УДК 533 6.011
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЁСТА В УДАРНО-СЖАТОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель: найти асимптотически точные значения для функции распределения пар молекул в ударно-сжатой бинарной смеси газов с сильным отличием по концентрациям и молекулярным массам её компонентов.

Процедура и методы. Применялись математические методы теоретической физики, связанные с вычислением пороговой частоты соударений на основе кинетического уравнения Больцмана.

Результаты. Найдены асимптотически точные аналитические выражения для функций распределения пар молекул по абсолютным значениям их относительных скоростей. Определены также максимумы этих функций в парах: лёгкий-лёгкий, лёгкий-тяжёлый и тяжёлый-тяжёлый компоненты. Эти максимумы и соответствуют наибольшим интенсивностям эффектов высокоскоростного перехлёста в компонентах ударно-сжатой смеси газов.

Теоретическая и практическая значимость. Исследуемый в статье эффект высокоскоростного перехлёста в компонентах ударно-сжатой смеси газов реализуется при экспериментальном моделировании его в ударных трубах (например, в процессах пиролиза углеродных и углеродно-водородных соединений). Результаты, полученные в работе, существенны для оптимального проведения таких экспериментов.

Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна.

Благодарности. Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 20-07-00740 А. Исследование выполнено в рамках гранта Президента РФ для молодых учёных-кандидатов наук МК-1330.2020.9.

ASYMPTOTIC HIGH-SPEED OVERSHOOT EFFECT VALUE IN A SHOCK-COMPRESSED GAS MIXTURE

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova

Moscow State Region University
ul. Very Voloshinoi 24, Mytishchi 141014, Moscow region, Russian Federation

Abstract

Aim. We have found asymptotically exact values for the distribution function of pairs of molecules in a shock-compressed, binary mixture of gases with a strong difference in the concentrations and molecular weights of its components.

Methodology. The research relies on the mathematical methods of theoretical physics related to the calculation of the threshold frequency of collisions based on the kinetic Boltzmann equation.

Results. Asymptotically exact analytical expressions are found for the distribution functions of pairs of molecules by the absolute values of their relative velocities. The maxima of these functions are also determined in pairs: light–light, light–heavy and heavy–heavy components. These maxima correspond to the greatest intensities of the effects of high-speed overshoot in the components of the shock-compressed gas mixture.

Research implication. The effect of high-speed overshoot in the components of a shock-compressed gas mixture is realized by experimentally modeling it in shock pipes (for example, in the processes of pyrolysis of carbon and carbon-hydrogen compounds). The results obtained in this work are essential for the optimal performance of such experiments.

Keywords: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave

Acknowledgments. This work is supported by Russian Science Foundation (Grant No. 20-07-00740A) and by the RF President's Grants Council (State Support of Young Scientists – Candidates of Sciences Program, Grant No. MK-1330.2020.9).

Введение

В предыдущей работе авторов [1], фактически был начат новый этап аналитических исследований эффекта высокоскоростной неравновесности (или, иначе, эффекта высокоскоростного перехлёста), не требующий традиционного априорного задания [2–4] одночастичных функций распределения молекул по их собственным тепловым скоростям.

Напомним, что априорное задание одночастичных функций распределения по тепловым скоростям молекул в ударной волне сводится, как правило, к следующим аппроксимациям:

– приближение Тамма – Мотт-Смита [2; 3];
– эллипсоидальное распределение [5, 6];
– распределение Холвея [7].

На основе каждого из этих априорных приближений авторами были найдены аналитические представления функций распределения пар молекул по модулю их относительной скорости. Формулы для функций распределения пар молекул были получены как для однокомпонентных идеальных газов, так и для их бинарных смесей [8–11].

Аналитическое представление функций распределения пар молекул позволило авторам выделить и записать в виде формул выражения для четырёх основных физических факторов, от которых зависит величина эффекта высокоскоростного перехлёста.

Важно отметить, что наблюдение эффекта перехлёста перед проведением соответствующего эксперимента требует, прежде всего, оценки порядка его величины.

Как показали численные расчёты [12], минимальное значение величины эффекта, существенное для его учёта, составляет не менее, чем 10^4.

Это обстоятельство свидетельствует в пользу использования авторами ранее соответствующих априорных аппроксимаций. Дело в том, что они не требуют точного численного исследования структуры ударной волны, но дают при этом правильную оценку порядка эффекта.

Однако преимущество такого качественного подхода к исследованию рассматриваемого явления может в ряде случаев обернуться и существенными недостатками.

Прежде всего, это касается влияния сечения столкновения молекул на возможность существования эффекта вообще [13].

Кроме того, учёт сечений столкновений молекул влияет и на точный аналитический вид функций распределения пар молекул.

Влияние сечения молекул на величину эффекта высокоскоростной неравновесности можно рассматривать и как пятый основной физический фактор.

1. Специфика процессов релаксации лёгкого и тяжёлого компонентов рэлеевской смеси газов

В предыдущей работе авторов [1] было найдено локально-точное асимптотическое представление функции распределения пар молекул рэлеевской смеси газов. Для его построения не требовалось определение точного решения уравнения Больцмана в полной области ударного сжатия.

Возможность такого локально-точного решения проблемы обусловлена асимптотическим состоянием потока, в котором действие рассматриваемого эффекта является наиболее сильным.

Как показали численные расчёты [12, 13], такое состояние потока реализуется в так называемом рэлеевском газе, когда, с одной стороны, имеет место сильное преобладание концентраций лёгкого компонента над тяжёлым ($n_l \gg n_h$), а с другой, наоборот, – сильное преобладание массы тяжёлого компонента над лёгким ($m_h \gg m_l$).

В сущности, сечение, в котором реализуется указанное асимптотическое состояние потока, является как бы начальным для всего последующего течения с непрерывным сжатием внутри фронта ударной волны. Заметим, что термин «сечение» является качественным. На самом деле, под этим термином понимается короткая область релаксации лёгкого компонента, протяжённость которой зависит от точности расчётов. В результате релаксации лёгкий компонент меняет температуру от «холодной» равновесной на входе в волну до «горячей» равновесной после прохождения зоны релаксации.

В то же самое время, с тяжёлым компонентом, в главном приближении, ничего не происходит. Это обусловлено тем, что его нагрев происходит на значительно большей длине релаксации λ_h, чем длина релаксации лёгкого компонента λ_l. Как показано в работе [14], отношение длин $\dfrac{\lambda_h}{\lambda_l}$ пропорционально $b = \dfrac{m_h}{m_l}$, причём в рэлеевском газе это отношение является очень большим, $b \gg 1$. Таким образом, в ударно-сжатом рэлеевском газе реализуются как бы две ударные волны. Первая – в результате сжатия лёгкого компонента, вторая – после сжатия тяжёлого.

После сжатия лёгкий компонент сопровождает тяжёлый, двигаясь с дозвуковой скоростью. Напротив, тяжёлый компонент движется со сверхзвуковой скоростью, «подстраивая» её в результате торможения к скорости лёгкого.

2. Асимптотически точные выражения для функций распределения пар молекул в рэлеевской смеси газов

С момента входа в ударную волну к поступательно-равновесному состоянию приходит только лёгкий компонент. При этом он оказывается сжатым и нагретым. Тяжёлая же фракция смеси (один или несколько тяжёлых компонентов) не участвует в поступательной релаксации и находится по-прежнему в «холодном» поступательно-равновесном состоянии, как и перед фронтом волны.

Такое стационарное состояние газовой среды является в целом, конечно, неравновесным. При этом оно является асимптотически точным, поскольку исходно «холодное» и сжатое «горячее» максвелловские распределения являются точными решениями кинетического уравнения Больцмана (точнее системы таких уравнений для смеси газов).

Таким образом, вследствие релаксации, лёгкий компонент приходит в поступательно-равновесное состояние сжатым и нагретым. Напротив, тяжёлая фракция смеси не претерпевает никаких изменений и остаётся в том же «холодном» равновесном состоянии, что и перед ударной волной.

Найдём функции распределения по относительной скорости пар молекул, отличающихся составом: лёгкий-лёгкий компоненты, тяжёлый-тяжёлый и лёгкий-тяжёлый.

Введём **<u>основную количественную характеристику рассматриваемого эффекта высокоскоростного перехлёста</u>**:

$$\Delta\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} = \left[G_{neq}^{(\alpha,\beta)} - G_{eq}^{(\alpha,\beta)} \right] / \, G_{eq}^{(\alpha,\beta)}. \qquad (1)$$

Здесь $G_{eq}^{(\alpha,\beta)}, G_{neq}^{(\alpha,\beta)}$ – соответственно поступательно-равновесная и поступательно-неравновесная функции распределения по модулю относительной скорости молекул g в парах (α, β), где каждый из индексов α и β принимают значения l и h.

Заметим, что функции пар молекул $G_{neq}^{(\alpha,\beta)}$ и $G_{eq}^{(\alpha,\beta)}$ берутся в различных сечениях потока смеси газов, сжимаемой в ударной волне.

Первая из них: $G_{neq}^{(\alpha,\beta)}$ – берётся в конце зоны релаксации лёгкого компонента в некотором асимптотическом сечении, фиксирующем конец этой релаксации. Вторая же: $G_{eq}^{(\alpha,\beta)}$ – берётся в конце зоны релаксации тяжёлого компонента, совпадающим, по существу, с началом зоны поступательно-равновесного состояния всей смеси газов, сжатой в ударной волне.

В случае, когда выполняется строгое неравенство $\Delta\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} > 0,$ эффект высокоскоростного перехлеста существует, в противоположном случае: $\Delta\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} \le 0$ эффект отсутствует.

Пара лёгкий-лёгкий компоненты

$$G_{neq}^{(l,l)} \to G_{eq}^{(l,l)} \to \Delta\tilde{G}^{(l,l)} \to 0. \qquad (2)$$

Формула (2) выполняется естественным образом, поскольку лёгкий компонент достигает состояния поступательного равновесия в конце зоны своей релаксации. В течение последующей релаксации тяжёлого компонента к общему равновесию вместе с лёгким компонентом, лёгкий компонент по-прежнему будет находиться в состоянии поступательного равновесия.

Однако макроскопические параметры этого локально-равновесного состояния могут оставаться неизменными или же меняться, отслеживая влияние релаксации тяжёлого компонента. В последнем случае влияние тяжёлого компонента на равновесные параметры лёгкого будет осуществляться через законы сохранения (потоков массы, импульса, энергии), в которых участвуют они оба.

Этим двум случаям математически соответствуют предельные асимптотические переходы двух разных типов:

$$1)\quad \nu = \frac{n_h}{n_l} \to 0,\ \frac{m_h}{m_l} = b \to \infty,\ \frac{n_h m_h}{n_l m_l} = \nu b \equiv \tilde{\rho} = \text{const} \ll 1 \qquad (3)$$

$$2)\quad \nu = \frac{n_h}{n_l} \to 0,\ \frac{m_h}{m_l} = b \to \infty,\ \frac{n_h m_h}{n_l m_l} = \nu b \equiv \tilde{\rho} = \text{const} \cong 1. \qquad (4)$$

Видно, что различие этих переходов обусловлено разными значениями безразмерного параметра $\tilde{\rho},$ введённого в работе [15].

В случае 1) макроскопические параметры равновесного состояния лёгкого компонента остаются неизменными и равными тем, которые были достигнуты в результате его быстрой релаксации.

В случае 2) макроскопические параметры равновесного состояния лёгкого компонента будут переменными. Переменность параметров обусловлена влиянием релаксации тяжёлого компонента.

Пара из молекул тяжёлого компонента

Рассмотрим теперь пары молекул тяжёлого компонента. С момента входа в ударную волну и до конца зоны поступательной релаксации лёгкого компонента функция распределения пар молекул тяжёлого компонента сохраняет тот же поступательно-равновесный вид, что и перед входом в волну:

$$G_{neq}^{(h,h)} = \left(\frac{m_h}{4\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_h}{4kT_0} \right), \tag{5}$$

где T_0 – общая равновесная температура обоих компонентов на входе в ударную волну.

Функция $G_{eq}^{(\alpha,\beta)}$, входящая в формулу (1) и равная для тяжёлого компонента $G_{eq}^{(h,h)}$, в отличие от функции $G_{neq}^{(h,h)}$, берётся не в конце зоны релаксации лёгкого компонента, а в другом сечении: в начале зоны полного термодинамического равновесия смеси газов за ударной волной.

По существу, сечения, в которых берутся сравниваемые функции $G_{neq}^{(h,h)}$ и $G_{eq}^{(h,h)}$, отделены длиной релаксации тяжёлого компонента, задающего основную часть толщины ударной волны.

Функция пар $G_{eq}^{(h,h)}$ почти полностью совпадает с функцией (5), с точностью до замены равновесной «холодной» температуры потока на входе в ударную волну T_0 на равновесную «горячую» температуру T_S на выходе из волны:

$$G_{eq}^{(h,h)} = \left(\frac{m_h}{4\pi k T_S} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_h}{4kT_S} \right). \tag{6}$$

Заметим, что «горячая» равновесная температура T_S смеси газов, нагретых в ударной волне, выше «холодной» температуры T_0 на входе в неё:

$$T_S > T_0. \tag{7}$$

Структура формулы для параметра T_S, то есть температуры «глобального» равновесия за ударной волной, когда оба компонента смеси и лёгкий, и тяжёлый релаксируют к равновесному состоянию, существенно зависит от типа асимптотического предельного перехода: (3) или (4).

В случае (3) температура T_S будет полностью совпадать с температурой равновесного состояния лёгкого компонента T_{sl}, причём:

$$\frac{T_S}{T_0} = \frac{T_{sl}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma_l - 1}{2} M_l^2 \left[1 - \left(\frac{\rho_{l0}}{\rho_{lS}} \right)^2 \right]. \tag{8}$$

Здесь γ_l – отношение удельной теплоёмкости лёгкого компонента при постоянном давлении c_{pl} к его удельной теплоёмкости при постоянном объёме c_{vl}, то есть $\gamma_l = \frac{c_{pl}}{c_{vl}}$; M_l – число Маха свободного потока, $M_l = \frac{u}{a_l}$, u – скорость смеси газов на входе в ударную волну, a_l – скорость звука в лёгком газе, $a_l^2 = \gamma_l \frac{kT}{m_l}$, ρ_{l0} и ρ_{lS} – плотности лёгкого компонента на входе и выходе из волны, соответственно.

В случае (4) равенство температур T_{sl} и T_S, имеющее место в предыдущем случае (3), выполняться не будет. Температура глобального равновесия T_S лёгкого и тяжёлого компонентов будет обязательно выше T_{sl}. Превосходство температуры T_S над T_{sl} обусловлено подогревом лёгкой фракции смеси релаксацией тяжёлой к общему равновесию. Как показывает анализ общих законов сохранения для смеси газов, в асимптотическом случае (3) влиянием релаксации тяжёлого компонента на макропараметры лёгкого можно пренебречь. В случае (4) этого сделать нельзя.

Подставив формулы (5) и (6) в формулу (1), получим:

$$\Delta\tilde{G}_{neq}^{(h,h)} = \left\{ \left(\frac{T_S}{T_0} \right)^{3/2} \exp\left[\frac{m_h g^2}{4k} \left(\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_0} \right) \right] - 1 \right\}. \tag{9}$$

Формулу (9) можно преобразовать к следующему виду:

$$\Delta\tilde{G}_{neq}^{(h,h)} = \left\{ \exp\left[\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_S}{T_0} \right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_S} \right) \left(\frac{m_h g^2}{4kT_0} \right) \right] - 1 \right\}. \tag{10}$$

Из формулы (10) непосредственно следует, что эффект высокоскоростного перехлёста будет существовать только при положительной определённости показателя степени экспоненты:

$$\left[\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_S}{T_0} \right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_S} \right) \left(\frac{m_h g^2}{4kT_0} \right) \right] > 0. \tag{11}$$

В противном случае эффект перехлёста не существует и будет действовать поступательно-равновесная кинетика.

Из соотношения (11), в свою очередь, видно, что наибольшее значение эффекта перехлёста будет достигаться при значении модуля относительной скорости, равного нулю, то есть

$$\left. \Delta\tilde{G}_{neq}^{(h,h)} \right|_{\max} = \left(\frac{T_S}{T_0} \right)^{3/2} - 1. \tag{12}$$

Однако этот случай практически мало полезен, поскольку при равенстве нулю модуля относительной скорости невозможно преодолеть энергетический барьер неупругих соударений.

<u>«Перекрёстная» пара из молекул лёгкого и тяжёлого компонента</u>

Функция распределения перекрёстной пары молекул в поступательно-равновесном состоянии за фронтом волны была ранее получена в работах авторов [8; 9].

$$G_{eq}^{(l,h)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_S} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{\mu g^2}{2kT_S} \right). \tag{13}$$

Подобная же функция для поступательно-неравновесного состояния внутри ударного фронта была также получена в работах [8; 9] и имела более сложный вид:

$$G_{neq}^{(l,h)} = \left[\frac{\mu}{2\pi kT_э}\right]^{1/2} \frac{g}{u}\left\{\exp\left[-\frac{\mu\left(g-u\right)^2}{2kT_э}\right] - \exp\left[-\frac{\mu\left(g+u\right)^2}{2kT_э}\right]\right\}. \qquad (14)$$

Здесь величина $T_э$, так называемая эффективная температура, равна:

$$T_э = \frac{T_l m_h + T_h m_l}{m_h + m_l}, \qquad (15)$$

причём в соответствии с асимптотическим переходом (3) температура T_l равна T_S, а температура T_h равна T_0, то есть

$$T_э = \frac{T_S m_h + T_0 m_l}{m_h + m_l}. \qquad (16)$$

Для однокомпонентного газа формулы, подобные равенствам (13) и (14), были получены ранее в работах [16; 17].

Для последующего исследования выражение (14) необходимо несколько упростить:

$$G_{neq}^{(l,h)} = \left[\frac{\mu}{2\pi kT_э}\right]^{1/2} \frac{g}{u}\exp\left[-\frac{\mu\left(g-u\right)^2}{2kT_э}\right]\left\{1-\exp\left[-\frac{2\mu g u}{kT_э}\right]\right\}. \qquad (17)$$

Преобразуем равенство (17), введя в него множитель $Q(X)$:

$$Q\left(X\right) = \frac{1-e^{-X}}{X} \le \frac{1-\left(1-X\right)}{X} \le 1, \qquad (18)$$

где величина $X = \dfrac{2\mu g u}{kT_э}$.

В итоге этих преобразований исходная формула (14) запишется в виде:

$$G_{neq}^{(l,h)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mu}{2kT_э}\right)^{3/2} g^2 \exp\left[-\frac{\mu\left(g-u\right)^2}{2kT_э}\right]\Delta Q\left(\frac{2\mu g u}{kT_э}\right). \qquad (19)$$

В дальнейших преобразованиях, ввиду неравенства (18), множитель $Q\left(\dfrac{2\mu g u}{kT_э}\right)$ будет опущен.

Вследствие равенств (13) и (19) выражение для величины $\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)}$, исследуемой на предмет существования эффекта перехлёста, то есть когда $\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} > 0$, и определения его количественного значения, запишется в виде:

$$\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(\frac{T_S}{T_э}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{\mu g^2}{2kT_S} - \frac{\mu(g-u)^2}{2kT_э}\right] - 1 \right\}. \tag{20}$$

3. Область существования и максимальное значение эффекта перехлёста $\left(\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} > 0\right)$ при заданной скорости смеси газов перед фронтом ударной волны

В формуле (20) можно выделить безразмерный параметр подобия $\theta_э^S$:

$$\theta_э^S = \frac{T_S}{T_э}, \tag{21}$$

где, в соответствии с формулой (16), этот параметр будет иметь следующий структурный вид:

$$\theta_э^S = \frac{T_S}{T_э} = \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{b}\theta_{0S}} = 1 + \frac{\frac{1}{b}\left(1 - \theta_{0S}\right)}{1 + \frac{\theta_{0S}}{b}}. \tag{22}$$

$$\theta_{0S} = \frac{T_0}{T_S}. \tag{23}$$

$$\frac{T_0}{T_S} = \left[1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} M_l^2 \left(1 - \epsilon^2\right) \frac{1 + b\nu}{1+\nu}\right]^{-1}. \tag{24}$$

$$\epsilon = \varepsilon + (1+\nu)(1+b\nu)(1-\varepsilon)(M_l)^{-2}. \tag{25}$$

Из формулы (25) следует, что при большом числе Маха свободного потока смеси, совпадающем для случая предельного перехода (3) с числом Маха лёгкого компонента M_l, сжатие в ударной волне ϵ^{-1} будет совпадать с предельным сжатием $\varepsilon^{-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, когда $M_l \gg 1$ (практически, когда $M_l > 3$).

Из формул (22)–(25) непосредственно следует, что безразмерный параметр $\theta_э^S$, входящий в формулу (21), и входящий, таким образом, в формулу для эффекта перехлёста (20), сам непосредственно зависит от семи других безразмерных параметров, определяющих течение смеси газов, сжимаемой в ударной волне.

Заметим, что заранее предвидеть такую сложную конструкцию количественной меры (20) эффекта перехлёста или же получить её на основании экспериментов или численного моделирования просто невозможно.

Главное же в существовании аналитического представления такой меры заключается в том, что она позволяет связать в единое целое все многочисленные безразмерные факторы (параметры подобия), определяющие исследуемое явление.

После выделения параметра $\theta_э^S$ в формуле (20), получим:

$$\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(\theta_э^S\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\left(\frac{\mu}{2kT_S} \right) \left(g^2 - \theta_э^S \left(g-u\right)^2 \right) \right] - 1 \right\}. \qquad (26)$$

В обоих предельных асимптотических переходах (3) и (4) параметр $b \gg 1$, ($b \to \infty$). В силу этого из соотношений (22) – (25) будет следовать, что параметр $\theta_э^S$ равен $1+\frac{1}{b}$. Поэтому формула (26) примет вид:

$$\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(\theta_э^S\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\left(\frac{\mu}{2kT_S} \right) \left(g^2 - \theta_э^S \left(g-u\right)^2 \right) \right] - 1 \right\}. \qquad (27)$$

Из выражения (27) непосредственно видно, что неравенство $\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} > 0$ будет всегда выполнено, если показатель степени экспоненты будет больше или равен нулю:

$$\left(g^2 - \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(g-u\right)^2 \right) \geq 0. \qquad (28)$$

В случае выполнения равенства в нестрогом неравенстве (28) эффект перехлёста будет иметь минимальное положительное значение:

$$\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \approx \frac{3}{2b} = \frac{3m_l}{2m_h} \ll 1. \qquad (29)$$

Найдём корни квадратичного выражения (28): $g = g_1$, $g = g_2$, соответствующего наличию нуля в его правой части:

$$\left[g^2 - \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(g-u\right)^2 \right] =$$

$$= \left[g_1 - \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(g_1 - u\right) \right] \cdot \left[g_2 + \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(g_2 - u\right) \right] =$$

$$= \left\{ \left[1 - \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \right] g_1 + \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} u \right\} \times \left\{ \left[1 + \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \right] g_2 - \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} u \right\} = 0.$$

$$g_1 = \frac{\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} u}{\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}; \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} u}{\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}. \qquad (30)$$

Область существования эффекта перехлёста: $g_2 \leq g \leq g_1$.

Координата максимума этого эффекта: $g_{\max} = \frac{g_1 + g_2}{2} = (b+1)u$.

Величина показателя экспоненты (28) в точке $g = g_{\max}$:

$$\left(g_{\max}^2 - \left(1+\frac{1}{b}\right)(g_{\max} - u)^2\right) = (b+1)u^2. \qquad (31)$$

Величина максимума эффекта перехлёста $\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$, то есть значение функции (27) при $g = g_{\max}$, равно

$$\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)} = \left\{\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\left(\frac{\mu}{2kT_S}\right)\left(g_{\max}^2 - \left(1+\frac{1}{b}\right)(g_{\max} - u)^2\right)\right] - 1\right\}. \qquad (32)$$

Из параметров, входящих в формулу (32): b, μ, u, $g_{\max}$ и T_S, первые четыре были определены выше.

Пятый параметр – температура равновесного состояния всей смеси газов за скачком T_S радикально различается в асимптотических случаях (3) и (4).

В случае (3) температура T_S равна T_{sl} и может быть определена по соотношению (8). Это соотношение, в целях получения окончательного аналитического выражения для величины (31), удобно преобразовать к виду:

$$\frac{T_0}{T_S} = \left[1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-\epsilon^2\right)\left(\frac{1+\tilde{\rho}}{1+\nu}\right)\frac{m_l u^2}{kT_0}\right]^{-1} \approx \left[\varepsilon(1-\varepsilon)\left(\frac{1+\tilde{\rho}}{1+\nu}\right)\frac{m_l u^2}{kT_0}\right]^{-1}, \qquad (33)$$

где приближенное равенство (33), в котором $\epsilon = \varepsilon$, соответствуют случаю $M_l \gg 1$.

Формула (32), в силу удовлетворения системы кинетических уравнений Больцмана для компонентов смеси асимптотическими максвелловскими распределениями, является, по существу, точной.

Для её практического использования нужно входящие в неё все пять параметров b, μ, u, $g_{\max}$ и T_S выразить по соотношениям (21) – (25), (31).

Однако, при этом она становится очень громоздкой и неудобной для определения порядка величины $\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$, от знания которого и зависит успех эксперимента по выявлению эффекта перехлёста [12, 13].

В связи с этим, выделим главные значения указанных параметров, пренебрегая малыми поправками. Тогда получим:

$$\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx e^{\frac{b+1}{2\varepsilon(1+\tilde{\rho})}} - 1. \qquad (34)$$

Интересно отметить, что в однокомпонентном газе аналогичный эффект рассматривался ранее авторами в работах [8; 9] и что он соответствует формуле (32), в которой $b = \tilde{\rho} = 0$.

Заметим также, что асимптотическому случаю (3) отвечает значение $\tilde{\rho} = 0$, а случаю (4) $\tilde{\rho} = \text{const} \approx 1$.

В силу этого величина высокоскоростного перехлёста будет выше в случае (3). Это соответствует общему выводу, полученному в численных исследованиях [12; 13; 15; 18], в соответствии с которым повышение концентрации лёгкого носителя, то есть уменьшение параметров v и $\tilde{\rho}$ приводит к возрастанию эффекта перехлеста.

4. Область существования и максимальное значение эффекта перехлёста $\left(\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} > 0\right)$ при заданном энергетическом барьере неупругих столкновений пар молекул

Область существования эффекта перехлёста: $\Delta\tilde{G}_{neq}^{(l,h)} > 0$ и его максимальное значение $\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$ определяются точно так же, как и в предыдущем разделе. Вплоть до формулы (30) все предыдущие соотношения остаются справедливыми.

Формулы (30) для корней g_1 и g_2 квадратичного уравнения (28) следует обратить относительно искомых корней u_1 и u_2. Абсолютная величина скорости g теперь является не искомой, а заданной «барьерной» $g_{th} = \sqrt{\frac{2E_{th}}{\mu}}$.

Величина E_{th} является энергетическим барьером неупругих столкновений молекул.

Таким образом, искомые корни u_1 и u_2 квадратичного уравнения (28) будут следующими:

$$u_1 = \left[1 - \left(1 + \frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] g_{th} \quad \text{и} \quad u_2 = \left[1 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] g_{th}. \qquad (35)$$

Область существования эффекта перехлёста: $u_2 \le u \le u_1$.

Координата максимума этого эффекта:

$$u_{\max} = \frac{u_1 + u_2}{2} = g_{th}. \qquad (36)$$

Величина показателя экспоненты (28) в точке $u_{\max} = g_{th}$:

$$\left(g_{th}^2 - \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(g_{th} - u_{\max}\right)^2\right) = g_{th}^2. \tag{37}$$

Величина максимума эффекта перехлёста с учётом равенств (32) и (37) будет равна:

$$\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)} = \left\{\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\left(\frac{\mu}{2kT_S}\right)g_{th}^2\right] - 1\right\}. \tag{38}$$

Аналогично переходу в предыдущем разделе от точного значения эффекта (32) к его главному порядку (34), перейдём от точного значения величины (38) к её главному порядку:

$$\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx \exp\left[\frac{\left(g_{th}/u_{\max}\right)^2}{2\varepsilon\left(1+\tilde{\rho}\right)}\right] - 1, \tag{39}$$

причём в силу равенства (36) получим:

$$\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx \exp\left[\frac{1}{2\varepsilon\left(1+\tilde{\rho}\right)}\right] - 1. \tag{40}$$

Из формулы (40) следует, что при $\tilde{\rho} = 0$, то есть в предельном случае (3), величина эффекта высокоскоростного перехлёста практически совпадает с такой же величиной в однокомпонентном газе, приближённо равной при $\varepsilon = \frac{1}{4}\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx 6$ [8, 9].

Сравним итоговые результаты, представленные равенствами (34) и (40), полученные при разных условиях поиска максимальной величины перехлёста. Напомним, равенство (34) получено при задании скорости свободного потока u, а равенство (40) при задании модуля относительной скорости молекул g_{th}, позволяющей им преодолеть энергетический барьер столкновения.

Видно, что эффект перехлёста, выражаемый равенствами (34) и (40), в первом случае значительно больше, чем во втором. Однако при этом поступательно-равновесные значения функций распределения пар молекул, к которым отнесены соответствующие поступательно-неравновесные значения этих функций, находятся в прямо противоположном соотношении.

5. Величина эффекта высокоскоростного перехлёста при заданной пороговой энергии неупругих соударений в трёхкомпонентной смеси газов

Итоговая величина эффекта перехлёста $\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$, представляемая равенством (40), может быть более значительной, если рассмотреть трёхкомпонентную смесь газов, сжимаемую в ударной волне.

Идея о том, что эффект перехлёста может стать особенно значительным в трёхкомпонентной смеси газов, была впервые сформулирована и обоснована при рассмотрении упрощённой модели эффекта в работе [19].

Применительно к асимптотически точной модели эффекта, рассматриваемой в данной работе, трёхкомпонентная смесь должна быть строго определённого вида как по составу, так и по соотношению масс. В противном случае может быть нарушена асимптотическая точность в постановке задачи.

Рассматриваемая трёхкомпонентная смесь газов, как и в работе [19], включает в себя лёгкий компонент с концентрацией n_l и массой m_l его частиц и два тяжёлых компонента с соответствующими концентрациями n_{h1} и n_{h2} и молекулярными массами m_{h1} и m_{h2}.

Асимптотическая точность задачи, как и в рассмотренной ранее бинарной смеси газов, основывается на том, что лёгкий компонент приходит к поступательно-равновесному состоянию внутри фронта ударной волны значительно раньше обоих компонентов из тяжёлой фракции.

Математическим условием, обеспечивающим релаксацию такого вида, является выполнение следующих неравенств:

$$1)\ n_l \gg n_{h1} \gg n_{h2}; \qquad 2)\ m_l \ll m_{h1} \ll m_{h2}. \tag{41}$$

Выполнение первых двух сильных неравенств из пункта 1) обеспечивает отсутствие влияния каждого из компонентов, стоящих правее, на релаксацию предыдущих.

Выполнение сильных неравенств относительно масс компонентов из пункта 2) обеспечивает разделение их времён релаксации по порядку величины.

Промежуточные преобразования, приводящие к окончательным результатам в данном пункте, полностью аналогичны преобразованиям из предыдущих пунктов 4 и 5.

Отличие заключается в том, что ищется максимум для функции пар молекул $\Delta\tilde{G}_{\max}^{(h1,h2)}$ из тяжёлой фракции трёхкомпонентной смеси. Формула (32) остаётся справедливой и для этой величины с точностью до замены приведённой массы $\mu = \mu_{lh}$ компонентов m_l и m_h на приведённую массу $\mu = \mu_{h1h2}$ компонентов m_{h1} и m_{h2}:

$$\mu = \mu_{lh} = \frac{m_l m_h}{m_l + m_h} = \frac{m_l b}{(1+b)} \approx m_l, \tag{42}$$

$$\mu = \mu_{h1h2} = \frac{m_{h1} m_{h2}}{m_{h1} + m_{h2}} = \frac{m_{h1} d}{(1+d)} \approx m_{h1}; \qquad d = \frac{m_{h2}}{m_{h1}}. \tag{43}$$

Температура T_S за фронтом волны трёхкомпонентной смеси газов, пришедшей в окончательное термодинамическое равновесие, будет совпадать с температурой T_S бинарной смеси газов при

$$b\nu = d_1\nu_1 = d_2\nu_2 = 0,$$

где $d_1 = \dfrac{m_{h1}}{m_l}$; $d_2 = \dfrac{m_{h2}}{m_l}$; $\nu_1 = \dfrac{n_{h1}}{n_l}$; $\nu_2 = \dfrac{n_{h2}}{n_l}$.

$$\Delta\tilde{G}_{\max}^{(h1,h2)} \approx e^{\frac{d_1}{2\varepsilon}} - 1.$$

Заключение

В работе получено асимптотически точное значение величины высокоскоростного перехлёста в бинарной и трёхкомпонентной смеси ударно сжатых газов. Асимптотическая точность обеспечивается тем, что при выбранном соотношении парциальных концентраций и их молекулярных масс в конце зоны релаксации лёгкого компонента никаких других функций распределения, кроме соответствующих распределений Максвелла для компонентов смеси, в принципе, быть не может. Эти же распределения являются решениями кинетических уравнений Больцмана для компонентов смеси.

Получены универсальные аналитические зависимости для величины высокоскоростного перехлёста от практически всех безразмерных параметров и факторов, определяющих движение ударно сжимаемой смеси газов (исключая влияние сечения взаимодействия).

Универсальности полученных аналитических результатов удалось достигнуть без проведения сложных численных расчётов структуры фронта ударной волны.

Статья поступила в редакцию 02.08.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асимптотическое приближение для функции распределения пар молекул в ударной волне / Демидов И. В., Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 4. С. 86–94. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-86-94.
2. Тамм И. Е. О ширине ударных волн большой интенсивности // Труды Физического института им. П. Н. Лебедева. 1965. Т. XXIX. С. 239–249.
3. Mott-Smith H. M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave // Physical Review. 1951. Vol. 82. P. 885. DOI: 10.1103/PhysRev.82.885.
4. Башлыков А. М., Великодный В. Ю. Структура ударных волн в газовой смеси // Журнал технической физики. 1991. Т. 61. № 8. С. 33–42.
5. Candler G. V., Nijhawan S., Bose D. A multiple translational temperature gas dynamics model // Physics of Fluids. 1994. Vol. 6. No. 11. P. 3776–3786. DOI: 10.1063/1.868367.
6. Riesco-Chueca P., Fernandez-Feria R., Fernandez de la Mora J. Nonlinearities in the interspecies transfer of moment and energy for disparate-mass gas mixtures and shock wave structure // Proceedings of the 15-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (June 16-20, 1986, Grado, Italy). Vol. 1 / edited by V. Boffi, C. Cercignani. Stuttgart: B. G. Teubner, 1986. P. 283–292.
7. Holway L. H., Jr. Kinetic Theory of Shock structure using an ellipsoidal distribution function // Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of the Fourth International Symposium. Vol. 1 / ed. by J. H. de Leeuw. New York: Academic Press, 1965. P. 193–215.

8. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотрова Л. В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–116.
9. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Prosesses inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave // Heat Transfer Research. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
10. Кузнецов М. М., Смотрова Л. В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 66–73.
11. Analytical models of high velocity non-equilibrium of polyatomic gas mixtures / Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Iss. 1. P. 060011. DOI: 10.1063/1.5034672.
12. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях / Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б., Черешнев С. Л. // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 144–150.
13. Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б., Черешнев С. Л. Поступательная релаксация в ударных волнах в газах / Препринт. Черноголовка: ОИХФ АНСССР, 1991. 68 с.
14. Осипов А. И. Релаксационные процессы в газах. I. Неравновесное распределение энергии по поступательным степеням свободы // Физика горения и взрыва. 1966. № 4. С. 42–61.
15. Bird G. A. Shock wave structure in gas mixtures // Rarefied Gas Dynamics: Proccefings of 14-th International Symposium. Vol. 1 / ed. H. Oguchi. Tokio: University of Tokio Press, 1984. P. 175–182.
16. Куликов С. В., Терновая О. Н., Черешнев С. Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. 1993. Т. 12. № 3. С. 340–342.
17. Куликов С. В., Терновая О. Н., Черешнев С. Л. Специфика эволюции распределения молекул однокомпонентного газа по относительным скоростям во фронте УВ // Физика горения и взрыва. 1994. Т. 30. № 4. С. 140–144.
18. Додулад О. И., Клосс Ю. Ю., Черемисин Ф. Г. Расчеты структуры ударной волны в смеси газов на основе решения уравнения Больцмана // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т. 14. Вып. 1 [Электронный ресурс]. URL: http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-07-08-001.pdf (дата обращения: 20.06.2021).
19. Зельдович Я. Б., Генич А. П., Манелис Г. Б. Особенности поступательной релаксации во фронте ударной волны в газовых смесях // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 248. № 2. С. 349–351.

REFERENCES

1. Demidov I. V., Kuznetsov M. M., Kuz'min M. K., Kuleshova Yu. D. [Asymptotic approximation for the distribution of pairs of molecules in a shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2020, no. 4, pp. 86–94. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-86-94.
2. Tamm I. E. O shirine udarnykh voln bol'shoi intensivnosti [On the width of high-intensity shock waves]. In: *Trudy Fizicheskogo instituta im. P. N. Lebedeva* [Proceedings of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences], 1965, vol. XXIX, pp. 239–249.
3. Mott-Smith H. M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave. In: *Physical Review*, 1951, vol. 82, p. 885. DOI: 10.1103/PhysRev.82.885.

4. Bashlykov A. M., Velikodnyi V. Yu. [Structure of shock waves in the gas mixture]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Journal of Technical Physics], 1991, vol. 61, no. 8, pp. 33–42.
5. Candler G. V., Nijhawan S., Bose D. A multiple translational temperature gas dynamics model. In: *Physics of Fluids*, 1994, vol. 6, no. 11, pp. 3776–3786. DOI: 10.1063/1.868367.
6. Riesco-Chueca P., Fernandez-Feria R., Fernandez de la Mora J. Nonlinearities in the interspecies transfer of moment and energy for disparate-mass gas mixtures and shock wave structure. In: Boffi V., Cercignani C., eds. *Proceedings of the 15-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (June 16-20, 1986, Grado, Italy). Vol. 1*. Stuttgart, B. G. Teubner Publ., 1986, pp. 283–292.
7. Holway L. H., Jr. Kinetic Theory of Shock structure using an ellipsoidal distribution function. In: de Leeuw J. H., ed. *Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of the Fourth International Symposium. Vol. 1*. New York, Academic Press Publ., 1965, pp. 193–215.
8. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V. [On the increase of the kinetic processes rates in Tamm-Mott-Smith shock wave model]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2012, no. 2, pp. 108–116.
9. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Prosesses inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave. In: *Heat Transfer Research*, 2012, vol. 43, iss. 3, pp. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
10. Kuznetsov M. M., Smotrova L. V. [Analytical qualities of highvelocity translational nonequilibrium in shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2013, no. 3, pp. 66–73.
11. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. Analytical models of high velocity non-equilibrium of polyatomic gas mixtures. In: *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, iss. 1, pp. 060011. DOI: 10.1063/1.5034672.
12. Genich A. P., Kulikov S. V., Manelis G. B., Chereshnev S. L. [Distribution of molecular velocities in the shock front in gas mixtures]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1990, no. 2, pp. 144–150.
13. Genich A. P., Kulikov S. V., Manelis G. B., Chereshnev S. L. *Postupatel'naya relaksatsiya v udarnykh volnakh v gazakh* [Translational relaxation in shock waves in gases]. Chernogolovka, OIKHF ANSSSR Publ., 1991. 68 p.
14. Osipov A. I. [Relaxation processes in gases. I. Nonequilibrium energy distribution over translational degrees of freedom]. In: *Fizika goreniya i vzryva* [Combustion, Explosion, and Shock Waves], 1966, no. 4, pp. 42–61.
15. Bird G. A. Shock wave structure in gas mixtures. In: Oguchi H., ed. *Rarefied Gas Dynamics: Proccefings of 14-th International Symposium. Vol. 1*. Tokio, University of Tokio Press Publ., 1984, pp. 175–182.
16. Kulikov S. V., Ternovaya O. N., Chereshnev S. L. [Specificity of translational nonequilibrium in the shock front in a one-component gas]. In: *Khimicheskaya fizika* [Soviet Journal of Chemical Physics], 1993, vol. 12, no. 3, pp. 340–342.
17. Kulikov S. V., Ternovaya O. N., Chereshnev S. L. [Specificity of the evolution of the distribution of molecules of one-component gas over the relative velocities in the shock front]. In: *Fizika goreniya i vzryva* [Combustion, Explosion, and Shock Waves], 1994, vol. 30, no. 4, pp. 140–144.
18. Dodulad O. I., Kloss Yu. Yu., Tceremissin F. G. [Computations of shock wave structure in gas mixture on the base of the Boltzmann equation]. In: *Physico-khimicheskaya*

kinetika v gazovoy dinamike [Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics], 2013, vol. 14, iss. 1. Available at: http://chemphys.edu.ru/media/published/5.pdf (accessed: 20.06.2021).

19. Zel'dovich Ya. B., Genich A. P., Manelis G. B. [Features of translational relaxation in the shock wave front in gaseous mixtures]. In: *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1979, vol. 248, no. 2, pp. 349–351.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Yuliya D. Kuleshova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Асимптотическое значение эффекта высокоскоростного перехлеста в ударно-сжатой смеси газов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 39–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D. Asymptotic high-speed overshoot effect value in a shock-compressed gas mixture. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 39–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56