РАЗДЕЛ I. ФИЗИКА

УДК 52-54

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-6-21

К ВОПРОСУ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦШИЛЬДА ПРИ УЧЁТЕ ВНЕШНЕГО НЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Гладков С. О.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация*

Аннотация

Цель: показать, что под горизонтом Шварцшильда решение для геодезической линии допускает корневую особенность при достижении радиусом тела критического значения

$R_{cr} = \frac{c}{2\sqrt{\pi\rho G}}$. В рамках пространственно-временной метрики Шварцшильда исследо-

вать решение уравнений геодезических линий в сферически симметричном случае при учёте внешних (не гравитационных) сил. Привести аналитическое решение к виду квадратур, как над горизонтом Шварцшильда, так и под ним.

Процедура и методы. Метод исследования основан на анализе решения уравнения геодезической линии при учёте внешних не гравитационных полей.

Результаты. В результате проведённых вычислений показано, что под горизонтом Шварцшильда решение допускает корневую особенность.

Теоретическая и практическая значимость. Полученный в статье результат говорит о том, что при движении пробных тел в сильных гравитационных полях в метрике появляется корневая особенность, физическая природа которой не гравитационная и её происхождение обязано другим физическим полям.

Ключевые слова: геодезическая линия, символы Кристоффеля, метрика Шварцшильда, критический радиус

GEODESIC LINES IN THE SCHWARZSCHILD METRIC SPACE WITH ACCOUNT FOR THE EXTERNAL NON-GRAVITATIONAL EFFECT

S. Gladkov

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation*

Abstract

Aim: To show that under the Schwarzschild horizon, the solution for the geodetic line allows for a root feature when the radius of the body reaches a critical value $R_{cr} = \frac{c}{2\sqrt{\pi\rho G}}$. Within the

framework of the space-time Schwarzschild metric, the solution of the equations of geodesic lines in the spherically symmetric case is investigated, taking into account external (non-gravitational) forces.

Methodology. The research method is based on the analysis of the solution of the geodetic equation when taking into account external non-gravitational fields.

Results. As a result of the calculations, it is shown that under the Schwarzschild horizon, the solution allows for a root feature.

Research implications. The result obtained in the article suggests that when the test bodies move in strong gravitational fields, a root feature appears in the metric, the physical nature of which is not gravitational and its origin is due to other physical fields.

Keywords: geodetic line, Christoffel symbols, Schwarzschild metric, critical radius

Введение

Любые вопросы, так или иначе связанные с анализом пространственно-временного поведения тел, как под горизонтом Шварцшильда, так и над ним при условии существования сингулярной особенности пространственной компоненты метрического тензора в настоящее время считаются весьма актуальными.

В этой связи, на наш взгляд, довольно любопытным представляется исследование движения тел по геодезическим пространственно-временным линиям, которого ни в одной из известных нам оригинальных публикаций мы не обнаружили. Оно может быть аналитически строго описано в рамках решений, впервые полученных Шварцшильдом ещё в начале прошлого века [1–3].

Действительно, как мы сейчас в этом убедимся, анализ движения вдоль пространственно-временной геодезической линии поддаётся строго математическому решению, которое позволяет предсказать довольно любопытные особенности перемещений в псевдоортогональных $t - r$ (где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) координатах.

Этот сферически симметричный случай представляет, на наш взгляд, наибольший интерес, поскольку опирается на сингулярное решение Шварцшильда для метрики, впервые найденной им из уравнений Гильберта-Эйнштейна [4; 5].

Как было показано в работе [6] (см. также [7; 8]), сингулярность пространственно-временной метрики вызывает некоторые сомнения. Это связано с

тем фактом, что для любых плотностей материи, которыми характеризуются все известные в настоящее время космические тела, в том числе и нейтронные Звёзды, всегда «работает» условие $R \gg r_g$ (в крайнем случае $R > r_g$ для нейтронной Звезды), где $r_g = \frac{2MG}{c^2}$ – гравитационный радиус тела, M – масса, R – его радиус,

G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

Подобная дуальность разных точек зрения говорит лишь о том, что существует некоторая проблема аналитического свойства, характерная для многих задач космологии и теоретической астрофизики, экспериментальная проверка которых чрезвычайно сложна, но позволяет в ряде случаев разрешить научный спор.

Поскольку другого решения, описывающего сингулярность, найденную Шварцшильдом, в настоящее время не существует, то она представляется единственным обоснованием существования чёрной дыры и, как следствие этого, порождает массу задач, касающихся кротовых нор.

Несмотря на приведённые в работе [6] аргументы, указывающие на отсутствие сингулярности в решении Шварцшильда, далее мы будем использовать именно сингулярное решение, как это изложено в [1; 2], а также в [9; 10], поскольку оно имеет одно существенное преимущество, приводящее к точному (а не приближенному) выражению для определителя метрического тензора вида $g = g_{00}g_{11} = -1$, свойственного псевдоевклидовой метрике Минковского. Ещё раз подчеркнём, что это решение мы используем исходя только из соображений удобства, чтобы избежать приближенных выражений типа $g \approx -1$ или $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \approx 1$. После нахождения окончательного решения, которое полу-

чается в результате использования точного решения Шварцшильда, будут учтены приближенные разложения.

Стоит также заметить, что ни в [2], ни в [9] и [10] задача о влиянии на форму геодезической линии внешней сторонней силы (не гравитационной природы) не рассматривалась. Именно поэтому интерес к данной проблеме является вполне актуальным и, на наш взгляд, представляется несомненным. Надо сказать, что тот подход, о котором речь пойдёт ниже, носит в некотором смысле обратный характер по отношению к решению Керра-Ньюмена, под которым мы подразумеваем следующее.

В метрике, обусловленной только гравитационными силами, начинает действовать другая сторонняя сила иной физической природы, не влияющая на метрику, как это приведено в решении Керра-Ньюмена, однако приводящая к естественной деформации пространственно-временной траектории пробной частицы, движущейся по геодезической линии, форма которой уже заранее продиктована гравитацией.

Подобный подход позволит нам понять, к каким качественно новым результатам это может привести и какие выводы будут из этого следовать (см. ниже).

1. Решение под горизонтом Шварцшильда

В том случае, если выполняется неравенство $0 \leq r < r_g < R$, формально должна быть решена внутренняя задача математической физики, означающая, что уравнение Пуассона, описывающее квазистатическое гравитационное поле

$$\Delta\varphi = -4\pi r G$$

в случае $0 \leq r \leq R$ имеет решение:

$$\varphi(r) = 2\pi r G \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right). \quad (1)$$

А потому, компоненты метрического тензора должны определяться формулами (см. [2]):

$$g_{00} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2}, \quad g_{11} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \approx \frac{1}{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}.$$

Согласно (1) при $r = 0$ они дают

$$g_{00} = 1 - \frac{3r_g}{2R}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{3r_g}{2R}} \approx 1 + \frac{3r_g}{2R}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что для абсолютно любой Планеты, в том числе и для нейтронной Звезды, плотность которой составляет около $10^{12} \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$, а примерный радиус $R = 10 - 20$ км, всегда выполняется неравенство $r_g \ll R$. То есть, никакой особенности не возникает, и внутри чёрной дыры в квазистатическом приближении всегда следует использовать решения (1) и (2).

2. Метрика Шварцшильда и уравнения геодезических линий

С помощью решения Шварцшильда (см. [1; 2]) в случае «ортогональных» пространственно-временных координат при сферически-симметричном распределении материи метрика записывается в виде:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}dr^2 - dl^2, \quad (3)$$

где c – скорость света, а компоненты метрического тензора при $r \geq R$ есть

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \approx \left(1 + \frac{r_g}{r} \right), \quad (4)$$

где угловой элемент пространственной длины в сферических координатах определён как

$$dl^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5)$$

Далее будет рассмотрен только изотропный случай, когда можно положить $dl = 0$, но подчеркнём, что это делается лишь из соображений большей наглядности последующей интерпретации найденного решения.

В результате из (3) следует, что

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}dr^2. \quad (6)$$

Согласно основной идее ОТО движение в пространственно-временном континууме можно описать, как движение по геодезической линии [11; 12] (но только в гравитационном поле, а не в каком-либо другом), согласно уравнению:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (7)$$

где роль силы играет слагаемое $F^i = -\Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds}$, в котором символы Кристоффеля второго рода определены стандартным образом, как

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s} \right), \quad (8)$$

(g^{ik} – контравариантный метрический тензор). Ковариантный, согласно (6), есть:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & -g_{11} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Следуя решению Шварцшильда в случае метрики (6) для радиальной проекции силы F^r имеем $F^r = -\Gamma_{00}^r \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2$ в нерелятивистском приближении.

Используя решения (4), можно легко прийти к выражению $F^r = -\frac{GM}{r^2}$, что приводит к традиционному уравнению движения в статическом гравитационном поле $\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$, первый интеграл которого представляет собой обычный закон сохранения энергии, как и должно быть.

Поскольку в соответствии с (4) определитель метрического тензора $g = -1$, то контравариантный метрический тензор имеет также простой вид:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} -g_{11} & 0 \\ 0 & g_{00} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Перепишем метрику (6) в соответствии с алгоритмом, подробно описанным в работах [13; 14], в виде:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2, \quad (11)$$

где

$$dx^0 = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} c dt, \quad dx^1 = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}. \quad (12)$$

Такой подход позволяет аккуратно, но, главное, соблюдая правильную размерность всех компонент символов Кристоффеля, корректно проводить любые вычисления (см. [13–15]) без введения коэффициентов Ламе.

Очевидно, что отличными от нуля будут только три символа Кристоффеля, которые легко вычислить. При решении внешней задачи, то есть, когда выполняется условие $r \geq R$, согласно (9) – (12) они будут выглядеть следующим образом:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2\sqrt{q}} \frac{r_g}{r^2}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{q\sqrt{q}}{2} \frac{r_g}{r^2}, \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2\sqrt{q}} \frac{r_g}{r^2}, \quad (13)$$

где $q = 1 - \frac{r_g}{r}$.

Заметим, что благодаря условию $r_g \ll R$ соотношения (13) всегда можно писать в виде:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{00}^1 = -\Gamma_{11}^1 \approx \frac{r_g}{2r^2}.$$

Поэтому в соответствии с уравнением (7) мы приходим к искомой системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих геодезические линии для метрики Шварцшильда:

$$\begin{cases} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{q} \frac{r_g}{r^2} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0, \\ \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{1}{q} \frac{r_g}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{q^3}{2} \frac{r_g}{r^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Стоит лишний раз подчеркнуть, что в оригинальных источниках и монографиях, посвящённых исследованию вопросов, связанных с кротовыми норами и близкими к этой теме, мы не обнаружили решений, в которых проводился бы анализ уравнений типа (14), описывающих движение по геодезической линии, но с учётом внешних сил, имеющих не гравитационную природу.

В этой связи кажется весьма любопытным тот случай (который сейчас подробно рассмотрим), когда на тело, движущееся по геодезической линии, действует какая-то иная по физической природе сторонняя сила.

Стоит лишний раз отметить, что основным постулатом ОТО является искривление пространственно-временного континуума, обусловленное именно силами сугубо гравитационного происхождения. Все остальные физические поля должны быть учтены в рамках уравнений движения по геодезическим линиям, по-

сколько влиять на метрику они не должны, если (повторимся) следовать основной идее ОТО.

Например, в работе [8] был предложен другой альтернативный подход, позволяющий вычислять взаимодействия между разными по физической природе полями, чего в рамках ОТО сделать нельзя.

Даже если предположить, что в правую часть уравнения Гильберта-Эйнштейна мы можем аддитивно добавить к материальному тензору энергии – импульса тензор энергии – импульса любого другого физического поля, то это должно привести к парадоксу чисто физического свойства. Действительно, в этом случае (например, в условиях невесомости) метрику должны будут изменять ядерные силы или электромагнитные, что довольно трудно себе представить.

Поскольку целью нашей работы является исследование влияния на движение по геодезической линии какого-либо внешнего (не гравитационного) поля, то с этой целью чисто формально введём в правую часть уравнений (14) некоторую внешнюю силу F^i .

Роль этой силы может играть, например, электромагнитное взаимодействие или «тёмная материя», а ниже будет приведено строгое решение неоднородных уравнений (14) в этом случае.

Заметим, к слову, что в работе [16] была рассмотрена трёхмерная задача (а не четырёхмерная). Поэтому сторонняя сила чисто формально была введена в правую часть уравнения геодезической линии без оговорки её природы. Естественно, что это не противоречит основным постулатам ОТО, поскольку в отличие от пространственно-временного решения, о котором чуть выше говорилось, в трёхмерном случае [16] компонента символа Кристоффеля Γ_{00}^i не фигурирует (она тождественно равна нулю).

3. Движение под действием сторонней силы (случай $r \geq R$)

В свете всего вышесказанного проанализируем уравнение (7) (или (14)) с учётом стороннего воздействия, которое в качестве примера мы определим в виде кулоновской силы F_i . В результате имеем (ср., с работой [16]):

$$mg_{in} \left(\frac{d^2 x^n}{ds^2} + \Gamma_{kl}^n \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \right) = \frac{F_i}{c^2}, \quad (15)$$

где m – масса движущегося тела.

В результате уравнения (14) приводятся к уравнениям вида:

$$\begin{cases} mg_{00} \left(\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{q} \frac{r_g}{r^2} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{F_0}{c^2}, \\ mg_{11} \left[\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{1}{q} \frac{r_g}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{q^3}{2} \frac{r_g}{r^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \right] = \frac{F_1}{c^2}. \end{cases} \quad (16)$$

Согласно определению

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad (17)$$

где U – потенциальная энергия взаимодействия.

Поскольку U от времени не зависит, то можно считать, что $F_0 = 0$, а вот проекция силы $F_1 = F_r = -\sqrt{q} \frac{\partial U}{\partial r}$ нулю не равна.

Поскольку в рассматриваемом случае $U = \frac{Q_1 Q_2}{r}$, то вместо уравнений (16) при $r \geq R$, получаем:

$$\begin{cases} t'' + \frac{r_g}{qr^2} t' r' = 0, \\ r'' - \frac{r_g}{qr^2} r'^2 + \frac{q^3}{2} \frac{r_g}{r^2} t'^2 = q^2 \frac{Q_1 Q_2}{mc^2 r^2}, \end{cases} \quad (18)$$

где «штрихи» указывают на дифференцирование по параметру s .

Как видно из уравнений (18), они поддаются анализу в общем виде. В самом деле, из верхнего уравнения следует, что:

$$\frac{t''}{t'} = -\frac{r_g r'}{qr^2}.$$

Интегрируя его, находим

$$t' = \frac{C_1}{cq}, \quad (19)$$

где C_1 – положительная константа интегрирования, и из соображений удобства явно введена скорость света.

Подставляя (19) в нижнее уравнение системы (18), будем в результате иметь

$$r'' - \frac{r_g}{qr^2} r'^2 = \frac{bq}{2r^2} \left(q - \frac{C_1^2}{\lambda} \right), \quad (20)$$

где безразмерный параметр $\lambda = \frac{b}{r_g}$, а параметр длины определён, как $b = \frac{2Q_1 Q_2}{mc^2}$.

Уравнение (20) сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки $r' = u$, $r'' = \frac{du}{dr} u$. Вводя далее новую функцию

$$y = u^2 \quad (21)$$

и новый безразмерный аргумент $x = \frac{r}{r_g}$, получаем:

$$y' - \frac{2y}{x(x-1)} = \frac{b}{2x^2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{C_1^2}{\lambda} - \frac{1}{x} \right). \quad (22)$$

Уравнение (22) легко решается методом вариации постоянных, что в результате простых преобразований приводит нас к следующему окончательному решению:

$$y = \frac{C_2 x e^{-\frac{1}{x}}}{2|1-x|} + \frac{bx}{2|1-x|} \left[\frac{5C_1^2}{\lambda} - 16 - \frac{2}{x} \left(\frac{2C_1^2}{\lambda} - 3 \right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{C_1^2}{\lambda} - 6 \right) + \frac{1}{x^3} \right], \quad (23)$$

где C_2 – положительная константа интегрирования, а множитель «2» в знаменателе введён ради удобства.

Таким образом, с учётом решения (19) и подстановки (21), а также предшествующих ей, находим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} r' = \pm \sqrt{\frac{C_2 x e^{-\frac{1}{x}}}{|1-x|} + \frac{bx}{2|1-x|} \left[\frac{5C_1^2}{\lambda} - 16 - \frac{2}{x} \left(\frac{2C_1^2}{\lambda} - 3 \right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{C_1^2}{\lambda} - 6 \right) + \frac{1}{x^3} \right]}, \\ t' = \frac{C_1 x}{c(x-1)}. \end{cases} \quad (24)$$

После деления нижнего уравнения на верхнее будем иметь:

$$t = C_1 \frac{r_g}{c} \int \frac{\sqrt{2x} dx}{\sqrt{|x-1|} \sqrt{C_2 x e^{-\frac{1}{x}} + b \left[\frac{5C_1^2}{\lambda} - 16 - \frac{2}{x} \left(\frac{2C_1^2}{\lambda} - 3 \right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{C_1^2}{\lambda} - 6 \right) + \frac{1}{x^3} \right]}} + C_3, \quad (25)$$

где C_3 – ещё одна константа интегрирования.

Поскольку в реальности всегда выполняется условие $R \gg r_g$, то есть $x \gg 1$, то точное решение (25) в случае $r \geq R$ можно представить в виде линейной зависимости:

$$c(t - t_0) \approx Ar, \quad (26)$$

где $A = \frac{\sqrt{2}C_1}{\sqrt{5C_1^2 + \lambda C_2}}$, $t_0 = C_3$ – некоторый момент времени.

Если, скажем, C_1 мало, а C_2 любое, то $A \ll 1$. А если $C_1 \rightarrow \infty$, то для любого C_2 $A = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Таким образом, константа A должна принадлежать сегменту

$$0 \leq A \leq \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Если $A = 0$, то для любого расстояния r время будет «заморожено».

Из найденных решений геодезических уравнений мы показали, что $A < 1$. Такая особенность указывает на возможное возникновение довольно любопытной ситуации, когда объект, казалось бы, может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в пустоте. Действительно, как видно из (26), $v = \frac{c}{A} > c$.

То есть по геодезической линии, как будто, возможно передвижение со сверхсветовой скоростью. Однако с точки зрения физики это означает, что в пренебрежении силой гравитации тело приобретает сверхсветовую скорость просто из ниоткуда. На наш взгляд разумным объяснением этого парадокса вполне может служить введение в рассмотрение гипотетической «тёмной материи», которая неявно присутствует в уравнениях (15) наряду с кулоновской силой, и выполняет роль тормозящего фактора, благодаря которому скорость тела не будет выходить за рамки условия $v > c$.

4. Анализ решения в случае $0 \leq r \leq R$

Подчеркнём, что решение (25) справедливо, если $r \geq R$. При выполнении противоположного неравенства $r \leq R$ следует иметь в виду решение (1), которое приведёт нас к качественно другой зависимости.

Действительно, для решения (1), если расстояния удовлетворяют условию $0 \leq r \leq R$, метрика должна быть такой:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}dr^2 - dl^2, \quad (27)$$

где, теперь уже в отличие от известных решений (3), (4), имеем:

$$g_{00} = 1 - \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{4\pi\rho G}{c^2} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right), \quad g_{11} = - \frac{1}{1 - \frac{4\pi\rho G}{c^2} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right)} \quad (28)$$

($g = -1$). Следуя опять-таки алгоритму работы [13], введём дифференциалы

$$dx^0 = c p dt, \quad dx^1 = \frac{dr}{p}, \quad (29)$$

где функциональный параметр $p = \sqrt{1 - \frac{4\pi\rho G}{c^2} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right)}$.

То есть вместо (27) имеем:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2, \quad (30)$$

где dx^0 и dx^1 определены в (29).

Поскольку электрический потенциал внутри области $0 \leq r \leq R$ постоянен, то, согласно определению (17), находим, что

$$F_0 = 0, \quad F_r = 0, \quad (31)$$

В результате из уравнений (15) следует тогда два таких уравнения:

$$\begin{cases} pt'' + \frac{dp}{dr} r' t' + \Gamma_{01}^0 t' r' = 0, \\ pr'' + \frac{dp}{dr} r'^2 + \Gamma_{00}^1 t'^2 + \Gamma_{11}^1 r'^2 = 0, \end{cases} \quad (32)$$

где отличные от нуля символы Кристоффеля благодаря их чисто гравитационному происхождению в соответствии с формулами (28) и (29) таковы:

$$\begin{cases} \Gamma_{01}^0 = \frac{g^{00}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = -\frac{g_{11}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2p^2} \frac{\partial}{\partial x^1} p^2 = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{4\pi\rho Gr}{3pc^2}, \\ \Gamma_{00}^1 = -\frac{g^{11}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{g_{00}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{p^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} p^2 = p^3 \frac{4\pi\rho Gr}{3c^2}, \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{g^{11}}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = -\frac{g_{00}}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{p^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{p^2} \right) = -\frac{4\pi\rho Gr}{3pc^2}. \end{cases} \quad (33)$$

Заметим, кстати, что выражений вида (33) мы ни в одном из упомянутых литературных источников не обнаружили.

С помощью этих выражений уравнения (32) приобретут в результате довольно простой и компактный вид:

$$\begin{cases} t'' + \frac{8\pi\rho Gr}{3p^2 c^2} r' t' = 0, \\ r'' + p^2 \frac{4\pi\rho Gr}{3} t'^2 = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Элементарное интегрирование верхнего уравнения приводит к такой зависимости:

$$t' = \frac{C_6}{cp}, \quad (35)$$

где C_6 – безразмерная положительная константа интегрирования.

Подставляя (35) в нижнее уравнение системы (34), находим:

$$r'' - \kappa^2 r = 0, \quad (36)$$

где $\kappa^2 = \frac{4\pi C_6^2}{3c^2} \rho G$.

Решение уравнения (36) очевидно

$$r = C_7 e^{\kappa s} + C_8 e^{-\kappa s}, \quad (37)$$

где C_7, C_8 – константы интегрирования.

Следовательно, $r' = \kappa (C_7 e^{\kappa s} - C_8 e^{-\kappa s})$. Полагая здесь $p \approx 1$, $C_6 = 1$ то есть $s \approx ct$,

согласно (35) приходим к следующей зависимости, которая не приводится ни в [2], и ни в [9; 10]:

$$r = C_7 e^{\kappa ct} + C_8 e^{-\kappa ct}. \quad (38)$$

Зависимость (38) описывает свободную геодезическую линию под горизонтом Шварцшильда.

5. Анализ решений (25) и (38)

Проанализируем теперь найденные решения вблизи гравитационного радиуса, то есть предположим, что $r = r_g + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll r_g$. Тогда общее решение (25) сводится к такому:

$$\begin{aligned} c(t-t_0) &= C_1 r_g \int \frac{\sqrt{2x} dx}{\sqrt{|x-1|} \sqrt{C_2 e^{-\frac{1}{x}} + \left[5C_1^2 - 16 - \frac{2}{x}(2C_1^2 - 3) + \frac{1}{x^2}(C_1^2 - 6) + \frac{1}{x^3} \right]}} \approx \\ &\approx \frac{C_1 \sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + 2\frac{C_1^2}{\lambda} - 15}} r_g \int \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \frac{2C_1 \sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + \frac{2C_1^2}{\lambda} - 15}} r_g \sqrt{|x-1|}. \end{aligned}$$

Откуда

$$c(t-t_0) = 2B \sqrt{r_g |r-r_g|}. \quad (39)$$

где постоянная $B = \frac{C_1 \sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + \frac{2C_1^2}{\lambda} - 15}}.$

Если подставить (39) в выражение для пространственно-временного интервала (11), то получим:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 = B^2 \frac{r_g}{r} \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \left(B^2 \frac{r_g}{r} - 1 \right) \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} > 0.$$

В результате немедленно приходим к неравенству:

$$r_g < r < B^2 r_g, \quad (40)$$

из которого следует такое соотношение:

$$\frac{C_1 \sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + \frac{2C_1^2}{\lambda} - 15}} > 1.$$

И, следовательно,

$$0 < C_2 < e \left(15 + 2C_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right). \quad (41)$$

Что касается решения (39), то его легко проанализировать благодаря условию $\frac{4\pi\rho Gr^2}{3c^2} \ll 1$.

В результате имеем:

$$t \approx \bar{t}_0 \pm \frac{C_6}{c\sqrt{C_7}} \int \frac{dr}{p^2} = \bar{t}_0 \pm \frac{C_6 r}{c\sqrt{C_7 \left(1 - \frac{4\pi\rho GR^2}{c^2}\right)}}. \quad (42)$$

Как следует из (42), найденное решение имеет сингулярность, но не типа сингулярности Шварцшильда, а корневую.

Действительно, если радиус тела приближается к значению:

$$R = R_{cr} = \frac{c}{2\sqrt{\pi\rho G}}, \quad (43)$$

то происходит разрыв пространственно-временного континуума, то есть при любых значениях r время раздваивается и уходит на $\pm$ бесконечность.

Если плотность материи составляет $\rho = 10 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$, то численное значение, когда это возможно, соответствует очень большому объекту с радиусом $R_{cr} \approx 3 \cdot 10^{13}$ см. При этом масса тела будет составлять примерно

$$M_{cr} = \frac{c^3}{6G\sqrt{\pi\rho G}} \approx 10^8 M_{\odot}. \quad (44)$$

Полученная оценка указывает нам на ту массу чёрной дыры, когда происходит разрыв времени под горизонтом Шварцшильда. В случае нейтронной Звезды оценка (44) приводит к значению $M_{cr} \approx M_{\odot}$, но с плотностью $\rho = 10^{12} \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$.

То есть согласно закону $M_{cr}\sqrt{\rho} = \text{const}$.

Как видно из общего выражения (39), существует и ещё одно более общее решение. В самом деле,

$$t \approx \bar{t}_0 \pm \frac{C_6}{c\sqrt{C_7}} \int \frac{dr}{p^2} = \bar{t}_0 \pm \frac{C_6}{\sqrt{C_7}} \frac{3c}{4\pi\rho Ga} \begin{cases} \arctg \frac{r}{a} \\ -\arctg \frac{a}{r} \end{cases}, \quad (45)$$

где параметр «фазовой длины»

$$a = \frac{c\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi\rho G}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{R_{cr}^2}}. \quad (46)$$

Отсюда следует простой вывод. Если мы находимся на больших расстояниях от чёрной дыры, то время ведёт себя в соответствии с законом (42).

Если же мы находимся внутри чёрной дыры, то при $R \rightarrow R_{cr}$, и при любых r время ведёт себя как $t = \bar{t}_0 \pm \frac{C_6}{\sqrt{C_7}} \frac{3cr}{4\pi r G a^2} \rightarrow \pm\infty$, то есть может вести себя как

временной туннель. Подобное течение времени внутри чёрной дыры представляется нам вполне разумным, поскольку не противоречит основным постулатам ОТО.

Заключение

Заканчивая настоящее сообщение, стоит обратить внимание на ряд важных моментов.

1. Найдены решения уравнений геодезической линии в сферически-симметричном случае, как под горизонтом Шварцшильда, так и над ним при учёте влияния на пространственно-временную траекторию внешней (не гравитационной) силы.

2. Получены общие решения задачи в квадратурах согласно (25) и (39).

3. Приведена численная оценка аналитически найденного значения критического радиуса массивного тела, при достижении которого тело будет работать как переключатель из прошлого в будущее, что неминуемо должно приводить к разрыву всего того, что попадает внутрь.

4. Показано, что внутри чёрной дыры течение времени имеет точку бифуркации и может уходить как в «прошлое» на $-\infty$, так и в будущее – на $+\infty$.

Статья поступила в редакцию 11.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarzschild K. über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1916. No. 1. S. 189–196.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 1988. 512 с.
3. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М.: URSS, 2020. 488 с.
4. Логунов А. А., Местверишвили М. А. Релятивистская теория гравитации // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 61. № 3. С. 327–346.
5. Логунов А. А., Местверишвили М. А., Петров В. А. Как были открыты уравнения Гильберта–Эйнштейна. Протвино: Препринт Института физики высоких энергий, 2004. 24 с.
6. Логунов А. А., Местверишвили М. А. Невозможность гравитационного коллапса // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174. № 2. С. 292–302. DOI: 10.4213/tmf8347.
7. Гладков С. О. К вопросу о линеаризации основного уравнения ОТО // Инженерная физика. 2017. № 10. С. 19–27.
8. Gladkov S. O. To the question of a common field theory // Journal of Physics: Conference series. 2018. Vol. 1051: XX International Meeting “Physical Interpretations of Relativity Theory 2017” (3–6 July 2017, Moscow, Russian Federation). P. 012029. DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012029.

9. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 2 / пер. с англ. М.: Мир, 1977. 525 с.
10. Новиков И. Д., Фролов В. П., Физика черных дыр. М.: Наука, 1986. 328 с.
11. McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications, Inc, 1957. 411 p.
12. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967. 664 с.
13. Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
14. Гладков С. О. К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 3. С. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.
15. Gladkov S. O. About one method of calculation in the arbitrary curvilinear basis of the Laplace operator and curl from the vector function // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 2021. Vol. 7. No. 2. P. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.2478/amns.2021.2.00002>.
16. Гладков С. О., Богданова С. Б. О классе двумерных геодезических кривых в поле силы тяжести // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.

REFERENCES

1. Schwarzschild K. über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, no. 1, S. 189–196.
2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoriya polya*. T. 2 [Field theory. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.
3. Ginzburg V. L. *Teoreticheskaya fizika i astrofizika. Dopolnitel'nye glavy* [Theoretical physics and astrophysics. Additional chapters]. Moscow, URSS Publ., 2020. 488 p.
4. Logunov A. A., Mestverishvili M. A. [Relativistic theory of gravitation]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 1984, vol. 61, no. 3, pp. 327–346.
5. Logunov A. A., Mestverishvili M. A., Petrov V. A. *Kak byli otkryty uravneniya Gil'berta–Einshteina* [How the Hilbert – Einstein equations were discovered]. Protvino, Preprint of the Institute of High Energy Physics Publ., 2004. 24 p.
6. Logunov A. A., Mestverishvili M. A. [Impossibility of gravitational collapse]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2013, vol. 174, no. 2, pp. 292–302. DOI: 10.4213/tmf8347.
7. Gladkov S. O. [To the question of linearization basic equation of RTG]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2017, no. 10, pp. 19–27.
8. Gladkov S. O. To the question of a common field theory. In: *Journal of Physics: Conference series*, 2018, Vol. 1051: XX International Meeting “Physical Interpretations of Relativity Theory 2017” (3–6 July 2017, Moscow, Russian Federation), pp. 012029. DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012029.
9. Misner Ch., Thorne K. Wheeler J. *Gravitatsiya*. T. 2 [Gravitation]. Moscow, Mir Publ., 1977. 525 p.
10. Novikov I. D., Frolov V. P. *Fizika chernykh dyr* [Physics of black holes]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 328 p.
11. McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York, Dover Publications, Inc, 1957. 411 p.

12. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriya i tenzornyi analiz* [Riemannian geometry and tensor analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p.
13. Gladkov S. O. [Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblasnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 1, pp. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
14. Gladkov S. O. [Application of the second covariant derivative from the vector function to the problems of hydrodynamics and elasticity theory]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblasnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 3, pp. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.
15. Gladkov S. O. About one method of calculation in the arbitrary curvilinear basis of the Laplace operator and curl from the vector function. In: *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.2478/amns.2021.2.00002>.
16. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [On the class of two-dimensional geodesic curves in the field of the gravity force]. In: *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics], 2019, no. 58, pp. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru;

INFORMATIONS ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department No. 311 “Applied software and mathematical methods”, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу о геодезических линиях в метрическом пространстве Шварцшильда при учёте внешнего не гравитационного воздействия // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 4. С. 6–21.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-6-21

FOR CITATION

Gladkov S. O. Geodesic lines in the Schwarzschild metric space with account for the external non-gravitational effect. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 6–21.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-6-21