УДК 27.23

Дворяткина С.Н.

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА ПЛОТНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*

Аннотация: Работа рассматривает возможность использования δ-распределения Дирака в теории вероятностей для задания плотности дискретных случайных величин. Автор пересматривает классический подход к изложению понятия «плотности распределения», который для задания случайных величин не является общим. При этом использует теорию обобщенных функций для определения функции распределения вероятностей в виде «сингулярного распределения».

Ключевые слова: плотность распределения, математическое образование, δ-распределение Дирака.

Проблема совершенствования математического образования в вузах достигла зрелости, то есть была признана и стала предметом обсуждения всех специалистов, и в особенности методистов-математиков, как самостоятельная методологическая проблема лишь в настоящее время. Уровень современного образования и его педагогический успех зависят от того, насколько процесс индивидуального опыта адекватно воспроизводит образовательный опыт истории науки. И это не просто историческая ретроспектива научного знания, а необходимость овладения конкретно-историческими формами знания в их преемственности как живой связи поколений. Поэтому широкое распространение в теории обучения в высшей школе находят исторические концепции. Экскурс в историю предмета возвращает целостность мира, дифференциально отображаемого в сегодняшнем разделении внутри науки и практики. «Историческое в оценке явлений, фактов и событий дает основание появлению этих фактов и событий, позволяет констатировать и выявлять конкретные исторические условия их возникновения» [1, 31]. Кроме общего хода развития науки, пробудившего интерес к проблематике, и в многообразной связи с этим развитием такому созреванию, на наш взгляд, содействовали два фактора.

Первый из этих факторов имеет преимущественно социологическую природу. Как отмечают ученые, занимающиеся исследованием соответствующих вопросов, «одной из причин высокой стабильности социальных сообществ развитых капиталистических стран является эффективная система подготовки и формирования научной элиты», так как «роль элитарного образования в сфере передачи «генетического кода нации» исключительно важна для судеб страны» [2, 177-182]. О роли творческой элиты в жизни крупного государства английский писатель и физик Ч.П. Сноу писал: «Во всех крупных индустриальных странах наблюдается одно интересное явление. Потребность в талантливых людях, способных выполнять работы первостепенной важности, оказывается больше, чем может дать страна, не прибегая к чрезвычайным методам, и эта диспропорция становится с годами все более ощутимой. В результате эти страны испытывают недостаток в умных и компетентных людях, согласных заниматься интересной работой, а без этих людей невозможно добиться, чтобы колесики государственной машины вертелись без перебоев» [3]. Для России характерная проблема является не исключением. Это означает, что от «подготовки и выращивания» научной элиты зависит прогресс в науке, в современных технологиях, культуре и других сферах деятельности человека.

Второй фактор можно определить как фактор психологический. Учебный процесс как в его структуре, так и в функционировании рассматривают на основе совокупности детерминирующих факторов и условий. «Высшее образование, его содержание, цели и задачи обучения, учебный процесс и его составляющие – все это генетически детерминировано общественными отношениями, социальными условиями, состоянием развития науки и техники и другими определяющими факторами» [3, 21]. Но с другой стороны учебный процесс как любой реальный процесс – это система, связанная с людьми, с их деятельностью, с их внутренним миром. А этот мир часто характеризуется степенью неопределенности состояния. Следовательно, наряду с учетом детерминированных факторов в теории и практике обучения, перспективным и необходимым сегодня является изучение случайных факторов. Мы не можем не учитывать такие случайные факторы как степень самостоятельности студента в обучении, самовоспитание, самоконтроль и др., поэтому бывает сложно определить, какие именно причины приводят к успеваемости или неуспеваемости. Однако эти общие случайные признаки наблюдаются у всех студентов с большей или меньшей вероятностью, но в которых обнаруживается нечто общее и закономерное, требующее анализа, изучения и всестороннего рассмотрения во взаимосвязи и взаимном влиянии.

Совершенствование методики преподавания теории вероятностей сегодня, на наш взгляд, является самой злободневной и актуальной проблемой из всех математических дисциплин. И причина именно в доминирующей роли случайного над детерминированным в обучении данной дисциплин. Существенным является также то, что и сам предмет изучения дисциплины полярно отличается от других фундаментальных математических дисциплин. Если в рамках классических математических наук предметом изучения являются закономерные явления и отношения между ними, то в теории вероятностей исследуются закономерности в случайных явлениях.

Не случайно, а глубоко закономерно в настоящей статье мы предлагаем полезное методическое новшество – рассмотрение дискретных случайных величин, использующих распределение Дирака. Понятие δ-распределение Дирака было введено в двадцатых годах прошлого столетия одним из основателей квантовой механики, крупнейшим английским физиком-теоретиком Полем Дираком (1902-1984) для описания возмущений в малых объемах, сравнимых с точкой. Математическое обоснование введенного П. Дираком понятия было осуществлено С.Л. Соболевым.

Целесообразность введения новой идеи можно обосновать следующим образом. Во-первых, новый подход приведет к повышению уровня фундаментальной математической подготовки и усилению прикладной направленности курса математики, что определяет основное требование, предъявляемое в настоящее время к выпускникам высших учебных заведений (это мнение не только наше, но и Л.Д. Кудрявцева) [4, 86]. Во-вторых, предвидя возмущение скептиков, считающих, что новый подход приведет к увеличению времени на изложение нового материала, можно констатировать, что в обучении новейшим теориям заинтересованы, прежде всего, слушатели, а одна дополнительная и весьма красивая лекция об интегрировании по частям в рамках функционалов покажется ерундой по сравнению с овладением основ новейшего естествознания. Исследуя далее проблему «избыточного и изысканного» в преподавании математики, хотелось бы процитировать талантливого математика и прекрасного педагога Л.Д. Кудрявцева: «Большого успеха в математике можно добиться в сравнительно узкой области и с небольшим запасом знаний, но, чтобы быть хорошим педагогом, необходимо быть хорошо эрудированным в математике в целом» [4, 137].

Во всех классических учебниках по теории вероятностей схема изучения случайных величин следующая:

1) вначале вводится понятие случайной величины как действительной функции

$\xi = \xi(\omega)$, определенной на множестве элементарных исходов Ω;

2) для задания вероятностей значений случайных величин вводят понятие функции распределения случайной величины следующим образом: $F(x) = P\{\xi < x\}$, где x – произвольное действительное число. Затем определяют класс дискретных случайных величин. Для полной вероятностной характеристики дискретной случайной величины ξ, принимающей с положительными вероятностями значения $x_1, x_2, \ldots$, достаточно знать вероятности $p_k = P\{\xi = x_k\}$. По совокупности вероятностей $p_к$ можно определить функцию распределения посредством равенства $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$ (1).

3) Если функция распределения непрерывно дифференцируема, то ее производная по x $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ (2)

называется плотностью вероятности ξ в точке x, и распределение случайной величины ξ называют абсолютно непрерывным. Тем самым, выделяют новый класс случайных непрерывных величин. Это выглядит следующим образом: вводится понятие средней плотности $\frac{P\{x < \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}$ распределения случайной величины ξ на интервале $(x; x + \Delta x)$, переходят к пределу при $\Delta x \to 0$ и определяют новую функцию

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Плотность распределения характеризует поведение случайных величин. Указанный способ задания случайных величин не является общим, так как пригоден только для непрерывных распределений. Если для каждого x $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ (3), где $f(x)$ – неотрицательная интегрируемая функция, то случайная величина ξ распределена абсолютно непрерывно. Для дискретных случайных величин, казалось бы, невозможно ввести понятие плотности распределения вероятностей аналогичное (3) как для непрерывных случайных величин. Это отвечает действительности, если на плотность смотреть как на функцию. Но если воспользоваться теорией обобщенных функций для определения функции распределения вероятности $F(x)$ в виде «сингулярного распределения», то это диаметрально меняет наше представление о плотности.

Используя современный математический аппарат, мы пересматриваем классический подход к изложению понятия «плотности распределения». Изучение понятия «распределение вероятностей» мы начинаем с объяснения физического «распределения» на примере распределения массы длинной проволоки, с непрерывно дифференцируемой плотностью. Затем переносим все рассуждения на «распределение вероятностей». После чего, возвращаясь к физическим проблемам, предлагаем слушателям ввести понятие «точки с единичной массой». При этом не помешает сделать «ошибку Дирака» [5], введя δ-функцию, именно как функцию, а не функционал. Приведем некоторые из этих рассуждений.

Распределим единичную массу в ε-окрестности нуля. Средняя плотность

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4/3\pi\varepsilon^3}, |x| \le \varepsilon \\ 0, |x| > \varepsilon \end{cases}$$ и, при этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = 1.$

Последнее равенство означает, что как бы мы не сжимали «носитель массы», сама масса должна оставаться постоянной. Далее нас интересует плотность при $\varepsilon \to 0$. Если принять в качестве искомой плотности $\delta(x)$ предел последовательности средних плотностей, то есть функцию

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty, x = 0 \\ 0, x \ne 0 \end{cases},$$

то легко приходим к противоречию с физическим смыслом «плотность». В самом деле, в математическом анализе интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx$ определен в виде несобственного, но тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)xdx = \lim 0 = 0$. Это значит, что введенная выше функция $\delta(x)$

не восстанавливает массу и, поэтому, не может быть принята в качестве искомой плотности. В книге [4] П. Дирак равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = 1.$$

определил «физический смыл» интеграла от δ-функции, предупредив однако, что это не функция в привычном понимании этого выражения. Он предложил называть ее «присоединенной функцией».

Математические преобразования с плотностью $\delta_\varepsilon(x)$ приведут к интегральным выражениям типа

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x)dx$$

с непрерывной в окрестности нуля функцией $f(x)$. Применяя первую теорему о среднем и учитывая «физику», получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\xi_\varepsilon) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\xi_\varepsilon) = f(0).$$

Эти рассуждения позволяют определить действие δ-функции следующим равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0),$$

в котором δ-функция не функция, а функционал, ставящий в соответствие каждой функции, непрерывной в окрестности нуля, число $f(0)$.

Это равенство имеется у Дирака [5] и трактуется как свойство δ-функции, а не как определение. В качестве определения «обобщенной δ-функции» оно использовано С.Л. Соболевым (1938) и, в дальнейшем, Л. Шварцем (1950).

Необходимо пояснить, что выражение $(\delta, f) = f(0)$ означает, что пределом последовательности функций δ_ε(x), $\varepsilon \to 0$, является функционал $f \to f(0)$ (не функция). В современной литературе этот функционал и называется δ-распределением Дирака, которое широко используется в математическом анализе и в его приложениях.

Для полной вероятностной характеристики дискретной случайной величины ξ, принимающей с положительными вероятностями значения $x_1, x_2, \ldots$ достаточно знать вероятности $p_k = P\{\xi = x_k\}$. По совокупности вероятностей $p_к$ можно определить функцию

распределения посредством равенства $F(x) = \sum\limits_{x_k < x} p_k$ (x).

Функция распределения любой дискретной величины разрывна, возрастает скачками при тех x, которые являются возможными значениями ξ. С помощью функции Хевисайда $\Theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$ функция распределения представляется следующим образом:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Theta(x - x_i)\,. \qquad (2)$$

Как известно, если функция распределения дифференцируема, то ее производная по x

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad (3)$$

называется плотностью вероятности ξ в точке x.

Но функция (2) не дифференцируема. Она является кусочно-гладкой, что и позволяет ввести понятие «производной распределения». Далее следует найти «обобщенную производную» от функции Хевисайда, что и приведет к плотности, определяемой также по формуле (3), где производные понимаются в смысле распределений:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i)\,.$$

Необходимо сообщить слушателям, что плотность распределения является важнейшей характеристикой поведения случайных величин. Указанный способ задания дискретных случайных величин является общим, так как пригоден как для непрерывно распределенных случайных величин, так и для распределенных дискретно. Теперь необходимо отметить, что если для каждого x

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \qquad (4)$$

где p(x) – неотрицательная интегрируемая функция, то функция F(x) является «абсолютно непрерывной» (см.[6]), поэтому и случайная величина ξ называется «распределенной абсолютно непрерывно». Зададим плотность случайной величины ξ формулой

$$f(x)=\sum_{i:x_i<x} p_i\delta(x-x_i)\,, \qquad (5)$$

тогда

$$F(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i:x_i<x} p_i\delta(t-x_i)dt=\sum_{i:x_i<x} p_i\,,$$

то есть получили равенство, определяющее функцию распределения в обычном (классическом) понимании дискретно распределенных случайных величин.

Главная методическая трудность, которую встречает преподаватель, заключается в объяснении возможности дифференцировать ступенчатую функцию. Предлагается следующий план этого объяснения.

Надо объяснить формулу

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{i:x_i<x} p_i\Theta(x-x_i)\,. \qquad (6)$$

Для доказательства используем основные правила для линейных непрерывных функционалов, называемых пространством основных функций Л. Шварца, которые нами вводятся в качестве очевидного (как аксиомы):

1) (о равенстве) если $(f;\varphi)=(g;\varphi)$(f;φ), то $f=\varphi$ для $\forall\varphi$;

2) (дифференцирование функционалов) $(f',\varphi)=-(f,\varphi')$ где

$$(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,.$$

Для доказательства равенства (6) достаточно доказать равенство

$$(\Theta',\varphi)=(\delta,\varphi)=\varphi(0)\,. \qquad (7)$$

Имеем: $(\Theta',\varphi)=-(\Theta,\varphi')=-\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta(x)\varphi'(x)dx=-\left[\int_{-\infty}^{0}\Theta(x)\varphi'(x)dx+\int_{0}^{+\infty}\Theta(x)\varphi'(x)dx\right]=$

$$=-\left(\Theta(x)\varphi(x)\,|_{-\infty}^{-0}-\int_{-\infty}^{0}\Theta'(x)\varphi(x)dx+\Theta(x)\varphi(x)\,|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\Theta'(x)\varphi(x)dx\right).$$

Под знаком интеграла стоят производные от констант, поэтому интегралы равны нулю. Кроме того, $\varphi(\pm\infty)=0$, и следовательно получим:

$$(\Theta',\varphi)=\Theta(+0)\varphi(0)-\Theta(-0)\varphi(0)=(\Theta(+0)-\Theta(-0))\varphi(0)$$

Согласно определению функции Хевисайда, $\Theta(+0)=1$, $\Theta(-0)=0$, тогда $(\Theta',\varphi)=\varphi(0)$. Следовательно, $\Theta'(x)=\delta(x)$ Последнее равенство следует понимать в смысле принятого нами постулата 1), т.е. $(\Theta'(x),\varphi)=(\delta(x),\varphi)$, для любой основной функции φ .

Теперь, используя формулу (7), получим равенство, понимаемое в смысле обобщенных функций и определяющее сингулярную обобщенную функцию

$$f(x) = F'(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i \Theta'(x - x_i) = \sum_{i:x_i<x} p_i \delta(x - x_i),$$

которая называется обобщенной плотностью распределения дискретной случайной величины ξ. Обобщенную плотность распределения удобно использовать для записи дискретно-непрерывных законов распределения. Классическим примером такого распределения является распределение вероятности энергии в квантовой теории: после поглощения одного кванта энергии атом может перейти в одно из «возбужденных состояний», при этом распределение вероятности энергии E частично дискретно, а частично непрерывно [7]. Функция распределения $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i) + f_2(x)$, где $f_2(x) = 0$, при $x > x_0$.

В современной науке можно зайти чрезвычайно далеко в построении абстрактных моделей обучения. Поэтому мы не предлагаем отказаться от традиционного преподавания теории вероятностей, коренным образом изменив содержание, так как в нем много ценного и полезного. Для преподавания фундаментальных теорий необходимо применять методы и принципы, касающиеся логического строения математических теорий, понятий, их генезиса, являющиеся наиболее продуктивными и содержательными. «Всякая наука имеет свою внутреннюю структуру и свою внутреннюю логику, имеет внутренние связующие звенья, не всегда имеющие выход за пределы самой науки, но играющие принципиальную роль внутри нее и являющиеся необходимым для ее понимания, усвоения и для умения правильно использовать ее в приложениях» [4, 112]. В качестве внутреннего связующего звена при изучении случайных величин мы рекомендуем использовать δ-распределение Дирака. С его помощью естественно и просто устанавливаются основные свойства числовых характеристик, свойства плотности распределения и функции распределения. При этом курс теории вероятностей будет выглядеть логически стройным и завершенным. В заключение обсуждения необходимости и полезности использования δ-распределения Дирака в теории вероятностей еще раз отметим роль исторической концепции в образовательном процессе. Этот принцип анализирует связь прошлого, настоящего и предвидимого будущего. История науки есть необходимая характеристика генетического построения любой науки, и только исторический анализ позволяет увидеть «невидимые» стороны содержания понятия и динамику понятийно-концептуального аппарата. Исторический путь возникновения и развития понятия случайной величины указывает на первичное появление общего понятия плотности распределения для непрерывных распределений, а затем уже понятия функции распределения для дискретных случайных величин ([8, 54-61],[9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы: учебно-методическое пособие. М.: Высшая школа, 1980.
2. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. 3-е издание. М.: УРСС, 2003.
3. Сноу Ч.П. Две культуры. М: Прогресс, 1973.
4. Кудрявцев Л.С. Мысли о современной математике и ее преподавании: Избранные труды. Т. 3. М.: Физматлит, 2008.
5. Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
6. Кудрявцев Л.С. Курс математического анализа: учебник для вузов в 2-х томах. Т. 1. М: Высшая школа, 1981.

7. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
8. Гнеденко Б.В. Очерк по истории теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
9. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под. ред А.П. Юшкевича. М., 1970-1972. Т. 1-3.

S. Dvorjatkina

NEW SIGHT AT DENSITY OF DISCRETE DISTRIBUTION

Abstract: This Work examines the possibility of using of of Dirakas δ-distribution in the theory of probability for the task of density of discrete random quantities. The auther reconsiders the classical approach to a concept statement of «density of distribution» which is not common for the task of random quantities. He uses the theory of generalised functions for the definition of function of distribution of probabilities as «singular distributing».

Key words: Distribution density, mathematical formation, δ - distribution of Diraka.