РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.958
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-6-17

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ И ЗАДАЧА КОШИ

Алгазин О. Д.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1, Российская Федерация

Аннотация

Цель исследования – получить точные решения задачи Коши и краевых задач для уравнения Пуассона в полупространстве с полиномиальными данными.

Процедура и методы. В статье рассмотрены краевые задачи Дирихле и Неймана в полупространстве и задача Коши с полиномиальными данными для уравнения Пуассона. Для решения этих задач применяется преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.

Результаты. Показано, что задача Коши с полиномиальными данными для уравнения Пуассона имеет решение, являющееся полиномом. Это решение является единственным в классе функций медленного роста в гиперплоскостях, параллельных гиперплоскости, на которой задаются начальные условия. Полиномиальное решение получено в явном виде. Каждое решение из бесконечного множества решений задачи Дирихле или Неймана является решением некоторой задачи Коши.

Теоретическая и / или практическая значимость заключается в получении точных решений краевых задач и задачи Коши с полиномиальными данными для уравнения Пуассона.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая задача, задача Коши, преобразование Фурье, обобщенные функции медленного роста

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION IN A HALF-SPACE WITH POLYNOMIAL DATA AND THE CAUCHY PROBLEM

O. Algazin

Bauman Moscow State Technical University
Vtoraya Baumanskaya ul. 5, korpus 1, Moscow 105005, Russian Federation

Abstract

Aim. The purpose is to find exact solutions of boundary value problems and the Cauchy problem for the Poisson equation in a half-space with polynomial data.

Methodology. The paper considers the Dirichlet and Neumann boundary value problems in a half-space and the Cauchy problem with polynomial data for the Poisson equation. These problems are solved using the Fourier transform of generalized functions of slow growth.

Results. It is shown that the Cauchy problem with polynomial data for the Poisson equation has a solution that is a polynomial. This solution is the only one in the class of functions of slow growth in hyperplanes parallel to the hyperplane on which the initial conditions are specified. The polynomial solution is obtained explicitly. Each solution from an infinite set of solutions to the Dirichlet or Neumann problem is a solution to some Cauchy problem.

Research implications. We have obtained exact solutions to boundary value problems and the Cauchy problem with polynomial data for the Poisson equation.

Keywords: Poisson equation, boundary value problem, Cauchy problem, Fourier transform, generalized functions of slow growth

Введение

Хорошо известно [1], что для заданной непрерывной ограниченной функции $\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 1$ решение задачи Дирихле для полупространства:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

даётся интегралом Пуассона:

$$u(x, y) = \frac{\Gamma\left((n+1)/2\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y\varphi(t)}{\left(\left|x - t\right|^2 + y^2\right)^{(n+1)/2}} dt, \tag{3}$$

$$\left|x\right| = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}, \quad dt = dt_1 \ldots dt_n.$$

Это решение будет единственным в классе функций, ограниченных при $y \to +\infty$.

Для неограниченных непрерывных функций $\varphi(x)$ интеграл (3) будет, вообще говоря, расходящимся. Он сходится, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(t)|}{\left(|t|^2+1\right)^{(n+1)/2}}dt < \infty. \tag{4}$$

Однако, решение задачи Дирихле (1), (2) существует для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, но если условие (4) не выполняется, то его нельзя представить интегралом Пуассона (3).

Задача Дирихле разрешима для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ в случае полуплоскости ($n = 1$), что впервые показал Р. Неванлинна [2] (см. также [3]), и решение представляется интегралом:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[P(x,y,t) - Q(x,y,t)\right]\varphi(t)\,dt$$

с модифицированным ядром Пуассона:

$$P(x,y,t) - Q(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2} - Q(x,y,t),$$

где $Q(x, y, t)$ – гармонический полином от x и y, равный нулю при $y = 0$, который определяется по функции $\varphi(x)$ в зависимости от её роста. Универсального ядра не существует. Решение не единственное.

Обобщение этого результата на полупространство ($n > 1$) дано С. Дж. Гардинером [4]. Им также доказана в этой работе разрешимость задачи Неймана для произвольной непрерывной функции $\psi(x)$ в граничном условии:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \tag{5}$$

$$u_y(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Решение задач Дирихле и Неймана не единственно, оно определяется с точностью до слагаемого, являющегося решением соответствующей однородной задачи. Ограничение на рост решения сужает множество решений, но не приводит к единственности. Например, если искать решение задачи Дирихле в классе функций полиномиального роста, то оно определяется с точностью до слагаемого, являющегося гармоническим полиномом, обращающимся в нуль при $y = 0$ [5]. О множестве решений задач Дирихле и Неймана дают представление следующие теоремы (Н. У. Аракелян [6]):

1) пусть $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, тогда среди решений задачи Дирихле (1), (2) существует «приближенное» решение $u(x, y)$ задачи Неймана (5), (6) для произвольной непрерывной функции $\psi(x)$, то есть существует такая непрерывная функция $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(\mathbb{R}^n) \subset (0,1]$, что

$$|u_y(x,0) - \psi(x)| < \varepsilon(x);$$

2) пусть $\psi(x)$ – непрерывная функция, тогда среди решений задачи Неймана (5), (6) существует «приближенное» решение задачи Дирихле (1), (2) для произвольной непрерывной функции $\varphi(x)$.

Чтобы решение задачи Дирихле и задачи Неймана было единственным надо задать на границе и значение искомой функции, и значение нормальной производной, то есть рассмотреть задачу Коши.

Мы рассмотрим задачу Коши для уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа) с полиномиальными данными:

$$\Delta u(x,y) = P(x,y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

$$u_y(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $P(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

В классе аналитических функций решение задачи Коши существует и единственно в силу теоремы Коши-Ковалевской [7]. Покажем, что существует единственное решение задачи Коши (7), (8), (9) в классе функций медленного роста по x, и это решение является полиномом. При этом любое решение задачи Дирихле (1), (2) с заданным полиномом $\varphi(x)$ будет решением задачи Коши для некоторого полинома $\psi(x)$, то есть среди бесконечного множества решений задачи Дирихле содержатся все решения задачи Неймана (5), (6) с полиномиальными данными и любое решение задачи Неймана (5), (6) с заданным полиномом $\psi(x)$ будет решением задачи Коши для некоторого полинома $\varphi(x)$, то есть среди бесконечного множества решений задачи Неймана содержатся все решения задачи Дирихле (1), (2) с полиномиальными данными.

Поиску решений уравнений с частными производными в виде полиномов или квазиполиномов посвящены работы многих авторов [8–12], см. также [13–15].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа) с полиномиальными данными (7), (8), (9).

Решение задачи будем искать в классе функций медленного роста по переменной x при каждом фиксированном y, то есть при $\forall y \in \mathbb{R}$ найдётся такое $m \geq 0$ что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|u(x,y)\right| \left(1+|x|^2\right)^{-m} dx < \infty, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{10}$$

Поэтому можно применять преобразование Фурье для обобщённых функций медленного роста по переменной x [16].

Покажем, что существует единственное решение этой задачи, которое является полиномом и выведем явные формулы для получения этого решения.

Уравнение Пуассона (7) с полиномиальной правой частью имеет полиномиальные решения. В разделе 2 приведена формула для получения одного из таких решений.

Обозначим через $\tilde{u}(x,y)$ некоторое полиномиальное решение уравнения Пуассона (7), тогда решением задачи Коши для уравнения Пуассона (7)-(9) будет функция:

$$u(x,y)=v(x,y)+\tilde{u}(x,y),$$

где $v(x, y)$ – решение задачи Коши для уравнения Лапласа

$$\Delta v(x,y)=0,\ x\in\mathbb{R}^n,\quad y\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

$$v(x,0)=\varphi(x)-\tilde{u}(x,0)=\tilde{\varphi}(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{12}$$

$$v_y(x,0)=\psi(x)-\tilde{u}_y(x,0)=\tilde{\psi}(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{13}$$

$\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x)-$ полиномы.

2. Формула для полиномиального решения уравнения Пуассона

Формулу для полиномиального решения уравнение Пуассона (7) с полиномиальной правой частью $P(x, y)$,

$$\Delta u(x,y)=P(x,y),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad y\in\mathbb{R},$$

достаточно привести для случая монома

$$P(x,y)=x^k y^m.$$

Здесь $k=(k_1,\ldots,k_n)$ – мультииндекс, $x^k=x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$,

$|k|=k_1+\ldots+k_n$ – степень монома x^k.

Одним из полиномиальных решений уравнения Пуассона с правой частью $P(x, y) = x^k y^m$ будет [15]:

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^{[|k|/2]}(-1)^j\frac{m!}{(m+2j+2)!}y^{m+2j+2}\Delta_x^j x^k, \tag{14}$$

где $\Delta_x^j=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^j$, $[|k|/2]$ – целая часть числа $|k|/2$.

Например, одним из полиномиальных решений уравнения

$$u(x,y)=x^{(3,2,1)}y^3,\quad x\in\mathbb{R}^3,\quad y\in\mathbb{R}$$

будет полином:

$$u(x,y)=\frac{1}{20}x^{(3,2,1)}y^5-\frac{1}{420}x^{(3,0,1)}y^7-\frac{1}{140}x^{(1,2,1)}y^7+\frac{1}{2520}x^{(1,0,1)}y^9.$$

3. Задача Коши для уравнения Лапласа с полиномиальными начальными данными

Поскольку решение задачи Коши для уравнения Пуассона с полиномиальными данными сводится к решению задачи Коши для уравнения Лапласа, то мы рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u(x,y)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad y\in\mathbb{R},$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

$$u_y(x,0)=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы. В силу линейности задачи достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – мономы.

$$1)\ \varphi(x)=x^k,\quad \psi(x)=0,\quad k=(k_1,\ldots,k_n).$$

Применим преобразование Фурье по x [16], обозначив $\mathcal{F}_x\left[u(x,y)\right](t,y)=U(t,y)$. Получим задачу Коши для ОДУ второго порядка:

$$U_{yy}(t,y)-|t|^2 U(t,y)=0,\quad t\in\mathbb{R}^n,\quad y\in\mathbb{R},$$

$$U(t,0)=(2\pi)^n(-i)^{|k|}\partial^k\delta(t),\quad t\in\mathbb{R}^n,$$

$$U_y(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}^n,$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $\partial^k=\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_n^{k_n}}$.

Единственным решением этой задачи Коши будет обобщённая функция

$$U_k(t,y)=(2\pi)^n(-i)^{|k|}\operatorname{ch}(|t|y)\partial^k\delta(t),$$

которую можно представить в виде:

$$U_k(t,y)=\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{k!|m|!}{(k-2m)!|2m|!m!}y^{2|m|}(2\pi)^n(-i)^{|k|-|2m|}(-1)^{|m|}\partial^{k-2m}\delta(t),$$

где $k!=k_1!\ldots k_n!$, $[k/2]=([k_1/2],\ldots,[k_n/2])$.

Докажем последнюю формулу. Поскольку

$$\operatorname{ch}(|t|y)=\sum_{|m|=0}^{\infty}\frac{\left(t_1^2+\ldots+t_n^2\right)^{|m|}}{|2m|!}y^{2|m|}=\sum_{m\geq 0}\frac{|m|!}{|2m|!m!}t^{2m}y^{2|m|},$$

то

$$\partial^{2m}\operatorname{ch}(|t|y)\Big|_{t=0}=\frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m}y^{2|m|}$$

и обобщённая функция $(2\pi)^n(-i)^{|k|}\operatorname{ch}(|t|y)\partial^k\delta(t)$ действует на основные функции $\varphi(t)$ по правилу:

$$\left((2\pi)^n(-i)^{|k|}\operatorname{ch}(|t|y)\partial^k\delta(t),\ \ \varphi(t)\right)=(2\pi)^n(-i)^{|k|}\left(\partial^k\delta(t),\ \ \operatorname{ch}(|t|y)\varphi(t)\right)=$$

$$=(2\pi)^n(i)^{|k|}\left(\delta(t),\ \ \partial^k\left(\operatorname{ch}(|t|y)\varphi(t)\right)\right)=$$

$$=(2\pi)^n(i)^{|k|}\left(\delta(t),\ \ \sum\nolimits_{m=0}^{k}C_k^m\partial^{k-m}\varphi(t)\partial^m\operatorname{ch}(|t|y)\right)=$$

$$=(2\pi)^n(i)^{|k|}\sum\nolimits_{m=0}^{k}C_k^m\left(\partial^{k-m}\varphi(t)\partial^m\operatorname{ch}(|t|y)\right)\Big|_{t=0}=$$

$$=(2\pi)^n(i)^{|k|}\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}C_k^{2m}\left(\partial^{k-2m}\varphi(t)\right)\Big|_{t=0}\frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m!}y^{2|m|}=$$

$$=(2\pi)^n(i)^{|k|}\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}\frac{k!|m|!}{(k-2m)!|2m|!m!}y^{2|m|}\left(\partial^{k-2m}\varphi(t)\right)\Big|_{t=0}=$$

$$=\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}\frac{k!|m|!}{(k-2m)!|2m|!m!}y^{2|m|}(2\pi)^n(i)^{|k|}\left(\delta(t),\partial^{k-2m}\varphi(t)\right)=$$

$$=\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}\frac{k!|m|!}{(k-2m)!|2m|!m!}y^{2|m|}(2\pi)^n(i)^{|k|}(-1)^{|k|-|2m|}\left(\partial^{k-2m}\delta(t),\ \ \varphi(t)\right)=$$

$$=\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}\frac{k!|m|!}{(k-2m)!|2m|!m!}y^{2|m|}(2\pi)^n(-i)^{|k|-|2m|}(-1)^{|m|}\left(\partial^{k-2m}\delta(t),\ \ \varphi(t)\right).$$

Применяя обратное преобразование Фурье к $U_k(t, y)$ по переменной t, получим решение задачи Коши:

$$u_k(x,y)=\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}(-1)^{|m|}\frac{k!|m|!}{(k-2m)!|2m|!m!}x^{k-2m}y^{2|m|}. \qquad (15)$$

В частности, при $n = 1$, получим:

$$u_k(x,y)=\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}(-1)^m C_k^{2m}x^{k-2m}y^{2m}=\operatorname{Re}\left[(x+iy)^k\right].$$

$$2)\ \varphi(x)=0,\ \psi(x)=x^k,\quad k=(k_1,\dots,k_n).$$

Обозначим решение задачи Коши с этими начальными условиями через $v_k(x, y)$. Пусть $u_k(x, y)$ – решение предыдущей задачи, которое даётся формулой (15). Тогда

$$v_k(x,y)=\int_0^y u_k(x,\xi)\,d\xi.$$

Действительно,

$$v_k(x,0)=0,\quad \partial_y v_k(x,0)=u_k(x,0)=x^k,$$

$$\Delta v_k(x,y)=\int_0^y \Delta_x u_k(x,\xi)\,d\xi+\partial_y u_k(x,y)=$$

$$=\int_0^y \Delta_x u_k(x,\xi)\,d\xi+\partial_y u_k(x,y)-\partial_y u_k(x,0)=$$

$$=\int_0^y \Delta_x u_k(x,\xi)\,d\xi+\int_0^y \partial_y^2 u_k(x,\xi)\,d\xi=\int_0^y \Delta\, u_k(x,\xi)\,d\xi=0.$$

Таким образом,

$$v_k(x,y)=\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}(-1)^{|m|}\frac{k!\,|m|!}{(k-2m)!\,(2|m|+1)!\,m!}x^{k-2m}y^{2|m|+1}. \tag{16}$$

В частности, при $n=1$

$$v_k(x,y)=\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}(-1)^{m}\frac{k!}{(k-2m)!\,(2m+1)!}x^{k-2m}y^{2m+1}=$$

$$=\frac{1}{k+1}\sum\nolimits_{m=0}^{[k/2]}(-1)^{m}C_{k+1}^{2m+1}x^{k-2m}y^{2m+1}=\frac{1}{k+1}\,\mathrm{Im}\left[(x+iy)^{k+1}\right]=$$

$$=\int_0^y \mathrm{Re}\left[(x+i\xi)^k\right]d\xi.$$

Например, при $n=2$, $k=(2,2)$ имеем:

$$u_{(2,2)}(x,y)=x^{(2,2)}-x^{(0,2)}y^2-x^{(2,0)}y^2+\frac{1}{3}y^4,$$

$$v_{(2,2)}(x,y)=x^{(2,2)}y-\frac{1}{3}x^{(0,2)}y^3-\frac{1}{3}x^{(2,0)}y^3+\frac{1}{15}y^5.$$

4. Решение задачи Коши, неограниченное в окрестности конечной точки

Если пополнить пространство $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой ∞, то получим расширенное пространство $\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}=\overline{\mathbb{R}}^n$, гомеоморфное n-мерной сфере S_n. Полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$ и не ограничены в окрестности бесконечно удалённой точки ∞. Можно рассмотреть задачу Коши, когда начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus \{x_0\}$ и не ограничены в окрестности конечной точки x_0.

Применив к полиномам $u_k(x, y)$ и $v_m(x, y)$ преобразование Кельвина [17] в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, получим функцию:

$$u(x,y)=\frac{u_k(x,y)}{\left(|x|^2+y^2\right)^{k+(n-1)/2}}+\frac{v_m(x,y)}{\left(|x|^2+y^2\right)^{m+(n+1)/2}},$$

которая является решением задачи Коши для уравнения Лапласа с начальными данными:

$$\varphi(x)=\frac{x^k}{|x|^{2k+n-1}},\quad \psi(x)=\frac{x^m}{|x|^{2m+n+1}},$$

неограниченными в окрестности начала координат.

Например, решением задачи Коши:

$$\Delta u(x,y)=0,\ x\in\mathbb{R}^2,\quad y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

$$u(x,0)=\frac{x^{(3,2)}}{|x|^{11}}=\frac{x_1^3x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{11/2}},\quad x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\},$$

$$u_y(x,0)=\frac{x^{(3,2)}}{|x|^{13}}=\frac{x_1^3x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{13/2}},\quad x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\},$$

будет функция:

$$u(x,y)=\frac{u_{(3,2)}(x,y)}{\left(|x|^2+y^2\right)^{11/2}}+\frac{v_{(3,2)}(x,y)}{\left(|x|^2+y^2\right)^{13/2}}=$$

$$=\frac{x^{(3,2)}-x^{(3,0)}y^2-3x^{(1,2)}y^2+x^{(1,0)}y^4}{\left(|x|^2+y^2\right)^{11/2}}+$$

$$+\frac{x^{(3,2)}y-\frac{1}{3}x^{(3,0)}y^3-x^{(1,2)}y^3+\frac{1}{5}x^{(1,0)}y^5}{\left(|x|^2+y^2\right)^{13/2}}=$$

$$=\frac{x_1^3x_2^2-3x_1x_2^2y^2-x_1^3y^2+x_1y^4}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^{11/2}}+$$

$$+\frac{x_1^3x_2^2y-x_1x_2^2y^3-\frac{1}{3}x_1^3y^3+\frac{1}{5}x_1y^5}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^{13/2}}.$$

Заключение

Решение задачи Коши для уравнения Пуассона с полиномиальными данными сводится к решению задачи Коши для уравнения Лапласа с полиномиальными данными. Получено явное полиномиальное решение этой задачи (единственное). Любое решение из бесконечного множества решений задачи Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве является решением некоторой задачи Коши. То есть среди решений задачи Дирихле с заданным полиномом в краевом условии содержатся все решения задачи Неймана с произвольным полиномом в граничном условии, а среди решений задачи Неймана с заданным полиномом в краевом условии содержатся все решения задачи Дирихле с произвольным полиномом в граничном условии. Применив к решению задачи Коши для уравнения Лапласа с полиномами в начальном условии, которые не ограничены в окрестности бесконечно удалённой точки, преобразование Кельвина, получим решение задачи Коши с начальными данными, неограниченными в окрестности конечной точки.

Статья поступила в редакцию 09.07.02021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
2. Nevanlinna R. Ueber eine Erweiterung des Poissonschen Integrals // Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. 1925. Vol. 24 (4). P. 1–15.
3. Finkelstein M., Scheinberg S. Kernels for solving problems of Dirichlet type in a half-plane // Advances in Mathematics. 1975. Vol. 18. Iss. 1 P. 108–113. DOI: 10.1016/0001-8708(75)90004-3.
4. Gardiner S. J. The Dirichlet and Neuman problems for Harmonic Functions in Half-Spaces // Journal of the London Mathematical Society. 1981. Vol. s2-24. Iss. 3. P. 502–512. DOI: 10.1112/jlms/s2-24.3.502.
5. Siegel D., Talvila E. O. Uniqueness for the n-dimensional half space Dirichlet problem // Pacific Journal of Mathematics. 1996. Vol. 175. No. 2. P. 571–587.
6. Аракелян Н. У. О задачах Дирихле и Неймана для гармонических функций // Известия НАН Армении. 2008. Т. 43. № 6. С. 21–38.
7. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
8. Никольский С. М. Краевая задача для многочленов // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 223–236.
9. Карачик В. В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 7. С. 1149–1170. DOI: 10.7868/S0044466914070072.
10. Волков Е. А. О разрешимости в классе многочленов задачи Дирихле для уравнения Лапласа на произвольном многоугольнике // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 102–114.
11. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations // Methods and Applications of Analysis. 1999. Vol. 6. Iss. 1. P. 97–108. DOI: 10.4310/MAA.1999.v6.n1.a7.
12. Differential-symbol method of constructing the quasipolynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation / Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Malanchuk O. M.,

Pukach P. Ya. // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 239. Iss. 1. P. 62–74. DOI: 10.1007/s10958-019-04288-9.
13. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 6. С. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.
14. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Трикоми в полосе // Математика и математическое моделирование. 2018. № 3. С. 1–12. DOI: 10.24108/mathm/0318.0000120.
15. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Трикоми в полосе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 3. С. 8–21. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-3-8-21.
16. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
17. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М: Наука, 1968. 208 с.

REFERENCES

1. Bitsadze A. V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 296 p.
2. Nevanlinna R. Ueber eine Erweiterung des Poissonschen Integrals. In: *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A*, 1925, vol. 24 (4), pp. 1–15.
3. Finkelstein M., Scheinberg S. Kernels for solving problems of Dirichlet type in a half-plane. In: *Advances in Mathematics*, 1975, vol. 18, iss. 1. pp. 108–113. DOI: 10.1016/0001-8708(75)90004-3.
4. Gardiner S. J. The Dirichlet and Neuman problems for Harmonic Functions in Half-Spaces. In: *Journal of the London Mathematical Society*, 1981, vol. s2-24, iss. 3, pp. 502–512. DOI: 10.1112/jlms/s2-24.3.502.
5. Siegel D., Talvila E. O. Uniqueness for the n-dimensional half space Dirichlet problem. In: *Pacific Journal of Mathematics*, 1996, vol. 175, no. 2, pp. 571–587.
6. Arakelyan N. U. [On the Dirichlet and Neumann problems for harmonic functions]. In: *Izvestiya NAN Armenii* [Proceedings of National Academy of Sciences (NAS) of Armenia], 2008, vol. 43, no. 6, pp. 21–38.
7. Petrovskii I. G. *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 400 p.
8. Nikol'skii S. M. [A Boundary Value Problem for Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1999, vol. 227, pp. 223–236.
9. Karachik V. V. [Construction of polynomial solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball]. In*: Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1149–1170. DOI: 10.7868/S0044466914070072.
10. Volkov E. A. [On the Solvability, in the Class of Polynomials, of the Dirichlet Problem for the Laplace Equation on an Arbitrary Polygon]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2001, vol. 232, pp. 102–114.
11. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations. In: *Methods and Applications of Analysis*, 1999, vol. 6, iss. 1, pp. 97–108. DOI: 10.4310/MAA.1999.v6.n1.a7.

12. Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Malanchuk O. M., Pukach P. Ya. Differential-symbol method of constructing the quasipolynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation. In: *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 239, iss. 1, pp. 62–74. DOI: 10.1007/s10958-019-04288-9.
13. Algazin O. D. [Polynomial Solutions of the Boundary Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.
14. Algazin O. D. [Dirichlet Problem Polynomial Solutions for the Tricomi Equation in a Strip]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2018, no. 3, pp. 1–12. DOI: 10.24108/mathm/0318.0000120.
15. Algazin O. D. [Polynomial solutions to the mixed dirichlet-neumann boundary value problem for the tricomi equation in the strip]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2018, no. 3, pp. 8–21. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-3-8-21.
16. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
17. Timan A. F., Trofimov V. N. *Vvedenie v teoriyu garmonicheskikh funktsii* [Introduction to the theory of harmonic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 208 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: mopi66@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg D. Algazin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д. Краевые задачи для уравнения Пуассона в полупространстве с полиномиальными данными и задача Коши // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 6–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-6-17

FOR CITATION

Algazin O. D. Boundary value problems for the Poisson equation in a half-space with polynomial data and the Cauchy problem. In: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics, 2021, no. 3, pp. 6–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-6-17