УДК 517.956.4
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-18-28

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Бозиев О. Л.[1,2]

[1] *Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова 360004, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173, Российская Федерация*

[2] *Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН 360017, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Арманд, д. 37А, Российская Федерация*

Аннотация

Целью работы является нахождение приближенного решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения, содержащего степенную нелинейность. Для этого используется приближенно-аналитический метод, основанный на применении априорной оценки решения задачи для линеаризации исходного уравнения.

Процедура и методы. На первом шаге метода производится редукция нелинейного уравнения к нагруженному уравнению путём замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной. Затем устанавливается априорная оценка решения полученной задачи в подходящем функциональном пространстве. Посредством интегрирования нагруженного уравнения по пространственной переменной производится переход к ассоциированному с ним нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению. Последнее линеаризуется с помощью предварительно установленной априорной оценки нагруженной задачи, в которой выбирается верхняя граница неравенства. Приближение к точному решению исходного нелинейного уравнения предлагается производить с помощью итерационного процесса решения последовательности линейных задач.

Результаты. Получена формула, выражающая решение нагруженного уравнения через его норму и решение ассоциированного обыкновенного дифференциального уравнения. Приводится пример, иллюстрирующий применение метода к модельной задаче.

Теоретическая и/или практическая значимость. Применяемая процедура позволяет получить аналитическое выражение для приближенного решения нелинейной задачи. Метод может быть применён к дифференциальным уравнениям в частных производных любого типа и порядка, содержащих натуральную степень искомой функции или её производной.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, априорная оценка, приближенное решение

© CC BY Бозиев О. Л., 2021.

A METHOD FOR AN APPROXIMATE SOLUTION TO A PARABOLIC EQUATION WITH A POWER-LAW NONLINEARITY

O. Boziev[1,2]

[1] Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov
ul. Chernyshevskogo173, Nalchik 360004, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation

[2] Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
ul. Armand37A, Nalchik 360017, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation

Abstract

Aim. The purpose is to find an approximate solution to the first initial boundary value problem for a parabolic equation with a power-law nonlinearity. The problem is solved using an approximate analytical method based on the application of an a priori estimation of the solution to the problem for the linearization of the original equation.

Methodology. The first step in applying the method is to reduce the nonlinear equation to the loaded equation, by replacing the nonlinear member with its integral in the spatial variable. Following this, an a priori estimate of the obtained problem is established in a suitable functional space. By integrating the loaded equation with respect to the spatial variable, a transition is made to the nonlinear ordinary differential equation associated with it. The latter is linearized using the a priori estimate of the loaded problem, in which the upper bound of inequality is chosen.

Results. A formula is obtained that expresses the solution to the loaded equation in terms of its norm and the solution to the associated ordinary differential equation. Approximation of the solution to a nonlinear equation is proposed to be performed by using an iterative process for solving a sequence of linear problems. An example illustrating the application of the method to a model problem is presented.

Research implications. The applied procedure makes it possible to obtain an analytical expression for an approximate solution to a nonlinear problem. The described method can be applied to partial differential equations of any type and order, containing the natural degree of the desired function or its derivative.

Keywords: power nonlinearity, loaded partial differential equations, a priori estimates, approximate solutions

Введение

Необходимость математического моделирования разнообразных процессов, происходящие в физических, биологических, экологических и других сложных системах, во многих случаях приводит к начально-краевым задачам для одномерных уравнений в частных производных параболического типа со степенной нелинейностью. Широкое приложение имеет, например, уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП):

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sum_{i=1}^{p} a_i u^i(x,t).$$

Это связано с тем, что некоторые конкретные значения p и коэффициентов под знаком суммы приводят правую часть уравнения к видам, соответствующим некоторым известным соотношениям, таким как уравнение Ньюэлла-Уайтхеда, Зельдовича и некоторым другим [6].

Процедура нахождения точных или приближенных решений нелинейных уравнений любого типа при заданных условиях представляет значительную сложность. Одним из подходов к нахождению приближенных решений подобных уравнений является редукция нелинейного уравнения к структурно связанному с ним нагруженному дифференциальному уравнению [5, с. 12]. Этот подход используется, в частности, в [1] для нахождения решения гиперболического уравнения с натуральной степенной нелинейностью. В указанной работе предложен приближенно-аналитический метод, в основе которого лежит редукция исходного уравнения к ассоциированному с ним нагруженному дифференциальному уравнению и установление априорной оценки полученной задачи, которая впоследствии используется для нахождения некоторого приближенного решения исходной нелинейной задачи. В развитии метода это приближенное решение принимается за начальное приближение в итерационном процессе аппроксимации точного решения исходной задачи [2].

Переход от нелинейного уравнения к нагруженному можно совершить, в частности, путём замены нелинейного члена рассматриваемого уравнения его интегралом по пространственной переменной. Это приводит к ослаблению нелинейности, что позволяет сохранить некоторую адекватность нелинейного уравнения моделируемому процессу, в отличие от различных способов линеаризации нелинейного уравнения, при которых эта адекватность теряется. В случае уравнений со степенной нелинейностью нагруженный член может представлять собой норму искомой функции в некотором лебеговом пространстве. Априорная оценка решения нагруженного уравнения, установленная в этом пространстве, используется для линеаризации ассоциированного с нагруженным обыкновенного дифференциального уравнения. Последнее получается путём интегрирования нагруженного уравнения и применения аналога теоремы о среднем значении интеграла. Для нахождения начального приближенного решения необходимо проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого позволяет записать начальное приближение в итерационном процессе последовательной аппроксимации решения исходного уравнения. Метод может быть применён к уравнениям любого типа и порядка, содержащим степенную нелинейность.

Описанная процедура демонстрируется в данной работе на простом модельном примере.

1. Постановка задачи

В одномерной области $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega = [0, l]$, рассмотрим частный случай уравнения КПП, а именно уравнение Фишера:

$$u_t - u_{xx} - au + au^2 = 0, \qquad (1)$$

которое является базовым модельным уравнением при решении задачи вытеснения одного биологического вида другим доминантным видом на некоторой территории [4, с. 294]. Здесь $u = u(x, t)$ – безразмерная концентрация (плотность) особей популяции, причём $0 \le u \le 1$; $a = \text{const} > 0$ – мальтузианским параметром популяции, а именно, мера мгновенной удельной скорости изменения размера популяции. Пусть для уравнения (1) заданы начальное и граничные условия:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\varphi(x) \in C^1[0,l], \quad \psi_1(t), \quad \psi_2(t) \in C^1[0,T].$$

Заменяя нелинейный член (1) его средним значением на интервале изменения пространственной переменной, редуцируем (1) нагруженным уравнением:

$$u_t - u_{xx} - au + \frac{a}{l}\int_\Omega u^2 dx = 0 \tag{4}$$

при неизменных условиях (2) и (3). Заметим, что интегральный сомножитель в последнем слагаемом левой части можно рассматривать при любом t как квадрат нормы функции u в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega |u|^2\, dx = \|u\|^2_{2,\Omega}.$$

2. Априорная оценка

Запишем скалярное произведение уравнения (4) и функции u:

$$(u_t, u) - (u_{xx}, u) - a(u,u) + \left(\frac{a}{l}\int_\Omega u^2 dx, u\right) = 0. \tag{5}$$

Каждое слагаемое по отдельности перепишем следующим образом:

$$\left(u_t, u\right) = \int_\Omega u_t u\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega}, \quad a\left(u,u\right) = a\|u\|^2_{2,\Omega}, \quad \left(\frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}, u\right) = \frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega u dx,$$

$$-(u_{xx}, u) = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(u_x u) dx + \int_\Omega u_x u_x dx = u_x(0,t)\psi_1(t) - u_x(l,t)\psi_2(t) + \int_\Omega |u_x|^2\, dx.$$

После подстановки в (5) приходим к уравнению:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega} = a\|u\|^2_{2,\Omega} + u_x(l,t)\psi_2(t) - u_x(0,t)\psi_1(t) - \int_\Omega |u_x|^2\, dx - \frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega u dx.$$

Правую часть оценим по модулю, предварительно опуская заведомо отрицательное слагаемое, что приводит к неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{2,\Omega}^2 \le a\|u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a}{l}\|u\|_{2,\Omega}^2 \int_\Omega |u|dx + |u_x(l,t)||\psi_2(t)| + |u_x(0,t)||\psi_1(t)|.$$

Проинтегрируем обе его части по t с учётом вложения $L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$, что позволяет получить соотношение:

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \le 2a\int_0^t \|u\|_{2,\Omega}^2 dt + \frac{2a}{\sqrt{l}}\int_0^t \|u\|_{2,\Omega}^3 dt + K,$$

в котором

$$K = \|\varphi(x)\|_{2,\Omega}^2 + \max_{t\in[0,T]}\int_0^t \left(|u_x(l,\tau)||\psi_2(\tau)| + |u_x(0,\tau)||\psi_1(\tau)|\right)d\tau.$$

К последнему неравенству применим один из нелинейных аналогов неравенства Гронуолла-Беллмана [7, с. 22], что приводит к оценке:

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \le C(t) \tag{6}$$

с правой частью

$$C(t) = Ke^{2at}\left(1 + \sqrt{\frac{K}{l}}\left(e^{at} - 1\right)\right)^{-2}. \tag{7}$$

При этом константа K должна удовлетворять неравенству

$$K < \frac{l}{a^2T^2}e^{-2aT}. \tag{8}$$

Таким образом, доказана **теорема:** пусть при любом t функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (1) – (3). Тогда, функция $||u||_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от t.

3. Начальное приближенное решение

Для нахождения начального приближенного решения задачи (1) – (3) перейдём от (1) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого сначала проинтегрируем (1) по пространственной переменной, затем применим аналог теоремы о среднем значении интеграла, для чего устремим верхнюю границу интеграла к l и разделим его на l. В результате получим:

$$u_x = \frac{x}{l}\int_\Omega (u_t - au + au^2)dx + u_x(0,t).$$

После повторного интегрирования по x и удовлетворения граничных условий (3) придём к выражению:

$$u(x,t) = \frac{x(x-l)}{2}\left(\overline{u}'(t) - a\overline{u}(t) + \frac{a}{l}\|u\|_{2,\Omega}^2\right) + \frac{x}{l}(\psi_2(t) - \psi_1(t)) + \psi_1(t), \tag{9}$$

в котором

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{l}\int_{\Omega} u(x,t)dx. \tag{10}$$

Применяя к (9) преобразование (10) получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\overline{u}' + \left(\frac{12}{l^2} - a\right)\overline{u} + \frac{a}{l}\|u\|_{2,\Omega}^2 = \frac{12}{l^3}(\psi_1 + \psi_2). \tag{11}$$

Для его линеаризации воспользуемся априорной оценкой (6), в которой выберем знак равенства и получим:

$$\overline{u}' + \left(\frac{12}{l^2} - a\right)\overline{u} = \frac{12}{l^3}(\psi_1 + \psi_2) - \frac{a}{l}C(t). \tag{12}$$

Необходимое для интегрирования (12) начальное условие легко получить из (2) с помощью преобразования (10):

$$\overline{u}(0) = \frac{1}{l}\int_{\Omega} u(x,0)dx = \frac{1}{l}\int_{\Omega} \varphi(x)dx. \tag{13}$$

Как известно, задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения имеет единственное решение при условии непрерывности коэффициентов и правых частей (12) и (13). После нахождения решения этой задачи, его необходимо подставить вместо $\overline{u}$ в формулу (9). Сюда же подставим $C(t)$ вместо $||u||_{2,\Omega}^2$ чтобы получить приближенное решение задачи (4), (2), (3), принимаемое за начальное приближенное решение исходной задачи (1) – (3).

4. Итерационный процесс

Определённую указанным способом функцию (9) примем за начальное приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе поиска решения исходной задачи, состоящем в последовательной аппроксимации точного решения задачи (1) – (3) решениями задач вида:

$$\left.\begin{aligned} & u_t^{(k)} - u_{xx}^{(k)} - au^{(k)} = -a\left(u^{(k-1)}\right)^2, \\ & u^{(k)}(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \\ & u^{(k)}(0,t) = \psi_1(t), \quad u^{(k)}(l,t) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

с итерационным индексом k = 1, 2, ..., до выполнения задаваемого условия завершения процесса.

5. Пример

Пусть константы в задаче (1) – (3) имеют значения a = 0,2, l = 1, T = 1. Подставляя их в неравенство (8), находим, что K < 16,756. Положим K = 16. Тогда, согласно (7),

$$C(t) = 16e^{0,4t}\left(4e^{0,2t} - 3)\right)^{-2}.$$

Потребуем равенство в (6), тогда оно примет вид

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 = 16e^{0,4t}\left(4e^{0,2t} - 3)\right)^{-2}. \quad (15)$$

Заметим, что знаменатель правой части отличен от нуля для всех $t \geq 0$.

В условиях (2), (3) выберем $\varphi(x) = x, \psi_1(t) = \psi_2(t) = t,$ в силу чего уравнение (12) и условие (13) принимают, соответственно, вид:

$$\overline{u}' + 11,8\overline{u} = 24t - 3,2e^{0,4t}\left(4e^{0,2t} - 3)\right)^{-2}, \quad (16)$$

$$\overline{u}(0) = 0,5.$$

Решение полученной задачи с учётом только значимых членов записывается в виде:

$$\overline{u}(t) \approx 2,034 - 0,029e^{-0,4t} - 0,029e^{-0,6t} + 0,022e^{-1,2t}.$$

Подстановка $\overline{u}(t)$ и правой части (15) в (9) приводит к функции:

$$u(x,t) \approx \frac{x(x-1)}{2} \times$$

$$\times\left(0,013e^{-0,4t} + 0,018e^{-0,6t} + 0,026e^{-1,2t} - 0,041 + 3,2e^{0,4t}\left(4e^{0,2t} - 3\right)^{-2}\right) + t, \quad (17)$$

которую необходимо принять за начальное приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе (14).

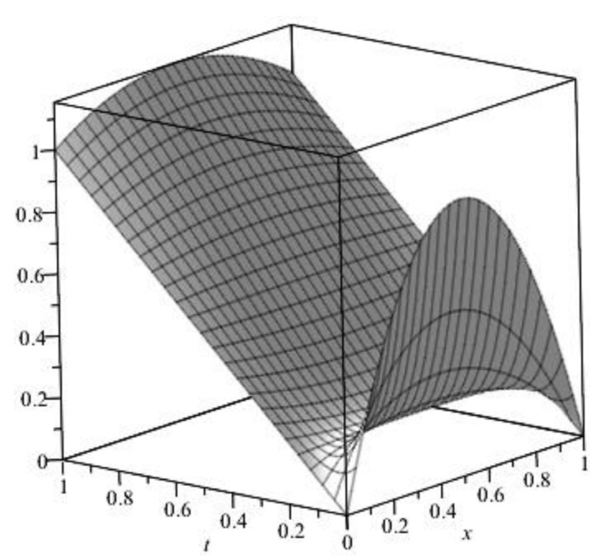

Рис. 1 / Fig. 1. График функции $u^{(0)}(x, t)$ / The graph of the function $u^{(0)}(x, t)$.

Источник: по данным автора.

На рис. 1, 2, 3 продемонстрированы, соответственно, график функции (17), т. е. $u^{(0)}(x, t)$ а также функции $u^{(1)}(x, t)$ и функции $u(x, t)$ – точного решения задачи (1) – (3) при выбранных значениях констант и начально-краевых условий, построенные средствами системы компьютерной математики Maple. В этой же системе получено численное решение задачи (14) при $k = 1$, которому соответствует поверхность на рис. 3.

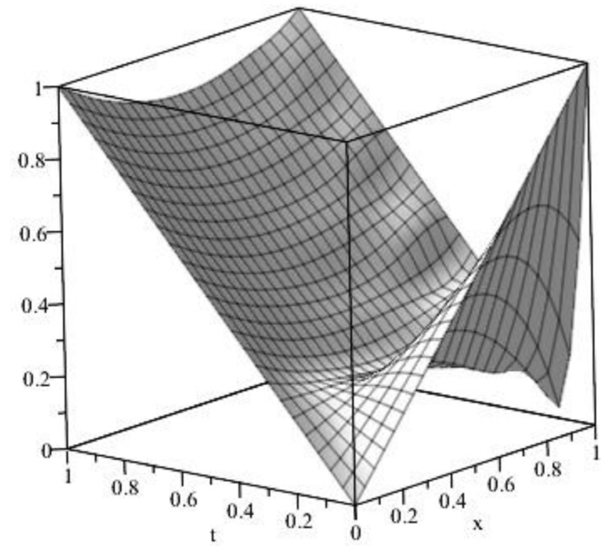

Рис. 2 / Fig. 2. График функции $u^{(1)}(x, t)$ / The graph of the function $u^{(1)}(x, t)$.

Источник: по данным автора.

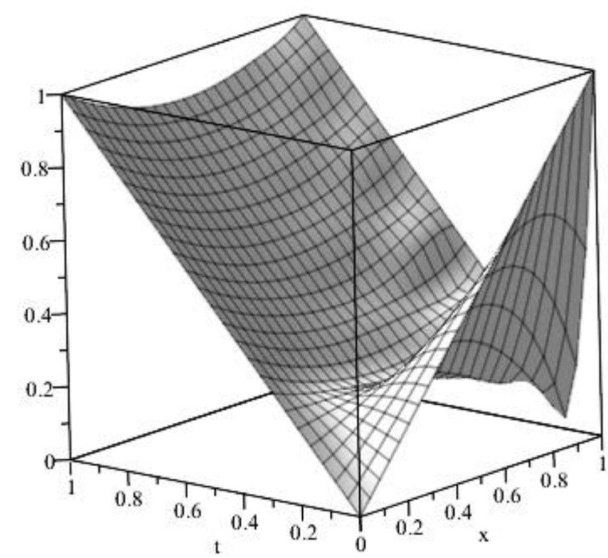

Рис. 3 / Fig. 3. График функии $u(x, t)$ / The graph of the function $u(x, t)$.

Источник: по данным автора.

Анализ этих поверхностей и результатов вычислений показывает, что уже на первой итерации при $t \le 0{,}5$ значения функций $u^{(0)}(x, t)$ и $u(x, t)$ практически совпадают, а их графики неразличимы. При увеличении t происходит рост относительной погрешности вычислений, которая не превышает 10%. На основе полученных результатов можно полагать, что продолжение итерационного процесса приведёт к её уменьшению.

Заключение

Таким образом, процедура нахождения приближенного решения исходной нелинейной задачи вида (1) – (3) описанным приближенно-аналитическим методом состоит из следующих этапов:

1) замена (1) нагруженным уравнением (4) при неизменных условиях (2), (3);

2) получение априорной оценки вида (6) нагруженной задачи с применением известных интегральных неравенств и теорем вложения и определение входящих в неё констант;

3) переход от нагруженного уравнения к ассоциированному с ним нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению вида (11), а от него к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению вида (12) с помощью оценки (6);

4) его решение при условии (13);

5) подстановка вместе с верхней границей нормы в (9), что даёт $u^{(0)}$ вида (17);

6) запуск итерационного процесса (14) и его выполнение для нахождения приближенного решения задачи (1) – (3) с нужной точностью.

Среди перечисленных этапов сложными являются вывод необходимой априорной оценки и определение входящих в неё констант (этап 2), а также последовательное решение задач вида (14) (этап 6).

Предложенный приближенно-аналитический метод был опробован на уравнениях различного типа и разных типах нелинейностей. В частности, рассматривались гиперболическое уравнение [2] с натуральной степенью нелинейности и параболическое уравнение [3] с рациональной степенью нелинейности $p \in (0,1)$ Второй случай нелинейности представляет большую сложность, так как при этом нагруженный член не образует норму функции, в силу чего приходится прибегать к более тонким рассуждениям для получения априорных неравенств.

Очевидно, что направление дальнейшего развития метода состоит в установлении сходимости последовательных приближенных решений задач вида (14) к точному решению исходной нелинейной задачи.

Статья поступила в редакцию 15.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бозиев О. Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 49–58. DOI: 10.26456/vtpmk108.
2. Бозиев О. Л. О приближенно-аналитическом методе решения нелинейного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 43–52. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-43-52.
3. Бозиев О. Л. Аппроксимация решений нелинейных параболических уравнений решениями ассоциированных нагруженных уравнений // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 4. С. 3–10. DOI: 10.18127/j20700970-201804-01.
4. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 368 с.
5. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
6. Полосков И. Е. Анализ поведения распределенных систем, описываемых стохастическими уравнениями типа КПП // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Информатика. Механика. 2009. № 7 (33). С. 61–65.
7. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 152 с.

REFERENCES

1. Boziev O. L. [An approximate solution of loaded hyperbolic equation with homogenios initial conditions]. In: *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 49–58. DOI: 10.26456/vtpmk108.
2. Boziev O. L. [On the approximate-analytic method of solving a nonlinear hyperbolic equation with homogeneous initial conditions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2017, no. 3, pp. 43–52. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-43-52.
3. Boziev O. L. [Approximation of nonlinear parabolic equations solutions by solutions of associated loaded equations]. In: *Nelineinyi mir* [2018, vol. 16, no. 4, pp. 3–10. DOI: 10.18127/j20700970-201804-01.
4. Martinson L. K., Malov Yu. I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoi fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2002. 368 p.
5. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012. 232 p.
6. Poloskov I. E. [Analysis of distributed systems described by stochastic equations of KPP-type]. In: *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Informatika. Mekhanika* [Perm University Bulletin. Series: Mathematics. Computer science. Mechanics], 2009, no. 7 (33), pp. 61–65.
7. Filatov A. N., Sharova L. V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineinykh kolebanii* [Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 152 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности Института информатики, электроники и робототехники Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН;
e-mail: boziev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg L. Boziev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computer Technologies and Information Security, Institute of Informatics, Electronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov; Senior Researcher, Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: boziev@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бозиев О. Л. Об одном методе приближенного решения параболического уравнения со степенной нелинейностью // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 18–28.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-18-28

FOR CITATION

Boziev O. L. A method for an approximate solution to a parabolic equation with a power-law nonlinearity. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 18–28.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-18-28