РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 519.852

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-61-76

ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Хасанов А. С., Зверева А. И.

*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

Аннотация

Целью данной статьи является рассмотрение основных идей пост-оптимального анализа в задачах линейного программирования на примере задачи планирования производства в случае двух видов продукции и трёх видов ресурсов.

Процедура и методы. Оптимальные решения задач линейного программирования зависят от параметров математических моделей рассматриваемых реальных процессов. В данной работе выбрана модель задачи планирования производства. Параметрами этой модели являются прибыли от продажи единицы каждого вида продукции и объёмы каждого вида ресурса. При рассмотрении общей проблемы производства n видов продукции с использованием m видов ресурсов возникает проблема, связанная с невозможностью видеть математические объекты. Для визуализации математических объектов рассматривается задача производства двух видов продукции с использованием трёх видов ресурсов. Такой подход позволил свести пост-оптимальный анализ к графическому анализу чувствительности оптимального решения к изменению параметров рассматриваемой задачи линейного программирования.

Результаты. Основные идеи пост-оптимального анализа рассмотрены в двух случаях. Проведён графический анализ устойчивости оптимального решения к изменению прибыли от продажи единицы каждого вида продукции при фиксированной прибыли от продажи единицы другого вида продукции. Проведён графический анализ чувствительности общей прибыли к изменению объёма каждого полностью используемого вида ресурса при фиксированных объёмах других видов ресурсов.

Практическая значимость работы обусловлена возможностью её использования преподавателями на начальном этапе изучения линейного программирования. В общем случае пост-оптимальный анализ является достаточно сложной задачей и выполняется после изучения симплекс-метода и теории двойственности. Описанный подход позволяет рас-

смагивать основные идеи пост-оптимального анализа на координатной плоскости сразу после рассмотрения графического метода. Он может быть использован преподавателями как на занятиях, так и при организации самостоятельной работы студентов, так как использует простейшие инструменты линейного программирования.

Ключевые слова: линейное программирование, графический метод, оптимальные решения, пост-оптимальный анализ

GRAPHICAL SENSITIVITY ANALYSIS OF OPTIMAL SOLUTIONS OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

A. Khasanov, A. Zvereva

Plekhanov Russian University of Economics

Stremyanniy pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract

Aim. We consider the main ideas of post-optimal analysis in linear programming problems on the example of the production planning in the case of two types of products and three types of resources.

Methodology. Optimal solutions of linear programming problems depend on the parameters of mathematical models of real processes under consideration. In this paper, the model of the production planning problem is selected. The parameters of this model are the profits from the sale of a unit of each product type and the volumes of each resource type. When considering the general problem of producing n types of products using m types of resources, there is a problem associated with the inability to see mathematical objects. In order to visualize mathematical objects, the problem of producing two types of products using three types of resources is considered. This approach allows one to reduce post-optimal analysis to graphical sensitivity analysis of the optimal solution to changes in the parameters of the linear programming problem under consideration.

Results. The main ideas of post-optimal analysis are considered in two cases. Graphical analysis of stability of the optimal solution to changes in the profit from the sale of a unit of each product type with the fixed profit from the sale of a unit of another product type is carried out. Graphical analysis of sensitivity of the total profit to the changes in the volume of each fully used resource type with the fixed volumes of the other resource types is performed.

Research implications. The work is of practical significance since it can be used by lecturers at the initial stage of studying linear programming. In general, post-optimal analysis is a rather complicated task and is performed after studying the simplex method and duality theory. The described approach allows one to consider the main ideas of post-optimal analysis on the coordinate plane immediately after considering the graphical method. It can be used by lecturers both in the classroom and in self-study of students, as it uses the simplest linear programming tools.

Keywords: linear programming, graphical method, optimal solutions, post-optimal analysis

Введение

Общая задача линейного программирования имеет вид:

$$z = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min), \quad (1)$$

1. Нахождение пределов изменения прибыли c_j (по отдельности), получаемой от реализации единицы j -го вида продукции, при которых сохраняется найденное оптимальное решение, где $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Анализ чувствительности оптимума целевой функции к изменению объёмов ресурсов b_i (по отдельности), где $i = 1, 2, \dots, m$.

Такой анализ в общем случае выполняется после изучения симплекс-метода и теории двойственности [14]. Но основные идеи метода анализа чувствительности оптимальных решений задач линейного программирования (т. е. идеи пост-оптимального анализа) могут быть рассмотрены на примере задачи планирования производства двух видов продукции. Такая задача может быть решена графическим методом на координатной плоскости, что позволяет провести графический анализ чувствительности оптимального решения задачи линейного программирования [2] и решить проблему, связанную с невозможностью видеть математические объекты в общем случае.

Графический метод

При $n = 2$ задача (4)–(6) принимает вид:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ , \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (9)$$

Будем считать, что $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, так как в противном случае целевая функция будет величиной постоянной. В неравенствах $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ системы (8) $a_{i1} \neq 0$ или $a_{i2} \neq 0$ для любого i . Перейдём к точечной интерпретации допустимых решений. На координатной плоскости Ox_1x_2 уравнение $ax_1 + bx_2 + c = 0$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$, является уравнением некоторой прямой, перпендикулярной вектору $\vec{n} = (a, b)$ [14]. Вектор $\vec{n}$ будем называть нормальным вектором этой прямой и откладывать от начала координат. Прямая с уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ из системы (8) разбивает плоскость на две полуплоскости и одна из них является решением неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ [14]. При $b_i > 0$ этой полуплоскостью является та, которая содержит начало координат. В общем случае соответствующую полуплоскость легко выбрать, например, по некоторой точке, не принадлежащей рассматриваемой прямой. Так как неравенствам $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ тоже соответствуют полуплоскости, то ОДР задачи (7)–(9) является пересечением полуплоскостей.

Линией уровня целевой функции $z = c_1x_1 + c_2x_2$ называются прямая, имеющая уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = c$, где c – произвольная постоянная. В точках этой прямой целевая функция равна c : $z = c_1x_1 + c_2x_2 = c$. При изменении постоянной c мы получим семейство параллельных прямых с общим нормальным вектором $\vec{n} = (c_1, c_2)$. Достаточно провести одну линию уровня, а остальные линии уровня могут быть получены путём параллельного переноса этой линии.

Рис. 1 / Fig. 1. Линии уровня l_1, l_2 целевой функции, нормальный вектор $\vec{n}$ в задаче (7)–(9) / Level lines l_1, l_2 of the objective function, the normal vector $\vec{n}$ in problem (7)–(9).

Источник: составлено авторами.

На рис. 1 приведены нормальный вектор $\vec{n}$, прямая l с направляющим вектором $\vec{n}$, линия уровня l_1 , проходящая через точку A , линия уровня l_2 , проходящая через точку B . Линия уровня l_2 получена путём перемещения линии уровня l_1 параллельно начальному положению в направлении вектора $\vec{n}$. Заметим, что $z(B) > z(A)$. Действительно, $z(B) - z(A) = z_2 - z_1 = (c_1x_{1B} + c_2x_{2B}) - (c_1x_{1A} + c_2x_{2A}) = c_1(x_{1B} - x_{1A}) + c_2(x_{2B} - x_{2A}) = \vec{n} \cdot \overline{AB}$, где $\vec{n} \cdot \overline{AB}$ – скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\overline{AB} = (x_{1B} - x_{1A}, x_{2B} - x_{2A})$. Так как угол между векторами $\vec{n}$ и $\overline{AB}$ равен нулю, то $z(B) - z(A) = \vec{n} \cdot \overline{AB} = |\vec{n}| \cdot |\overline{AB}| \cos(0) > 0$. Следовательно, значения целевой функции увеличиваются, если линию уровня перемещать параллельно начальному положению в направлении нормального вектора $\vec{n}$. На этом утверждении основан алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования с двумя переменными на максимум (7)–(9):

1. Строится ОДР.
2. От начала координат откладывается нормальный вектор $\vec{n} = (c_1, c_2)$.
3. Перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}$ проводится одна линия уровня.
4. Линия уровня перемещается в направлении нормального вектора $\vec{n}$ до положения опорной прямой, т. е. до крайнего положения, при котором линия уровня ещё имеет хотя бы одну общую точку с ОДР.
5. Общие точки ОДР и опорной прямой образуют множество оптимальных решений.

В данной работе рассматривается случай, когда все параметры модели и элементы технологической матрицы положительны и оптимальное решение является единственным. Рассмотрим конкретную задачу планирования производства двух видов продукции с использованием трёх видов ресурсов. Даны прибыли от реализации единицы продукции первого и второго видов $c_1 = 5$, $c_2 = 6$ и объёмы трёх используемых видов ресурсов $b_1 = 145$, $b_2 = 65$, $b_3 = 105$. Расходы i -го вида ресурса на изготовление единицы j -го вида продукции a_{ij} являются элементами следующей технологической матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае задача (7)–(9) приобретает вид:

$$z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \quad (10)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 145, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 65, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 105, \end{cases} \quad (11)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (12)$$

Результаты решения задачи (10)–(12) графическим методом приведены на рис. 2: ОДР – пятиугольник $OABCD$, опорной прямой является линия уровня $z = 115$, т. е. прямая $5x_1 + 6x_2 = 115$, единственным оптимальным решением является точка $B(5,15)$ (или вектор $X^* = (5,15)$), $z_{\max} = 115$.

Рис. 2. / Fig. 2. ОДР $OABCD$, опорная прямая $z = 115$ (---) и оптимальное решение $B(5,15)$ в задаче (10)–(12) / The feasible region $OABCD$, the supporting line $z = 115$ (---), and the optimal solution $B(5,15)$ in problem (10)–(12).

Источник: составлено авторами.

Устойчивость оптимального решения

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид $x_2 - x_{20} = k(x_1 - x_{10})$. Если φ – угол наклона прямой, то $k = \operatorname{tg} \varphi$. Если точка $M_0(x_{10}, x_{20})$ фиксирована, то изменение k приведёт к изменению угла наклона прямой, т. е. к вращению прямой вокруг точки M_0 . В результате получим семейство прямых, которые могут быть получены путём вращения какой-то одной прямой. На рис. 2 прямые AB , BC и опорная прямая $z = 115$ проходят через точку $B(5, 15)$ и имеют угловые коэффициенты $k_1 = -5/8$, $k_2 = -4/3$ и $k_z = -5/6$.

В общем случае, когда $z = c_1x_1 + c_2x_2$, формула для углового коэффициента k_z опорной прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ имеет вид:

$$k_z = -c_1 / c_2, \quad (13)$$

где мы считаем, что $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

В нашем случае $c_1 = 5$, $c_2 = 6$, $z = 5x_1 + 6x_2$. Пусть прибыль $c_2 = 6$ фиксирована. Если придать величине c_1 достаточно малое приращение, то целевая функция будет иметь вид $z = c_1x_1 + 6x_2$ и получит малое приращение. Следовательно, в других вершинах максимум не будет достигаться, вершина B сохранит статус единственного оптимального решения, новая опорная прямая будет получена путём достаточно малого вращения старой опорной прямой $z = 115$ вокруг точки B . Равенство (13) приобретает вид:

$$k_z = -c_1 / 6. \quad (14)$$

При возрастании c_1 правая часть формулы (14) убывает, угол наклона φ убывает, новая опорная прямая будет получена от старой опорной прямой $z = 115$ путём вращения по часовой стрелке. Статус опорной прямой при вращении сохранится до перехода к предельному положению, которым является прямая BC с угловым коэффициентом $k_2 = -4/3$. Из равенства $-c_1/6 = -4/3$ находим верхний предел при увеличении c_1 : $c_{1,\max} = 8$. При $c_1 = 8$ вершина B остаётся оптимальной, но появляется альтернативная оптимальная вершина C . При дальнейшем увеличении c_1 вершина B перестаёт быть оптимальной (оптимальной становится вершина C).

При убывании c_1 правая часть формулы (14) возрастает, угол наклона φ возрастает, новая опорная прямая будет получена от старой опорной прямой $z = 115$ путём вращения против часовой стрелки. Статус опорной прямой при вращении сохранится до перехода к предельному положению, которым является прямая AB с угловым коэффициентом $k_1 = -5/8$. Из равенства $-c_1/6 = -5/8$ находим нижний предел при уменьшении c_1 : $c_{1,\min} = 3,75$. При $c_1 = 3,75$ вершина B остаётся оптимальной, появляется альтернативная оптимальная вершина A . При дальнейшем уменьшении c_1 вершина B перестаёт быть оптимальной (оптимальной становится вершина A). Итак, при $c_2 = 6$ и $c_1 \in [3,75; 8]$ оптимальное решение остаётся неизменным.

Аналогично можно найти пределы изменения значения прибыли c_2 , при которых оптимальное решение остаётся неизменным, если прибыль $c_1 = 5$ фиксирована.

сирована. В общем случае интервалы изменения величин c_1 и c_2 не совпадают. Совпадение происходит, когда, как в нашем случае, угловые коэффициенты $k_1 = -5/8$, $k_2 = -4/3$ и $k_z = -5/6$ прямых AB , BC и опорной прямой $z = 115$ связаны соотношением $k_z = -k_1 k_2$. Убедимся в этом. Так как $z = 5x_1 + c_2 x_2$, равенство (13) приобретает вид:

$$k_z = -5/c_2. \quad (15)$$

При достаточно малом изменении c_2 новая опорная прямая может быть получена от старой опорной прямой $z = 115$ путём вращения вокруг точки B . Переходя к предельным положениям, в которых при вращении ещё сохраняется статус опорной прямой, найдём пределы изменения c_2 . Из равенства $-5/c_2 = -5/8$ находим верхний предел при увеличении c_2 : $c_{2,\max} = 8$. Из равенства $-5/c_2 = -4/3$ находим нижний предел при уменьшении величины c_2 : $c_{2,\min} = 3,75$. Итак, при $c_1 = 5$ и $c_2 \in [3,75; 8]$ оптимальное решение остаётся неизменным.

Теневые цены

На рис. 2 оптимальное решение $B(5,15)$ является точкой пересечения прямых $5x_1 + 8x_2 = 145$ и $4x_1 + 3x_2 = 65$. Следовательно, при таком оптимальном плане производства ресурсы первого и второго видов использованы полностью. Так как $7 \cdot 5 + 3 \cdot 15 < 105$, то в точке $B(5,15)$ имеет место неполное использование ресурса третьего вида. В этом случае ограничения $5x_1 + 8x_2 \leq 145$ и $4x_1 + 3x_2 \leq 65$ называются связанными, а ограничение $7x_1 + 3x_2 \leq 105$ называется несвязанным.

Предположим, что мы решили докупить полностью использованный ресурс первого вида, оставляя при этом неизменными объёмы остальных двух видов ресурсов. Величина изменения прибыли при увеличении объёма ресурса на единицу называется теневой ценой этого вида ресурса. Ясно, что покупка ресурса, который не использован полностью, не позволит выпустить дополнительную продукцию и не приведёт к изменению прибыли. Теневая цена такого вида ресурса равна нулю. Пусть Δr_1 – объём ресурса первого вида, купленного дополнительно, а $x_1^* = 5 + \Delta x_1 \geq 0$ и $x_2^* = 15 + \Delta x_2 \geq 0$ – координаты нового оптимального решения, найденные при неизменных значениях объёмов ресурсов второго и третьего видов при условии, что ограничения на первый и второй виды ресурсов остаются связанными. Найдём пределы изменения Δr_1 :

$$\begin{cases} 5(5 + \Delta x_1) + 8(15 + \Delta x_2) = 145 + \Delta r_1, \\ 4(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) = 65, \\ 7(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) \leq 105, \\ 5 + \Delta x_1 \geq 0, 15 + \Delta x_2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\Delta x_1 + 8\Delta x_2 = \Delta r_1, \\ 4\Delta x_1 + 3\Delta x_2 = 0, \\ 7\Delta x_1 + 3\Delta x_2 \leq 25, \\ \Delta x_1 \geq -5, \Delta x_2 \geq -15. \end{cases} \quad (16)$$

Из первого и второго уравнений системы (16) следует, что $\Delta x_1 = -\frac{3}{17}\Delta r_1$,

$\Delta x_2 = \frac{4}{17}\Delta r_1$. Подставим эти выражения в неравенства системы (16):

$$\begin{cases} 7\left(-\frac{3}{17}\Delta r_1\right) + 3\frac{4}{17}\Delta r_1 \leq 25, \\ -\frac{3}{17}\Delta r_1 \geq -5, \frac{4}{17}\Delta r_1 \geq -15. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta r_1 \geq -\frac{425}{9}, \\ \Delta r_1 \leq \frac{85}{3}, \Delta r_1 \geq -\frac{255}{4}. \end{cases}$$

Итак, в общем случае $-425/9 \leq \Delta r_1 \leq 85/3$, а если мы покупаем первый вид ресурса, то $0 \leq \Delta r_1 \leq 85/3$. Найдём новое значение целевой функции:

$$z(5 + \Delta x_1, 15 + \Delta x_2) = 5\left(5 - \frac{3}{17}\Delta r_1\right) + 6\left(15 + \frac{4}{17}\Delta r_1\right) = 115 + \frac{9}{17}\Delta r_1.$$

Отсюда следует, что величина изменения прибыли при увеличении объема ресурса первого вида на единицу, т.е. теневая цена этого вида ресурса, равна $\frac{9}{17}$.

Эта цена действует при изменении Δr_1 на отрезке $-\frac{425}{9} \leq \Delta r_1 \leq \frac{85}{3}$.

На рис. 2 при увеличении $\Delta r_1 > 0$ прямая $5x_1 + 8x_2 = 145$ перемещается вверх, оптимальное решение скользит вверх по прямой $4x_1 + 3x_2 = 65$. При некоторых Δr_1 ограничение на ресурс первого вида может стать несвязанным. На рис. 3 мы видим, что $\Delta r_1 = 85/3$ – предельное значение, при котором первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными. При этом значении $B(0, 65/3)$ – оптимальное решение, $z = 130$ – опорная прямая (см. рис. 3).

Рис. 3 / Fig. 3. ОДР $OBCD$, опорная прямая $z = 130$ (---), оптимальное решение $B(0, 65/3)$ при $\Delta r_1 = 85/3$ / The feasible region $OBCD$, the supporting line $z = 130$ (---), the optimal solution $B(0, 65/3)$ at $\Delta r_1 = 85/3$.

Источник: составлено авторами.

Аналогично, на рис. 2 при уменьшении $\Delta r_1 < 0$ прямая $5x_1 + 8x_2 = 145$ перемещается вниз, оптимальное решение скользит вниз по прямой $4x_1 + 3x_2 = 65$.

При некоторых Δr_1 ограничение на ресурс второго вида может стать несвязанным. На рис. 4 мы видим, что $\Delta r_1 = -425/9$ – предельное значение, при котором первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными. При этом значении $B(40/3, 35/9)$ – оптимальное решение, $z = 90$ – опорная прямая.

Рис. 4 / Fig. 4. ОДР $OABD$, опорная прямая $z = 90$ (---), оптимальное решение $B(40/3, 35/9)$ при $\Delta r_1 = -425/9$ / The feasible region $OABD$, the supporting line $z = 90$ (---), the optimal solution $B(40/3, 35/9)$ at $\Delta r_1 = -425/9$.

Источник: составлено авторами.

Искомую теньевую цену первого вида ресурса можно найти и из следующих соображений [2]. Из рис. 3 и рис. 4 видно, что при изменении величины Δr_1 от значения $\Delta r_1 = -425/9$ до значения $\Delta r_1 = 85/3$ значение целевой функции z , являющейся линейной функцией вида $z = k\Delta r_1 + b$ переменной Δr_1 , меняется от значения $z = 90$ до значения $z = 130$. Так как значение теньевой цены первого вида ресурса равно значению коэффициента k , то значение теньевой цены равно

$$\frac{130 - 90}{85/3 - (-425/9)} = \frac{9}{17}.$$

Аналогично найдём теньевую цену второго вида ресурса. Пусть Δr_2 – объём ресурса второго вида, купленного дополнительно, $x_1^* = 5 + \Delta x_1 \geq 0$ и $x_2^* = 15 + \Delta x_2 \geq 0$ – координаты нового оптимального решения, найденные при неизменных значениях объёмов ресурсов первого и третьего видов при условии, что ограничения на первый и второй виды ресурсов остаются связанными. Найдём пределы изменения Δx_2 :

$$\begin{cases} 5(5 + \Delta x_1) + 8(15 + \Delta x_2) = 145, \\ 4(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) = 65 + \Delta r_2, \\ 7(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) \leq 105, \\ 5 + \Delta x_1 \geq 0, 15 + \Delta x_2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\Delta x_1 + 8\Delta x_2 = 0, \\ 4\Delta x_1 + 3\Delta x_2 = \Delta r_2, \\ 7\Delta x_1 + 3\Delta x_2 \leq 25, \\ \Delta x_1 \geq -5, \Delta x_2 \geq -15. \end{cases} \quad (17)$$

Система (17) решается так же, как система (16). Если мы покупаем второй вид ресурса, то $0 \leq \Delta r_2 \leq 425/41$, в общем случае $-85/8 \leq \Delta r_2 \leq 425/41$,

$$z(5 + \Delta x_1, 15 + \Delta x_2) = 5 \left(5 + \frac{8}{17} \Delta r_2 \right) + 6 \left(15 - \frac{5}{17} \Delta r_2 \right) = 115 + \frac{10}{17} \Delta r_2.$$

Величина изменения прибыли при увеличении объёма ресурса второго вида на единицу, т. е. теневая цена этого ресурса, равна $\frac{10}{17}$ при $-\frac{85}{8} \leq \Delta r_2 \leq \frac{425}{41}$.

На рис. 2 при увеличении $\Delta r_2 > 0$ прямая $4x_1 + 3x_2 = 65$ перемещается вверх, оптимальное решение скользит вниз по прямой $5x_1 + 8x_2 = 145$. При некоторых Δr_2 ограничение на ресурс второго вида может стать несвязанным. На рис. 5 мы видим, что при предельном значении $\Delta r_2 = 425/41$ первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными.

Рис. 5 / Fig. 5. ОДР $OABD$, опорная прямая $z = 4965/41$ (---), оптимальное решение $B(405/41, 490/41)$ при $\Delta r_2 = 425/41$ / The feasible region $OABD$, the supporting line $z = 4965/41$ (---), the optimal solution $B(405/41, 490/41)$ at $\Delta r_2 = 425/41$.

Источник: составлено авторами.

Аналогично, на рис. 2 при уменьшении $\Delta r_2 < 0$ прямая $4x_1 + 3x_2 = 65$ перемещается вниз, оптимальное решение скользит вверх по прямой $5x_1 + 8x_2 = 145$. При некоторых Δr_2 ограничение на ресурс первого вида может стать несвязанным. На рис. 6 мы видим, что $\Delta r_2 = -85/8$ – предельное значение, при котором первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными.

Рис. 6 / Fig. 6. ОДР OBD , опорная прямая $z = 435/4$ (---), оптимальное решение $B(0; 145/8)$ при $\Delta r_2 = -85/8$ / The feasible region OBD , the supporting line $z = 435/4$ (---), the optimal solution $B(0; 145/8)$ at $\Delta r_2 = -85/8$.

Источник: составлено авторами.

Как видно из рис. 5 и рис. 6, при изменении величины Δr_2 от значения $\Delta r_2 = -85/8$ до значения $\Delta r_2 = 425/41$ значение целевой функции z , являющейся линейной функцией вида $z = k\Delta r_2 + b$ переменной Δr_2 , меняется от значения $z = 435/4$ до значения $z = 4965/41$. Так как значение теневой цены второго вида ресурса равно значению коэффициента k в зависимости $z = k\Delta r_2 + b$, то это значение теневой цены равно $\frac{4965/41 - 435/4}{425/41 - (-85/8)} = \frac{10}{17}$.

Теневые цены всех трёх видов ресурсов в этой задаче образуют тройку $(9/17, 10/17, 0)$. Отметим, что если составить по задаче (10)–(12) двойственную задачу и найти её решение симплекс-методом, то координатами этого решения будут теневые цены [14].

Заключение

Важно проанализировать, как изменится значение максимальной прибыли при изменении прибыли за единицу того или иного продукта при сохранении оптимального решения. Для этого нужно найти пределы изменения этих прибылей, при которых оптимальное решение остаётся неизменным. Знание того, какие ресурсы как используются, определяет узкие места в обеспечении производственного процесса. Можно продать излишки ресурсов для получения дополнительного дохода или докупить дополнительные объёмы тех ресурсов, которые используются полностью. Эти новые объёмы вместе с оставшимися излишками других ресурсов позволят выпустить дополнительную продукцию и получить дополнительный доход. Пост-оптимальный анализ является важным этапом после решения задачи линейного программирования.

Статья поступила в редакцию 28.05.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука, 1969. 424 с.
2. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. Harlow, England: Pearson Education, 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. 798 p.
4. Макжанова Я. В., Шаракшане А. А., Зверева А. И. Оптимизация нагрузки доцента как задача линейного программирования // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2016. № 1 (23). С. 160–177. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Documents/Известия%20РЕУ_ном23.pdf (дата обращения: 12.11.2020).
5. Попов В. А. Преподавание экономики и математики в единстве // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 6. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2019. С. 362–370.
6. Попов В. А. Математика и экономика // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 7. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2020. С. 435–441.
7. Зверева А. И. Совершенствование технологий преподавания высшей математики для студентов экономического университета // Управление региональным развитием: проблемы, возможности, перспективы развития: сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции с международным участием (Чебоксары, 02 сентября 2018 г.) /отв. ред. Е. А. Ильина. Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, 2018. С. 191–195.
8. Высшая математика (для гуманитарных специальностей) / Сухорукова И. В., Савина О. И., Лавриненко Т. А., Артюшина Т. Г. М.: Издательство Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова, 2018. 112 с.
9. Рыжкова Т. В., Тушканов Д. А., Чистякова Н. А. К вопросу об организации самостоятельной работы студентов (на примере кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова) // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2015. № 4 (22) С. 411–431. URL: [https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/4\(22\).aspx](https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/4(22).aspx) (дата обращения: 12.11.2020).
10. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейного программирования // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2013. № 4 (14). С. 92–121. URL: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (дата обращения: 12.11.2020).
11. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейной алгебры // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2013. № 4 (14). С. 122–165. URL: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (дата обращения: 12.11.2020).
12. Хасанов А. С. Об особенностях алгоритмов решения задач линейного программирования с неограниченными областями допустимых решений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 1. С. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
13. Макжанова Я. В., Зверева А. И., Хачко О. И. Сборник задач по теме «Функция двух переменных». М.: Типография «Белый ветер», 2018. 38 с.
14. Курс высшей математики для экономистов / Бобрик Г. И., Гладких И. М., Гринцевичюс Р. К., Матвеев В. И., Рудык Б. М., Сагитов Р. В., Шершнев В. Г. М.: ИНФРА-М, 2016. 647 с.

REFERENCES

1. Yudin D. B., Gol'shtein E. G. *Lineinoe programmirovaniye (teoriya, metody i prilozheniya)* [Linear programming (theory, methods and applications)]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.
2. Taha H. A. *Operations Research: An Introduction*. Harlow, England, Pearson Education Publ., 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. *Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences*. Englewood Cliffs, Prentice Hall Publ., 1989. 798 p.
4. Makzhanova Ya. V., Sharakhshane A. A., Zvereva A. I. [Optimization of an associate professor's workload as a linear programming problem]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)], 2016, no. 1 (23), pp. 160–177. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Documents/Известия%20РЕУ_ном23.pdf (accessed: 12.11.2020).
5. Popov V. A. [Education in economics, finance and mathematics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 6. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 6. No. 1]. Moscow, Publishing House of the Moscow Physical Society, 2019, pp. 362–370.
6. Popov V. A. [Mathematics and Economics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 7. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 7. No. 1]. Moscow, Publishing House of the Moscow Physical Society, 2020, pp. 435–441.
7. Zvereva A. I. [Improvement of technologies in teaching the higher mathematics for students of the economic university]. In: *Upravlenie regional'nyim razvitiem: problemy, vozmozhnosti, perspektivy razvitiya: sbornik nauchnykh statei po materialam Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem (Cheboksary, 02 sentyabrya 2018 g.)* [Regional development management: problems, opportunities, development prospects: a collection of scientific articles based on the materials of the International Scientific and Practical Conference with International Participation (Cheboksary, September 02, 2018)]. Cheboksary, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Publ., 2018, pp. 191–195.
8. Sukhorukova I. V., Savina O. I., Lavrinenko T. A., Artyushina T. G. *Vyshshaya matematika (dlya gumanitarnykh spetsial'nostei)* [Higher mathematics (for humanitarian specialties)]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2018. 112 p.
9. Ryzhkova T. V., Tushkanov D. A., Chistyakova N. A. [Concerning the organization of independent work of students (case study Department of Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics)]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)], 2015, no. 4 (22), pp. 411–431. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/4_22.aspx (accessed: 12.11.2020).
10. Khasanov A. S. [Individual homework on the basics of linear programming]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)], 2013, no. 4 (14), pp. 92–121. Available at: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (accessed: 12.11.2020).
11. Khasanov A. S. [Individual homework on the fundamentals of linear algebra]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)],

- 2013, no. 4 (14), pp. 122–165. Available at: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (accessed: 12.11.2020).
12. Khasanov A. S. [Peculiarities of algorithms for solving linear programming problems with unbounded feasible regions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 1, pp. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
13. Makzhanova Ya. V., Zvereva A. I., Khachko O. I. *Sbornik zadach po teme «Funktsiya dvukh peremennykh»* [Collection of tasks on the topic “The function of two variables”]. Moscow, Tipografiya «Belyi veter» Publ., 2018. 38 p.
14. Bobrik G. I., Gladkikh I. M., Grintsevichyus R. K., Matveev V. I., Rudyk B. M., Sagitov R. V., Shershnev V. G. *Kurs vysshei matematiki dlya ekonomistov* [The course of higher mathematics for economists]. Moscow, INFRA-M Publ., 2016. 647 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Хасанов Анис Салыхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

Зверева Анна Игоревна – старший преподаватель кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: azvereva@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

Anna I. Zvereva – Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: azvereva@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С., Зверева А. И. Графический анализ чувствительности оптимальных решений задач линейного программирования // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 2. С. 61–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-61-76.

FOR CITATION

Khasanov A. S., Zvereva A. I. Graphical sensitivity analysis of optimal solutions of linear programming problems. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 61–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-61-76.