УДК 533.6.011

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-96-111

РАСЧЁТ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КИНЕТИКО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОВЫШЕНИЕ ЕЁ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧНОСТИ

Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация*

Аннотация

Целью работы является разработка физико-математической модели, объединяющей кинетическое и гидродинамическое описание течения, и повышение её вычислительной экономичности.

Процедура и методы. В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученной модели использовался метод численного эксперимента.

Результаты. Результаты расчётов показывают, что комбинированная кинетико-гидродинамическая модель (КГМ) позволяет физически адекватно описывать процессы, протекающие в переходной области течения газовой среды. В области сшивания компонент модели отсутствуют разрывы производных параметров газа. Модель КГМ позволяет выставлять граничные условия на поглощающих поверхностях. Значения такой интегральной характеристики, как $s_x(\alpha)$, рассчитанные по КГМ, удовлетворительно согласуются с результатами расчётов по МКУ.

Теоретическая и практическая значимость. При расчёте относительно плотных газов ($Kn = 0,01$) КГМ позволяет сократить потребляемый объём памяти вычислительного устройства примерно на три порядка и процессорное время на два порядка по сравнению с модельным кинетическим уравнением (МКУ). Разработанная модель КГМ может быть использована в широком интервале чисел Кнудсена.

Ключевые слова: комбинированная модель, модель Навье-Стокса-Фурье, кинетическая модель, поглощающая поверхность, вычислительная эффективность

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, номер темы FSFF-2020-0013.

CALCULATION OF THE FLOW FIELD NEAR THE ABSORBING SURFACE USING THE KINETIC-HYDRODYNAMIC MODEL AND INCREASING ITS COMPUTATIONAL EFFICIENCY

Yu. Nikitchenko, A. Tikhonovets

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation*

Abstract

Aim of the work is to develop a physical and mathematical model that combines the kinetic and hydrodynamic description of the flow, and to increase its computational efficiency.

Methodology. An analytical research method was used in the work. To study the properties of the resulting model, the method of a numerical experiment was used.

Results. The calculation results show that the combined kinetic-hydrodynamic model (KHM) makes it possible to physically adequately describe the processes occurring in the transition region of the gas medium flow. There are no discontinuities in the derivatives of the gas parameters in the region where the model components are stitched together. The KHM model allows setting boundary conditions on absorbing surfaces. The values of such an integral characteristic as $c_x(\alpha)$, calculated by the KGM, are in satisfactory agreement with the results of calculations by the model kinetic equation.

Research implications. When calculating relatively dense gases ($Kn = 0,01$), the model allows to reduce the memory consumption of the computing device by about three orders of magnitude and the processor time by two orders of magnitude compared to the model kinetic equation. The developed model can be used in a wide range of Knudsen numbers.

Keywords: combined model, Navier-Stokes-Fourier model, kinetic model, absorbing surface, computational efficiency

Acknowledgments. The work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, subject number FSFF-2020-0013.

Введение

Модели механики сплошной среды (гидродинамические модели) не позволяют физически адекватно описывать процесс взаимодействия газовой среды с активной поверхностью. Некоторые приближенные соотношения для этого процесса можно найти в работах [1; 2]. Модели молекулярно-кинетической теории (кинетические модели) справляются с этой задачей относительно просто [2]. Потоки массы, импульса и энергии на поверхность определяются из решения кинетического уравнения. По этим параметрам и с учётом свойств обтекаемой поверхности восстанавливается весовая функция (функции распределения молекул по скоростям) отражённых от поверхности молекул. Совокупность весовых функций падающих и отражённых поверхностью молекул позволяет определить любой параметр газовой среды в граничной точке.

Вместе с тем кинетические модели не представляют практического интереса для описания течений плотных ($Kn < 0,1$) газов, ввиду огромного объёма вычислительных операций и оперативной памяти вычислительного устройства. На сегодняшний день разработан целый ряд гибридных и комбинированных моделей, использующих кинетическое описание течения в сильнонеравновесных (высокоградиентных) областях и гидродинамическое описание в остальных областях. Краткий обзор таких моделей представлен в [3]. В этой же работе, а также в [4], представлена кинетико-гидродинамическая модель (КГМ), позволяющая получать гладкие решения в условиях высокой неравновесности. При расчёте про-

фиблей ударных волн и пристеночных течений КГМ давала результаты, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными и расчётными данными.

В [5] рассматривалась задача сверхзвукового обтекания тонкой пластины, установленной поперёк потока. Лобовая поверхность пластины поглощала газ. Задача решалась на базе модельного кинетического уравнения (МКУ). Был показан эффект качественного изменения зависимости лобового сопротивления пластины от коэффициента поглощения поверхности при изменении числа Кнудсена. В настоящей работе эта задача решается с использованием КГМ. Результаты сравниваются с решением МКУ. Основное внимание уделяется повышению вычислительной эффективности КГМ по отношению к МКУ. Оценивается точность определения коэффициента лобового сопротивления.

В работе приняты следующие допущения и обозначения. Рассматриваются течения однокомпонентных совершенных газов. Все выражения записаны для многоатомных газов. В случае одноатомных газов выражения остаются справедливыми после очевидных преобразований.

Интеграл по пространству скоростей обозначен, как:

$$\int \dots d\mathbf{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} dc_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots dc_3.$$

Основные символы:

δ_{ij} – символ Кронекера;

t, x_i – время и геометрическая координата;

ξ_i, ϵ – молекулярная скорость и энергия вращения молекулы;

L, λ_∞ – высота пластины и средняя длина свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке;

$m_0, n, \rho = m_0 n$ – масса молекулы, концентрация молекул и плотность газа;

$u_i, c_i = \xi_i - u_i$ – групповая (макроскопическая) и тепловая скорости молекул;

f – весовая функция (функция распределения молекул по скоростям);

$\mu, \gamma, k, R = k/m_0$ – коэффициент вязкости, показатель адиабаты, постоянная Больцмана, удельная газовая постоянная;

$T_t, T_r, T = 1,5(\gamma - 1)T_t + 0,5(5 - 3\gamma)T_r$ – температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул, термодинамическая температура;

$P_{ij}, p_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} R \rho T_t$ – полные и неравновесные напряжения;

$p^m = (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz})/3 = R \rho T_t$ – механическое давление;

$p = R \rho T$ – термодинамическое давление;

Φ_i, ω_i – тепловые потоки, обусловленные переносом энергии теплового движения на поступательных и вращательных степенях свободы молекул;

$q_i = \Phi_i + \omega_i$ – полный тепловой поток;

c_x, α – коэффициент сопротивления и коэффициент поглощения пластины;

M, Kn, Pr – числа Маха, Кнудсена и Прандтля. В рассматриваемых моделях принято: $Pr = 4\gamma/(9\gamma - 5)$.

1. Задача обтекания пластины с поглощающей поверхностью

Задача рассматривалась в прямоугольных декартовых координатах OXY . Невозмущённый поток двигался в направлении оси OX через левую границу вычислительной области. Схема задачи показана на рис. 1.

Рис. 1 / Fig. 1. Схема вычислительной области. Жирная линия – пластина, поглощающая поверхность обозначена пунктиром; прямоугольники – границы гидродинамической области; K_x – ширина кинетической полуобласти в длинах пробега молекулы; N_x – ширина гидродинамической полуобласти единицах высоты пластины; N_y – высота гидродинамической полуобласти в единицах высоты пластины; 1 – схема расположения узлов сшивания для гидродинамической области; 2 – схема расположения узлов сшивания для кинетической области; ● – узлы сшивания; ● – узлы гидродинамической сетки; × – узлы кинетической сетки / Scheme of the computational area. The thick line is the plate, the absorbing surface is indicated by a dotted line; rectangles are the boundaries of the hydrodynamic region; K_x – the width of the kinetic semi-region in the lengths of the molecular path; N_x – the width of the hydrodynamic semi-region in units of plate height; N_y – the height of the hydrodynamic semi-domain in units of the plate height; 1 – layout of stitching nodes for the hydrodynamic region; 2 – layout of crosslinking nodes for the kinetic region; ● – stitching nodes; ● – hydrodynamic mesh nodes; × – nodes of the kinetic grid.

Источник: составлено авторами.

Размер всей вычислительной области, он же внешний размер гидродинамической области, составлял: $N_x = 3 \dots 4$, $N_y = 2 \dots 3$. Размер кинетической области, он же внутренний размер гидродинамической области, принимался равным $K_x = 10 \dots 20$, $K_y = 10 \dots 15$. Длина свободного пробега молекулы определена соотношением $\lambda_\infty = \mu_\infty (RT_\infty)^{-1/2} / \rho_\infty$.

Граничные условия на внешних границах вычислительной области выставлены следующим образом: в сечении $x = -N_x L$ – параметры невозмущённого пото-

ка, в сечении $y = -N_x L$ – принималось $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\rho, u_x, u_y, T) = 0$, в сечении $x = -N_x L$ – принималось $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho, u_x, u_y, T) = 0$.

На лобовой поверхности пластины (пунктир на рис. 1) задавался коэффициент поглощения поверхности $\alpha = (J_{down} - J_{reflect})/J_{down}$, где

$$J_{down} = \int_{-\infty}^{+\infty} dc_y \int_{-\infty}^{+\infty} dc_z \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \xi_x f dc_x, \quad J_{reflect} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dc_y \int_{-\infty}^{+\infty} dc_z \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \xi_x f dc_x$$

плотности падающего и отражённого молекулярного потока.

В качестве коэффициента сопротивления пластины рассматривается следующее соотношение:

$$c_x = \left(\int_{F1} (P_{xx} + \rho u_x^2) dF - \int_{F2} P_{xx} dF \right) / (p_{\infty} + \rho_{\infty} u_{\infty}^2) S,$$

где $F1, F2$ – лобовая и донная поверхности пластины; $S = L \times 1$ – площадь пластины единичного размаха. В отличие от коэффициента лобового сопротивления в традиционном понимании эта зависимость в качестве характерной величины использует поток импульса невозмущённого потока. Такая универсальная форма коэффициента лобового сопротивления позволяет, например, рассматривать задачи обтекания поглощающих поверхностей, расположенных в неподвижном газе. Эта позитивная особенность коэффициента и определила его выбор.

В настоящей работе температура всей пластины принимается равной температуре торможения газа.

2. Кинетико-гидродинамическая модель

Применительно к решаемой задаче КГМ [3] формулируется следующим образом. В гидродинамической области используется модель Навье-Стокса-Фурье (НСФ):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{(\gamma-1)}{\rho} \left(P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &+ \\ + \frac{1}{c_v \rho} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где

$$P_{ij} = \delta_{ij} R p T - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5-3\gamma}{2} Z \right) \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right);$$

$$q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Коэффициент вязкости и параметр Z определяются зависимостями, используемыми в модели МКУ [6], но с сохранением порядка приближения модели НСФ, т. е. $\mu = \mu(T_t = T)$, $Z = Z(T_t/T_r = 1)$.

Для решения уравнения сохранения массы использовалась схема Лакса-Вендрофа [7]. Для остальных уравнений системы (1) применялся метод Томаса с нестационарным членом. Решение проводилось на трёх узлах сеток с переменным шагом, который изменялся от $2\lambda_\infty$ до $0,1L$.

В кинетической области применялось МКУ [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_x \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_y \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{p^m}{\mu} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_r^+ - f_r} \right|, \quad (2)$$

где $f_t = \int f d\epsilon$, $f_r = \int \epsilon f d\epsilon$,

$$f^+ = \frac{n}{(2\pi R T_t^+)^{3/2}} \exp \left(-\frac{c^2}{2 R T_t^+} \right) \left(1 + \frac{(\Phi_x c_x + \Phi_y c_y)}{3p(R T_t^+)^2} \left(\frac{c^2}{5 R T_t^+} - 1 \right) \right),$$

$$f_r^+ = \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} k T_r^+ f_t^+; \quad T_t^+ = T + 0,5(5-3\gamma) \left(1 - \frac{1}{Z} \right) (T_t - T_r),$$

$$T_r^+ = T - 1,5(\gamma-1) \left(1 - \frac{1}{Z} \right) (T_t - T_r); \quad T_t = (3Rn)^{-1} \int c^2 f_t d\mathbf{c},$$

$$T_r = 2(\gamma-1) \left((5-3\gamma) R p \right)^{-1} \int f_r d\mathbf{c}, \quad \Phi_i = 0,5 m_0 \int c_i c^2 f_t d\mathbf{c}.$$

В этом уравнении коэффициент вязкости и параметр Z соответствовали [6]: $\mu = \mu(T_t)$, $Z = Z(T_b, T_r)$.

Остальные необходимые для комбинированной модели моменты весовой функции, определены как:

$$n = \int f_t d\mathbf{c}, \quad u_i = n^{-1} \int \xi_i f_t d\mathbf{c},$$

$$P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f_t d\mathbf{c}, \quad \omega_i = \int c_i f_r d\mathbf{c}.$$

Для решения системы (2) применялась конечно-разностная схема с односторонними разностями против молекулярного потока на трех узлах. Отметим, что

направление потока в кинетических уравнениях определяется направлением молекулярной скорости. В данном случае это скорости ξ_x и ξ_y , имеющие два противоположных направления: $\xi_i > 0$ и $\xi_i < 0$. Использовались сетки с постоянным шагом $(1 \dots 2)\lambda_\infty$.

Принцип комбинирования моделей НСФ и МКУ в рамках рассматриваемой КГМ показан на схемах 1 и 2 рис. 1. Граничные условия гидродинамического решения (схема 1) формируются в узел сшивания, обозначенный чёрной точкой и принадлежащий области кинетического решения. Для выбранного разностного шаблона достаточно одного узла. Значения ρ , u_x , u_y , T в этом узле определяются как моменты весовой функции, вычисленной в кинетической области.

Граничные условия кинетического решения (схема 2) формируются в узлах сшивания, принадлежащих гидродинамической области (чёрные кружки). Так как для кинетического решения используются односторонние конечные разности на трёх узлах, для сшивания необходимо два узла.

Гидродинамическая модель менее информативна, чем кинетическая модель. Для восстановления весовой функции в узлах сшивания используется аппроксимирующая весовая функция f_A . С учётом порядка приближения гидродинамической модели в качестве аппроксимирующей весовой функции целесообразно принять разложение равновесной, максвелловой функции. Такое разложение используется в ряде работ, например [8], для одноатомных газов. В случае многоатомного газа для функций f_{At} и f_{Ar} аналогичные разложения приводят к выражениям [5; 6]:

$$f_{At} = f_M \left(1 + \frac{1}{\rho(RT_t)^2} \left(\frac{1}{2} (p_{xx}c_x^2 + p_{yy}c_y^2 + p_{zz}c_z^2) + p_{xy}c_xc_y + \left(\frac{c^2}{5RT_t} - 1 \right) (\Phi_x c_x + \Phi_y c_y) \right) \right);$$

$$f_{Ar} = kT_r \left(\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} f_{At} + f_M \frac{(\omega_x c_x + \omega_y c_y)}{\rho R^2 T_t T_r} \right),$$

$$f_M = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{c^2}{2RT_t} \right).$$

Макропараметры этих выражений определяются гидродинамической моделью и определяются в соответствующем приближении: [5]:

$$T_t = T - \frac{5-3\gamma}{3} Z \frac{\mu}{R\rho} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right); \quad T_r = T + (\gamma-1) Z \frac{\mu}{R\rho} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right);$$

$$p_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right);$$

$$p_{zz} = -p_{xx} - p_{yy} = \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right);$$

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad \omega_i = -\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Для молекул, отражённых пластиной, принят диффузный закон отражения:

$$f_w = \frac{n_w}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_w}\right); \quad n_w = (1-\alpha) \sqrt{\frac{2\pi}{T_w}} J_{down},$$

где T_w – температура поверхности. На донной поверхности пластины $\alpha = 0$.

3. Методика численной реализации кинетической составляющей комбинированной модели

Большую часть объёма памяти, потребляемого КГМ, занимает весовая функция f , так как размерность фазового пространства даже после формального интегрирования по координатам ξ_z и ϵ [5] вдвое превышает размерность геометрического пространства OXY . Вместе с тем, при решении стационарных задач нет необходимости хранить все значения f в памяти компьютера. В данной задаче при выбранных полупространствах молекулярных скоростей ξ_x и ξ_y достаточно рассматривать один квадрант пространства скоростей. На рис. 2 показан такой квадрант для полупространств $\xi_x \geq 0$ и $\xi_y \geq 0$.

Рис. 2 / Fig. 2. Вычислительная сетка в пространстве скоростей. Пунктирные линии – геометрическая сетка, сплошные линии – скоростная сетка, утолщённые сплошные линии – рассчитываемый квадрант скоростной сетки ($\xi_x \geq 0, \xi_y \geq 0$) / Computational grid in velocity space. Dashed lines – geometric grid, solid lines – speed grid, thickened solid lines – calculated quadrant of the speed grid ($\xi_x \geq 0, \xi_y \geq 0$).

Источник: составлено авторами.

Если используется конечно-разностная схема на трёх узлах геометрической расчётной сетки, то для продвижения по координате Y достаточно значений f на трёх строках сетки с координатами y_n, y_{n-1}, y_{n-2} . На рис. 3 показаны строки, используемые для вычисления f на n -ой и $(n+1)$ -ой строках. Продвижение по Y снизу-вверх, т. е. $\xi_y \geq 0$. Функция f записана в 4-мерный массив, в котором координата Y имеет три значения: 0, 1 и 2. Значения функции вычисляются в сечении массива $y = 0$ по значениям в сечениях $y = 1$ и $y = 2$.

Рис. 3 / Fig. 3. Алгоритм вычисления весовой функции при n -ом и $(n+1)$ -ом значениях координаты Y . Жирная линия – пластина / Algorithm for calculating the weight function for the n -th and $(n+1)$ -th values of the Y coordinate. The thick line is the plate.

Источник: составлено авторами.

После определения f во всех узлах выбранного квадранта (пространство скоростей) и во всех узлах сечения $y = 0$ (геометрическое пространство) вычисляются и записываются в память неполные моменты весовой функции. Неполные моменты вычисляются для молекулярных скоростей ξ_i . Например, для первого квадранта (рис. 2) момент второго порядка вычисляется как

$$M_{ij}^{(1)} = m_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \xi_i \xi_j f_{z\varepsilon} d\xi_x d\xi_y, \quad i, j = x, y.$$

здесь $f_{z\varepsilon}$ – весовая функция, формально проинтегрированная по ξ_z и ε . Верхний индекс в скобках – номер квадранта.

При переходе на следующую, $(n+1)$ -ю строку основной геометрической сетки, сечение массива $y = 0$ перенумеровывается (но не перезаписывается) как $y = 1$, сечение $y = 1$ – как $y = 2$. Вычисление сечения $y = 0$ продолжается по описанной выше схеме.

После вычисления неполных моментов во всех квадрантах всех геометрических узлов определяются макропараметры газовой среды. Например, касатель-

$$P_{xy} = \sum_{k=1}^4 M_{xy}^k - \rho u_x u_y.$$

ное напряжение

При решении задачи обтекания пластины с $Kn = 0,01$ описанная методика позволила сократить объём памяти примерно на два порядка.

4. Результаты расчётов

Расчёты проводились для двухатомного газа при $M = 2,31$ и $Kn = 0,1 \dots 0,01$. Для выбранного числа Маха имеется достаточно большой набор экспериментальных и расчётных данных в переходной области течения, то есть для указанных чисел Кнудсена. Подборку данных для коэффициента лобового сопротивления пластин c_x можно найти в [9]. Результаты расчётов, включая поля течения, сравнивались с расчётами по МКУ [6], которые удовлетворительно согласуются с данными [9].

На рис. 4 показана зависимость $c_x(\alpha)$. При $Kn = 0,1$ расчёты по МКУ и КГМ совпадают, так как при этих числах Кнудсена практически вся вычислительная область находилась в кинетической подобласти КГМ, а её гидродинамическая подобласть выполняла функции граничных условий на внешней границе вычислительной области.

Рис. 4 / Fig. 4. Зависимость коэффициента лобового сопротивления пластины от коэффициента поглощения её лобовой поверхности. 1 – МКУ [6] и КГМ, $Kn = 0,1$; 2 – пунктир МКУ $Kn = 0,01$, 2 – сплошная КГМ / The dependence of the drag coefficient of the plate on the absorption coefficient of its frontal surface. 1 – MKE [6] and KHM, $Kn = 0,1$; 2 – dotted line MKE $Kn = 0,01$, 2 – solid KHM.

Источник: составлено авторами.

При $Kn = 0,01$ и $\alpha < 0,7$ имеет место некоторое расхождение между используемыми моделями. Как следует из представленных ниже графиков, при этих значениях параметров вся высокоградиентная область находится в гидродинамической подобласти КГМ. Методы механики сплошной среды существенно уступают в точности расчета высокоградиентных областей методам молекулярно-кинетической теории. Это, видимо, и является причиной расхождения результатов расчета.

На следующих графиках представлены распределения плотности, проекции скорости u_x и температуры вдоль оси X при $Kn = 0,01$. На рис.5 и рис. 6 $\alpha = 0,6$, а вся высокоградиентная область течения находится в гидродинамической подобласти КГМ (слева от области сшивания). Профили плотности, скорости и температуры смещены вниз по потоку относительно профилей МКУ. Наблюдается существенное различие в профилях плотности. Это особенно заметно на уровне верхней кромки пластины ($y = 0,5$), рис. 6.

Рис. 5 / Fig. 5. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,6$, $y = 0,1$ – плотность; 2 – температура; 3 – u_x . Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,6$, $y = 0,1$ – density; 2 – temperature; 3 – u_x .

Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines – borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

Рис. 6 / Fig. 6. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,6$, $\gamma = 0,5$. 1 – плотность; 2 – температура; 3 – u_x . Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,6$, $\gamma = 0,5$. 1 – density; 2 – temperature; 3 – u_x . Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines are the borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

Рис. 7 / Fig. 7. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,7$, $\gamma = 0,1$ – плотность; 2 – температура; 3 – u_x . Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,7$, $\gamma = 0,1$ – density; 2 – temperature; 3 – u_x . Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines – borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

Рис. 8 / Fig. 8. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,75$, $y = 0,1$ – плотность; 2 – температура; 3 – u_x . Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области шивания / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,75$, $y = 0,1$ – density; 2 – temperature; 3 – u_x . Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines – borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

Рис. 9 / Fig 9. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,8$, $y = 0,1$ – плотность; 2 – температура; 3 – u_x . Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. $Kn = 0,01$, $\alpha = 0,8$, $y = 0,1$ – density; 2 – temperature; 3 – u_x . Dashed lines – MKE; solid lines – KHM.

Источник: составлено авторами.

По мере увеличения коэффициента поглощения высокоградиентная область течения всё больше смещается в кинетическую подобласть (справа от области сшивания). Профили МКУ и КГМ сближаются и в отношении расположения, и в отношении величин параметров, см. рис. 7 и рис. 8.

При $\alpha = 0,8$ (см. рис. 9) высокоградиентная область находится полностью в гидродинамической подобласти. Правая граница области сшивания имеет координату $x = -0,2$ и не попадает в поле рисунка. Профили КГМ и МКУ почти совпадают. Относительно небольшое различие связано, видимо, с тем, что для расчётов при $Kn = 0,01$ по МКУ использовалась геометрическая сетка с шагом $2\lambda_\infty$, а расчёты в кинетической подобласти КГМ выполнялись с вдвое меньшим шагом. Необходимость завышения шага в модели МКУ была связана с техническими возможностями используемых вычислительных средств.

Заключение

Результаты расчётов показывают, что комбинированная кинетико-гидродинамическая модель позволяет физически адекватно описывать процессы, протекающие в переходной области течения газовой среды. В области сшивания компонент модели отсутствуют разрывы производных параметров газа [10].

Модель КГМ позволяет выставлять граничные условия на поглощающих поверхностях. Значения такой интегральной характеристики как $c_x(\alpha)$, рассчитанные по КГМ, удовлетворительно согласуются с результатами расчетов по МКУ.

При расчёте относительно плотных газов ($Kn = 0,01$) КГМ позволяет сократить потребляемый объём памяти вычислительного устройства примерно на три порядка и процессорное время на два порядка по сравнению МКУ.

Разработанная модель КГМ может быть использована в широком интервале чисел Кнудсена.

В дальнейшем планируется провести исследование КГМ в области до- и гиперзвуковых течений, то есть в широком интервале чисел Маха.

Статья поступила в редакцию 06.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Salbreux G., Jülicher F. Mechanics of active surfaces // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. Iss. 3. P. 032404. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.032404.
2. Rioux R. W. The Rate of Fluid Absorption in Porous Media // *Electronic Theses and Dissertations*. 2003. Vol. 234. URL: <https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/234> (дата обращения: 06.09.2021).
3. Никитченко Ю. А., Попов С. А., Тихоновец А. В. Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель течения многоатомного газа // *Математическое моделирование*. 2019. Т. 31. № 2. С. 18–32. DOI: 10.1134/S0234087919020023.
4. Nikitchenko Y., Popov S., Tikhonovets A. Special Aspects of Hybrid Kinetic-Hydrodynamic Model When Describing the Shape of Shockwaves // *Computational Science – ICCS 2019 (19th International Conference, Faro, Portugal, June 12–14, 2019). Proceedings, Part IV* / eds. Rodrigues J. et al. Switzerland: Springer, Cham, 2019. P. 425–434 (Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11539). DOI: 10.1007/978-3-030-22747-0_32.

5. О коэффициенте лобового сопротивления сорбирующей пластины, установленной поперек потока / Глинкина В. С., Никитченко Ю. А., Попов С. А., Рыжов Ю. А. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 6. С. 78–85. DOI: 10.7868/S0568528116060050.
6. Никитченко Ю. А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017. Т. 57. № 11. С. 1882–1884. DOI: 10.7868/S0044466917110114.
7. Thompson M. J. An Introduction to Astrophysical Fluid Dynamics. London: Imperial College Press, 2006. 240 p.
8. Rovenskaya O. I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic-continuum approach versus Navier-Stokes // Microfluidics and Nanofluidics. 2016. Vol. 20. P. 81. DOI: 10.1007/s10404-016-1746-x.
9. Аэрогидромеханика / Бондарев Е. Н., Дубасов В. Т., Рыжов Ю. А., Свищевский С. Б., Семенчиков Н. В. М.: Машиностроение, 1993. 608 с.
10. Тихоновец А. В. Разработка комбинированной физико-математической модели для описания течений высокой динамической неравновесности: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2020. 108 с.

REFERENCES

1. Salbreux G., Jülicher F. Mechanics of active surfaces. In: *Physical Review E*, 2017, vol. 96, iss. 3, pp. 032404. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.032404.
2. Rioux R. W. The Rate of Fluid Absorption in Porous Media. In: *Electronic Theses and Dissertations*, 2003, vol. 234. Available at: <https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/234> (accessed: 06.09.2021).
3. Nikitchenko Yu. A., Popov S. A., Tikhonovets A. V. [Composed kinetic-hydrodynamic model of polyatomic gas flow]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2019, vol. 31, no. 2, pp. 18–32. DOI: 10.1134/S0234087919020023.
4. Nikitchenko Y., Popov S., Tikhonovets A. Special Aspects of Hybrid Kinetic-Hydrodynamic Model When Describing the Shape of Shockwaves. In: Rodrigues J. et al., eds. *Computational Science – ICCS 2019 (19th International Conference, Faro, Portugal, June 12–14, 2019). Proceedings, Part IV*. Switzerland, Springer, Cham, 2019, pp. 425–434 (Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11539). DOI: 10.1007/978-3-030-22747-0_32.
5. Glinkina V. S., Nikitchenko Yu. A., Popov S. A., Ryzhov Yu. A. [Drag coefficient of an absorbing plate set transverse to a flow]. In: *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2016, no 6, pp. 78–85. DOI: 10.7868/S0568528116060050.
6. Nikitchenko Yu. A. [Model kinetic equation for polyatomic gases]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2017, vol. 57, no 11, pp. 1882–1884. DOI: 10.7868/S0044466917110114.
7. Thompson M. J. An Introduction to Astrophysical Fluid Dynamics. London, Imperial College Press, 2006. 240 p.
8. Rovenskaya O. I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic-continuum approach versus Navier-Stokes. In: *Microfluidics and Nanofluidics*, 2016, vol. 20, p. 81. DOI: 10.1007/s10404-016-1746-x.
9. Bondarev E. N., Dubasov V. T., Ryzhov Yu. A., Svirshchevskii S. B., Semenchikov N. V. *Aerogidromekhanika* [Aerohydrodynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1993. 608 p.
10. Tikhonovets A. V. *Razrabotka kombinirovannoi fiziko-matematicheskoi modeli dlya opisaniya techenii vysokoi dinamicheskoi neravnovesnosti: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Development of a combined physical and mathematical model for describing flows of high dynamic non-equilibrium: PhD thesis in Physical and Mathematical Sciences]. Moscow, 2020. 108 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Никитченко Юрий Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры аэродинамики летательных аппаратов Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: nikitchenko7@yandex.ru;

Тихоновец Алена Васильевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры аэродинамики летательных аппаратов Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: tikhonovets.a.v@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yurii A. Nikitchenko – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Prof., Department of of Aircraft Aerodynamics, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: nikitchenko7@yandex.ru;

Alena V. Tikhonovets – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assistant Lecturer, Department of Aircraft Aerodynamics, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: tikhonovets.a.v@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В. Расчёт поля течения вблизи поглощающей поверхности с применением кинетико-гидродинамической модели и повышение ее вычислительной экономичности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 4. С. 96–111.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-96-111.

FOR CITATION

Nikitchenko Yu. A., Tikhonovets A. V. Calculation of the flow field near the absorbing surface using the kinetic-hydrodynamic model and increasing its computational efficiency. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 96–111.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-96-111.