молекулярных соударений в самом фронте ударной волны, т. е. с поступательной неравновесностью функции распределения пар сталкивающихся молекул. Аналитический вид этой функции на основе одночастичных бимодальных распределений Тамма–Мотт-Смита, был получен ранее в работах авторов [1–4]. При получении этого результата авторам удалось аналитически представить действие четырёх основных факторов, ускоряющих процессы столкновения частиц в ударной волне. Эти процессы были выявлены ранее в численных исследованиях статистическими методами Монте Карло [5] и детерминированными методами консервативных схем.

Эффект высокоскоростной неравновесности, обнаруженный ранее в численных исследованиях, как раз и был связан со значениями функции распределения пар сталкивающихся молекул. Величина этой функции оказалась значительно выше внутри волны по сравнению с её величиной в термодинамическом равновесном состоянии непосредственно за фронтом волны.

Ранее аналогичные эффекты перехлёста наблюдались и в макроструктуре ударной волны, начиная с хорошо известного локального «заброса» энтропии в её фронте [6]. Наиболее существенным из них оказался эффект перехлёста «параллельной» кинетической температуры (измеряемой вдоль потока в ударной волне). Величина этой температуры оказалась заметно выше величины равновесной температуры за волной. Как было показано в работе [7], в простом однокомпонентном газе существование этого эффекта строго следует из закона сохранения потоков массы и импульса. Анизотропная температурная структура ударной волны: «параллельная температура» – $T^{||}$ и «перпендикулярная температура» – $T^{\perp}$ неоднократно измерялись также в эксперименте [8].

В работах авторов [1–4] анизотропная структура температурного поля внутри ударного фронта также была учтена в аналитическом представлении функции распределения пар молекул.

Аналитическое исследование функции распределения пар молекул в настоящей работе дано для случая сильно диспергированной по составу бинарной смеси газов, когда концентрация лёгкого компонента (l – light) значительно превышает концентрацию тяжёлого (h – heavy), $n_l \gg n_h$. Численно это соответствует величине отношения концентрации лёгкого компонента – n_l к концентрации тяжёлого – n_h порядка 10^{-2} – 10^{-3}.

Основные усилия авторов при выполнении данной работы были направлены на выделение главных безразмерных параметров задачи, определяющих как условие существования эффекта, так и его наибольшую величину.

Функция распределения пар лёгкого и тяжёлого компонентов

Как отмечалось выше, функция распределения пар молекул $G^{(l,\,h)}$ строится на основе одночастичных бимодальных распределений молекул каждого компонента смеси:

$$F^{(\gamma)} = \chi^{(\gamma)} F_0^{(\gamma)} + \left(1 - \chi^{(\gamma)}\right) F_1^{(\gamma)}, \tag{1}$$

$$\chi^{(\gamma)} = \frac{n_0^{(\gamma)}}{n_0^{(\gamma)} + n_1^{(\gamma)}}, \tag{2}$$

$$F_i^{(\gamma)}(c) = \left(\frac{m_\gamma}{2\pi k T_i}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m_\gamma \left(c - u_i\right)^2}{2kT_i}\right]. \tag{3}$$

Здесь верхний индекс γ соответствует одному из компонентов смеси: лёгкому $\gamma = l$, или тяжёлому $\gamma = h$, причём $m_l < m_h$; полные объёмные концентрации смеси компонентов n_l и n_h складываются из своих парциальных $n_0^{(\gamma)}$ и $n_1^{(\gamma)}$, где: $n_\gamma = n_0^{(\gamma)} + n_1^{(\gamma)}$; $\gamma = l, h$; одночастичные функции $F_i^{(\gamma)}$ $(i = 0{,}1)$ являются максвелловскими распределениями; m_γ – масса молекулы γ – компонента; u_i и T_i – скорость и температура потока перед ($i = 0$) и за ($i = 1$) волной; k – постоянная Больцмана; $(c - u_i)$ – собственная скорость молекулы.

Как и в простом однокомпонентном газе парциальные концентрации, входящие в числитель и знаменатель формулы (2), являются функциями координаты x, меняющейся по ширине волны. Парциальные же параметры потока: температура T_i и макроскорость u_i остаются неизменными и совпадают, соответственно, с термодинамической температурой и макроскоростью потока на входе в волну ($i = 0$) и на выходе из неё ($i = 1$).

Функция распределения пар молекул, получающаяся на основе соотношений (1–3), как было показано в работе [9], имеет следующий вид:

$$G^{(l,h)} = \chi^{(l)}\chi^{(h)}G_0^{(l,h)} + \chi^{(l)}\left(1-\chi^{(h)}\right)G_{01}^{(l,h)} + \\ +\left(1-\chi^{(l)}\right)\chi^{(h)}G_{10}^{(l,h)} + \left(1-\chi^{(l)}\right)\left(1-\chi^{(h)}\right)G_1^{(l,h)}. \tag{4}$$

В целях дальнейшего изложения остановимся несколько подробнее на структуре соотношения (4).

Это соотношение получается путём перемножения одночастичных распределений (1) с последующим интегрированием по всему пространству скоростей обеих сталкивающихся молекул за исключением модуля их относительной скорости g (где $g = \left|\vec{c}_l - \vec{c}_h\right|$).

Покажем, что формулу (4) можно алгебраически преобразовать к виду, содержащему в качестве одного из слагаемых билинейную симметрическую форму по произведению безразмерных координат $\chi^{(l)}, \chi^{(h)}$, а в качестве другого – линейную форму по этим координатам:

$$G^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} = -\left(G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}\right)\chi^{(l)}\chi^{(h)} + \\ +\left(G_{01}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}\right)\chi^{(l)} + \left(G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}\right)\chi^{(h)}. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что в правой части формулы (5) отрицательное слагаемое, содержащее произведение безразмерных координат $\chi^{(l)}\,\chi^{(h)}$, является симметрической билинейной формой по перестановке этих координат. При этом параметры $G_0^{(l,h)}$, $G_{01}^{(l,h)}$, $G_{10}^{(l,h)}$, $G_1^{(l,h)}$ не зависят от координат и являются функциями модуля относительной скорости молекул g. Представление одночастичных функций в соответствии с выражением (1) можно понимать как разложение этих функций по базисным векторам, состоящим из «холодного» максвелловского распределения на входе в ударную волну $F_0^{(\gamma)}$ и «горячего» – $F_1^{(\gamma)}$ на выходе из неё. В билинейном же слагаемом в формуле (5) каждый из безразмерных параметров $G_0^{(l,h)}$, $G_{01}^{(l,h)}$, $G_{10}^{(l,h)}$, $G_1^{(l,h)}$ является результатом действия билинейного функционала $A\left(e_i^{(\gamma)}, e_j^{(\gamma)}\right)$ на соответствующую пару базисных векторов:

$e_i^{(\gamma)} = F_i^{(\gamma)}$, $e_j^{(\gamma)} = F_j^{(\gamma)}$. Билинейным функционалом в этой задаче, как уже упоминалось, является интегрирование произведения одночастичных функций компонентов смеси по пространству скоростей сталкивающихся молекул разных компонентов смеси (за исключением интегрирования по относительной скорости молекул).

Таким образом, функция распределения пар молекул (5) параметрически зависит от модуля относительной скорости молекул g и координаты в ударной волне «x». Эта координата входит в парциальные безразмерные плотности $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$. Правая часть формулы (5) зависит от переменных аргументов задачи: относительной скорости g и координаты в волне «x». При этом переменная g входит только в безразмерные параметры $G_0^{(l,h)}$, $G_{01}^{(l,h)}$, $G_{10}^{(l,h)}$, $G_1^{(l,h)}$; координата же «x» – только в безразмерные плотности $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$. В этом проявляется одно из преимуществ исходного аналитического априорного представления одночастичной функции распределения (1) по Тамму–Мотт-Смиту. Мы видим, что переход и к функции распределения пар молекул сохраняет эту фундаментальную простоту.

Центральность кривой, геометрически соответствующей функции распределения пар молекул

Для достижения целей, поставленных в работе, необходимо выполнить ряд преобразований, традиционных для билинейных форм. Прежде всего заметим, что геометрически соотношения (4) и (5) можно рассматривать как уравнения кривых второго порядка по координатам $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$. Покажем, что путём линейного преобразования, переводящего старые координаты $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$ в новые χ_l и χ_h:

$$\chi^{(l)} = \chi_l + d_l,\ \chi^{(h)} = \chi_h + d_h, \tag{6}$$

кривые зависимостей (4) и (5) в новых координатах станут симметричными. Это выразится в том, что левые части равенств (4) и (5) останутся неизменными при замене координаты χ_l на $-\chi_l$, χ_h на $-\chi_h$. При этом положение центра симметрии будет смещено на расстояния: d_l, d_h (в старых координатах) относительно начала старых координат $\chi^{(l)} = \chi^{(h)} = 0$. Сами координаты d_l, d_h определяются из условия отсутствия линейных слагаемых в равенствах (4) и (5) после перехода в них к новым координатам.

В итоге получим:

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = -\chi_l\chi_h + \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}, \tag{7}$$

где

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = \frac{G^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}}{G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}}, \tag{8}$$

$$\overline{g}_{01}^{(l,h)} = \frac{G_{01}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}}{G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}}, \tag{9}$$

$$\overline{g}_{10}^{(l,h)} = \frac{G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}}{G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}}, \tag{10}$$

$$d_l = \overline{g}_{10}^{(l,h)}; \quad d_h = \overline{g}_{01}^{(l,h)}. \tag{11}$$

Заметим, что как было показано в работе [9], равенства (8–10) могут быть представлены целиком через величины $g_{01}^{(l,h)}$, $g_{10}^{(l,h)}$, $g_1^{(l,h)}$, где

$$g_{01}^{(l,h)} = G_{01}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}; \; g_{10}^{(l,h)} = G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}; \; g_1^{(l,h)} = G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}. \tag{12}$$

Область существования эффекта высокоскоростного перехлёста

В предыдущих работах авторов [4; 9] были сформулированы необходимые и достаточные условия эффекта высокоскоростного перехлёста.

Необходимые условия сводились к неотрицательности выражения $\Delta G_{ij}^{(l,h)}$, где $i, j = 0{,}1$ причём:

$$\Delta G_{ij}^{(l,h)} = \left(G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}\right) \geq 0, \tag{13}$$

или

$$\Delta G_{ij}^{(l,h)} = g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_1^{(l,h)}. \tag{14}$$

Достаточные же условия заключались в неотрицательности каждого слагаемого в равенстве (14):

$$g_{01}^{(l,h)} \geq 0; \quad g_{10}^{(l,h)} \geq 0; \quad g_1^{(l,h)} \geq 0.$$

Неравенства (15) можно рассматривать и как область существования эффекта в определённом диапазоне значений модулей относительных скоростей молекул g, поскольку все величины, стоящие в левых частях нестрогих неравенств (15), являются функциями g.

Однако в пространстве координат $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$, где $0 \leq \chi^{(l)} \leq 1$; $0 \leq \chi^{(h)} \leq 1$, такая область не была указана, в отличие от однокомпонентного газа, рассмотренного в работе [2].

Для установления границ искомой области вернёмся к старым координатам $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$ в выражении (7):

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = -\left(\chi^{(l)} - \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right)\left(\chi^{(h)} - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\right) + \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что, когда произведение «новых координат» χ_l и χ_h является отрицательной величиной, эффект высокоскоростного перехлеста $\overline{\Delta G}^{(l,h)} \geq 0$

всегда существует. Кроме того, он больше величины $\overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}$ в исходных «старых координатах» $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$.

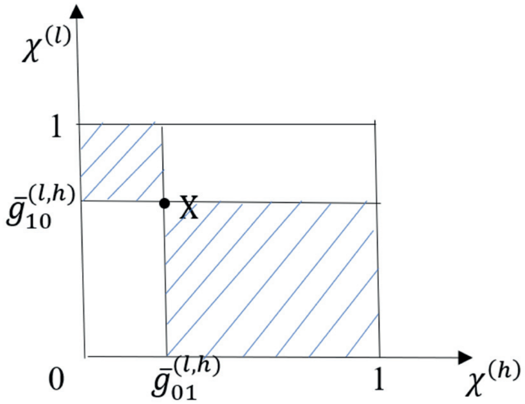

Рис. 1 / Fig. 1. Область существования эффекта высокоскоростного перехлёста / The region of existence of the high-speed overlap effect

Источник: составлено авторами.

Преобразуем правые части равенств (8-10) с использованием функций (12–14):

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = \frac{\Delta G^{(l,h)}}{g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_{1}^{(l,h)}}, \tag{17}$$

$$\overline{g}_{01}^{(l,h)} = \frac{g_{01}^{(l,h)}}{g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_{1}^{(l,h)}} < 1, \tag{18}$$

$$\overline{g}_{10}^{(l,h)} = \frac{g_{10}^{(l,h)}}{g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_{1}^{(l,h)}} < 1, \tag{19}$$

где $\Delta G^{(l,h)} = G^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}$.

В точке «X» с координатами $\left(\overline{g}_{01}^{(l,h)}; \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right)$, а также на линиях $\chi^{(l)} = \overline{g}_{10}^{(l,h)}$ и $\chi^{(h)} = \overline{g}_{01}^{(l,h)}$ эффект перехлёста $\overline{\Delta G}^{(l,h)}$ точно равен произведению $\overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}$.

В областях: $\left(\chi^{(h)} > \overline{g}_{01}^{(l,h)},\ \chi^{(l)} < \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right)$ и $\left(\chi^{(h)} < \overline{g}_{01}^{(l,h)},\ \chi^{(l)} > \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right)$ величина $\overline{\Delta G}^{(l,h)}$ будет больше, чем $\overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}$.

В областях: $\left(\chi^{(h)} > \overline{g}_{01}^{(l,h)}, \chi^{(l)} > \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right)$ и $\left(\chi^{(h)} < \overline{g}_{01}^{(l,h)}, \chi^{(l)} < \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right)$ величина $\overline{\Delta G}^{(l,h)}$ будет меньше, чем $\overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}$.

В точке ($\chi^{(h)} = 0$, $\chi^{(l)} = 0$), т. е в начале координат эффект полностью отсутствует, $\overline{\Delta G}^{(l,h)} = 0$. Эффект также отсутствует на линии с уравнением: $-\chi^{(h)}\chi^{(l)} + \overline{g}_{01}^{(l,h)}\chi^{(l)} + \overline{g}_{10}^{(l,h)}\chi^{(h)} = 0$. Эта кривая на рис. 1 расположена в верхнем правом незаштрихованном прямоугольнике.

Оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлёста

Равенство (16), полученное из выражения (5) для функции распределения пар молекул $G^{(l,\ h)}$, позволяет также оценить наибольшее значение эффекта перехлёста.

Действительно, как следует из равенства (16), положительная добавка к основному значению эффекта $\overline{\Delta G}^{(l,h)} = \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}$, может быть записана только в следующих вариантах:

$$\text{a) } \left(\overline{g}_{01}^{(l,h)} - \chi^{(l)}\right)\left(\chi^{(h)} - \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right);$$

$$\text{b) } \left(\chi^{(l)} - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\right)\left(\overline{g}_{10}^{(l,h)} - \chi^{(h)}\right).$$

В каждом из этих вариантов найдём наибольшие значения каждого из сомножителей и перемножим их:

$$\text{a) } \left(\overline{g}_{01}^{(l,h)} - \chi^{(l)}\right)\Big|_{\sup} \times \left(\chi^{(h)} - \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right)\Big|_{\sup} = \left(\overline{g}_{01}^{(l,h)} - 0\right)\left(1 - \overline{g}_{10}^{(l,h)}\right) =$$

$$= \overline{g}_{01}^{(l,h)} - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}; \tag{20}$$

$$\text{b) } \left(\chi^{(l)} - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\right)\Big|_{\sup} \times \left(\overline{g}_{10}^{(l,h)} - \chi^{(h)}\right)\Big|_{\sup} = \left(1 - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\right)\left(\overline{g}_{10}^{(l,h)} - 0\right) =$$

$$= \overline{g}_{10}^{(l,h)} - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)}. \tag{21}$$

Подставим равенства (20) и (21) в формулу (16). Тогда получим:

$$\text{a) } \overline{\Delta G}_{\sup}^{(l,h)} = \overline{g}_{01}^{(l,h)} - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)} + \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)} = \overline{g}_{01}^{(l,h)}. \tag{22}$$

$$\text{b) } \overline{\Delta G}_{\sup}^{(l,h)} = \overline{g}_{10}^{(l,h)} - \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)} + \overline{g}_{01}^{(l,h)}\overline{g}_{10}^{(l,h)} = \overline{g}_{10}^{(l,h)}. \tag{23}$$

Таким образом, из выражений (22) и (23) следует оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлёста $\overline{\Delta G}_{\sup}^{(l,h)}$:

1) если $\bar{g}_{01}^{(l,h)} > \bar{g}_{10}^{(l,h)}$, то $\bar{g}_{10}^{(l,h)} < \overline{\Delta G}_{\sup}^{(l,h)} < \bar{g}_{01}^{(l,h)}$;

2) если $\bar{g}_{01}^{(l,h)} < \bar{g}_{10}^{(l,h)}$, то $\bar{g}_{01}^{(l,h)} < \overline{\Delta G}_{\sup}^{(l,h)} < \bar{g}_{10}^{(l,h)}$.

Заключение

В статье показано, что, в случае сильной диспергации концентраций компонентов смеси, одно из слагаемых, представляющих функцию распределения пар молекул, может быть представлено в виде билинейной симметрической формы.

Именно это слагаемое является единственной варьируемой величиной, тогда как второе слагаемое остаётся постоянным.

Благодаря выделению симметрической билинейной формы в аналитическом представлении функции распределения пар молекул удалось определить как область существования эффекта перехлёста в полном диапазоне значений относительных концентраций компонентов смеси, так и оценить наибольшее значение этого эффекта.

Статья поступила в редакцию 29.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотрова Л. В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–116.
2. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave // Heat Transfer Research. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
3. Кузнецов М. М., Смотрова Л. В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 66–73.
4. Analytical properties of nonequilibrium threshold in shock waves / Kuznetsov M. M, Kuleshova Ju. D, Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 996. P. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/996/1/012006.
5. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях / Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б., Черешнев С. Л. // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 144–150.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.
7. Shee-Mang Yen. Temperature Overshoot in Shock Waves // *The Physics of Fluids*. 1966. Vol. 9. Iss. 7. P. 1417–1418. DOI: 10.1063/1.1761862.
8. Muntz E. P., Harnett L. N. Molecular Velocity Distribution Function Measurement in a Normal Shock Wave // The Physics of Fluids. 1969. Vol. 12. Iss. 10. P. 2027–2035. DOI: 10.1063/1.1692308.

9. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне / Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотрова Л. В., Решетникова Ю. Г. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 84–95. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.

REFERENCES

1. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V. [On the increase of the kinetic processes rates in tamm-mott-smith shock wave model]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2012, no. 2, pp. 108–116.
2. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave. In: *Heat Transfer Research*, 2012, vol. 43, iss. 3, pp. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
3. Kuznetsov M. M., Smotrova L. V. [Analytical qualities of highvelocity translational nonequilibrium in shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2013, no. 3, pp. 66–73.
4. Kuznetsov M. M, Kuleshova Ju. D, Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. Analytical properties of nonequilibrium threshold in shock waves. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 996, pp. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/996/1/012006.
5. Genich A. P., Kulikov S. V., Manelis G. B., Chereshnev S. L. [The distribution of molecular speeds in the shock wave front in gas mixtures]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1990, no. 2, pp. 144–150.
6. Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh yavlenii* [Physics of shock waves and high-temperature phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 688 p.
7. Shee-Mang Yen. Temperature Overshoot in Shock Waves. In: *The Physics of Fluids,* 1966, vol. 9, iss. 7, pp. 1417–1418. DOI: 10.1063/1.1761862.
8. Muntz E. P., Harnett L. N. Molecular Velocity Distribution Function Measurement in a Normal Shock Wave. In: *The Physics of Fluids*, 1969, vol. 12, iss. 10, pp. 2027–2035. DOI: 10.1063/1.1692308.
9. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V., Reshetnikova Yu. G. [On the maximum effect of high translational nonequilibrium in the shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2016, no. 3, pp. 84–95. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Yuliya D. Kuleshova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Аналитическая оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлеста в ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 2. С. 41–51.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D. Analytical estimation of the highest value of the effect of high-speed overshoot in a shock wave. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 41–51.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51