Key words: vocational training, design, the is professional-practical competence, design knowledge and the abilities, the pedagogical-directed assistance, interaction, coauthorship, principles of formation of the competence of the future designers.

Багдуева З.Н., Челябов И.М.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ЕГЭ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ*

Аннотация: В статье разобраны многие интересные с методической точки зрения задания из КИМов ЕГЭ по математике.

Ключевые слова: ЕГЭ в преподавании математики, мыслительная деятельность.

Завершающийся в 2008 году эксперимент по введению единого государственного экзамена стал самым заметным явлением в современной системе образования России. С ним связаны надежды одних и неверие других, одни его хвалят, другие ругают.

На наш взгляд, в сложившейся социально-политической обстановке, альтернативы единому госэкзамену, как объективной форме оценки знаний, пока что нет.

При правильной организации, достаточном финансировании, и полном соблюдении технологии система единого госэкзамена на всех уровнях (муниципальном, региональном, и федеральном) может стать эффективным средством оценки качества образования и вполне заменить работу сотен и сотен комиссий, якобы контролирующих качество образования.

Общие аспекты ЕГЭ широко продискуссированы. Остановимся на отдельных сторонах ЕГЭ по математике. Мы разделяем мнение многих учителей, руководителей образовательных учреждений и ученых о том, что математика должна оставаться в числе обязательных предметов ЕГЭ, т. к. только логически-мыслительная грамотность учащихся может стать мерилом качества обучаемости образовательного учреждения.

Как продолжение последней мысли выскажемся по поводу задач со звёздочками в КИМах математики (В9 - 11 текстовые и геометрические задачи). Структура КИМов такова, что выполнение заданий А(1-10), В(1-8) и С(1-2) обеспечивает 22 балла по системе первичных и около 80 баллов по 100 балльной системе с уверенной оценкой «5».

А это вполне достаточно для поступления практически в любой ВУЗ субъектов РФ. Тем самым КИМы целенаправленно умаляют роль изучения геометрии и решения текстовых задач в школе, исторически сложившихся эффективных средств развития пространственного воображения и логического развития учащихся. Было бы более разумным не только убрать звёздочки с заданий В9 – В11, но и давать по 2 балла (а не один) за их правильное выполнение.

По роду деятельности нам постоянно приходится сталкиваться с учителями-практиками. Мы разделяем их удовлетворение КИМами ЕГЭ по математике: вполне продуманная система перевода баллов в оценки, хорошо подобранные с методической точки зрения и равнозначность по степени трудности каждой из частей ЕГЭ, однозначность ответов на задания. Позволяя достаточно легко получать оценки 3 и 4, КИМы ЕГЭ убедительно демонстрируют: учащемуся для получения оценки 5 недостаточно знать теоретический материал (правила, теоремы, набор формул), у него должны быть выработаны навыки последовательного и логического рассуждения и анализа условий задач.

В данной статье более подробно рассмотрен анализ условий задачи, который помимо традиционных (сравнение с аналогичными, сопоставление различных частей и т. п.), должен включать нестандартные подходы и оценку уровня трудности, требования к форме ответа).

Начнем со старинной задачи.

По одну сторону от прямой l расположены две точки: А и В. Найти такую точку М на прямой l, чтобы сумма расстояний от точек А и В до М была наименьшей.

Решение. Анализируя условие задачи, приходим к такой же задаче, когда точки А и В расположены по разные стороны от прямой l. Но тогда достаточно соединить A и B прямой линией. Точка пересечения двух прямых будет искомой. После этого нетрудно догадаться о решении исходной задачи – достаточно построить точку B[1], симметричную B относительно прямой l.

Последующие задачи взяты из КИМов ЕГЭ.

1. Вычислить

$2\sqrt{5} - \sqrt[4]{(29-12\sqrt{5}\ )^2}$.

Решение. 29>12 $\sqrt{5}$, поэтому $\sqrt[4]{(29-12\sqrt{5})^2} \ = \sqrt{29-12\sqrt{5}}$

Далее анализируем пример. Так как задание из раздела B, то в ответе радикалы не должны быть. Значит число 29-12 $\sqrt{5}$ должно быть полным квадратом, т. е. надо подобрать a, b так, чтобы выполнялось равенство 29-12 $\sqrt{5}$ =(a-b)^2. Получим систему $\begin{cases} ab = 6\sqrt{5}, \\ a^2 + b^2 = 29 \end{cases}$ из которой следует, что $a = 2\sqrt{5}$, b=3.

Ответ: $2\sqrt{5} - 3$.

2. Найти $\sqrt{49 - 14 \cdot 4^x + 16^x} - 4^X + 2.5$, если 3^x=7.

Решение. Так как $\sqrt{49 - 14 \cdot 4^x + 16^x} = \sqrt{(4^x - 7)^2}$.

и 3^x=7, то 4^x>7. Поэтому $\sqrt{(4^x - 7)^2}$ =4^x-7. Тогда $\sqrt{49 - 14\, 4^x + 16^{\div}} + 2.5 = -4.5$

Ответ: -4.5.

3.Решить уравнение (из заданий C):

$\sqrt{x^2 - 14x + 49} + \sqrt{24 + 21x - 3x^2} = 7 - x$.

Решение.

Анализ. Слева имеем сумму двух неотрицательных выражений, значит, 7-x$\geq$0, x-7$\leq$0 и $\sqrt{(x-7)^2} = 7 - x$. Тогда получим уравнение 24 + 21x – 3x^2 = 0, из которого следует x = –1, x = 8.

Ответ: -1.

4. Решить уравнение:

а) $\log_7(\boldsymbol{x} - 5) + \sqrt[4]{\log_7^4(2\boldsymbol{x} - 9)} = 0$,

б) $\log_{0.25} \sqrt[4]{(x^2 - 4x + 4)^2} + \log_4 |3 - x| = 0$.

Решение. а) Из ОДЗ следует, что $x > 5$. Тогда приходим к уравнению $\log_7 (x-5)(2x-9) = 0$, которое имеет корни $x = \dfrac{19 - \sqrt{57}}{4}$, $x = \dfrac{19 + \sqrt{57}}{4}$.

Ответ: $x = \dfrac{19 + \sqrt{57}}{4}$.

б) В этом примере знак $x - 2$ не удаётся определить, поэтому приходится воспользоваться равенством $\log_{0.25} \sqrt[4]{(x-2)^4} = \log_{0.25} |x - 2|$, $\quad x \neq 2$. Получим уравнение $\log_2 |x-2| - 2\log_{0.25} |3 - x| = 0$, решением которого является $x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

5. Решить уравнение:

$$\sqrt{9 + (4x-3)^2} = 3 - \sin^2 \frac{8\pi x}{3}$$

Решение. Анализ. Очевидно, что $9 + (4x-3)^2 \geq 9$, а $3 - \sin^2 \dfrac{8\pi k}{3} \leq 3$. Тогда имеем, что левая часть уравнения не меньше 3, а правая – не больше 3. Остаётся одно:

$$\begin{cases} 4x-3=0, \\ \sin\frac{8\pi x}{3}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \; x=\frac{3}{4}$$

Ответ: $x=\frac{3}{4}$.

6. Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

$y = 2.5\cdot\log_{\frac{1}{3}}(3-x^2)$ на отрезке $[-1;\sqrt{2}]$.

Решение. Анализ. Первая мысль – использовать стандартную схему исследования функции $f(x)$, заданную на отрезке $[a,b]$, но это сложновато. Решение упрощается, если воспользоваться монотонностью функции $\log_{\frac{1}{3}} z$. Нетрудно установить, что

$y_{\max} = 2.5\log_{\frac{1}{3}} z_{\min}$,

$y_{\min} = 2.5\log_{\frac{1}{3}} z_{\max}$, где

$z=3-x^2$ на отрезке [-1; $\sqrt{2}$].

Так как $0\le x^2 \le 2$, то

$0\ge -x^2 \ge -2$,

$1\le 3-x^2 \le 3$

$z_{\min}=1$, $z_{\max}=3$, $y_{\max}=2.5\log_{\frac{1}{3}}1=0$, $y_{\min}=2.5\log_{\frac{1}{3}}3=-2.5$.

Ответ: 2.5.

Анализ помогает также и в заданиях C_3, C_5. Приведем два примера.

7. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} xy=7-3x-x^3, \\ x+(\frac{x^2}{y+2})^{0.5}=1+\sqrt{y+2} \end{cases}$$

Решение:

1) Из второго уравнения следует, что $x\ne 0$ и $y\ge -2$.

2) Представив первое уравнение в виде $y=-x^2-3+\frac{7}{x}$, замечаем, что должно быть $x>0$ (в противном случае получилось бы $y<-3$, что противоречит неравенству $y\ge -2$).

3) Теперь второе уравнение принимает вид $x+\frac{\sqrt{y+2}}{x}=1+\sqrt{y+2}$ или $x-1=\sqrt{y+2}\cdot\frac{x-1}{x}$, $(x-1)\cdot\frac{x-\sqrt{y+2}}{x}=0$.

Отсюда следует, что либо $x=1$, либо $x=\sqrt{y+2}$.

При $x=1$ из первого уравнения получим, что $y=3$.

Следовательно, (1, 3) – решение системы.

При $x=\sqrt{y+2}$ или $y=x^2-2$ получим уравнение $2x^3+x-7=0$, которое имеет единственное решение $x_0>1$. Значит $(x_0; x_0^2-2)$ – второе решение системы.

Ответ. Два решения.

8. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 9x^3-50x^2+43x-10=0, \\ (7-9x)\cdot\cos y+\dfrac{15}{x}-22=\dfrac{10y}{9x}+\sqrt{\dfrac{196}{x+1}-81x^2+171x-196*\cos 2y}. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Традиционный анализ подсказывает, что следует исследовать первое уравнение системы, определить число его корней и в последующем проверить, какой подходит второму уравнению. А что если найти ОДЗ подкоренного выражения? Условие неотрицательности подкоренного выражения приводит к неравенству $\dfrac{x(9x-5)^2}{x+1}\le 0$, справедливому для $x\in(-1;0]$ и $x_0=\dfrac{5}{9}$.

Анализируем первое уравнение на этом множестве. Левая часть его ($9x^3-50x^2+43x-10$) при $x\in[-1;0)$ принимает отрицательные значения. Значит на этом промежутке данное уравнение не имеет корней. Если $x=x_0$, то $f(x_0)=0$ (проверяется просто).

Таким образом, среди допустимых значений x только $x_0=\dfrac{5}{9}$ является решением первого уравнения.

Когда $x=\dfrac{5}{9}$, второе уравнение упрощается и примет вид:

$2(y-\cos y)=5$ (1)

Функция $g(x)=x-\cos x$ принимает все значения от $-\infty$ до ∞ и возрастает на всей оси, т.к. $g'(x)=1+\sin x\ge 0$. Равенство достигается лишь при $\sin x=-1$. А так как $g(0)<0$, а $g(\frac{\pi}{2})>0$, то уравнение (1) имеет решение и притом только одно.

Вывод: система имеет единственное решение.

9. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-4)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2|=2\sqrt{5}, \\ x\ge 2 \quad [5, c.78]. \end{cases}$$

При решении данной системы авторы воспользовались понятиями, неизвестными всем учащимся общеобразовательных учреждений, в частности формулой расстояния от точки до прямой, что, естественно, поставило выпускников средних школ, сдававших госэкзамен по математике в 2007 г., не в равные условия. Такого рода некорректные требования в заданиях КИМов ЕГЭ не должны быть. Чтобы не быть голословными, процитируем сперва решение авторов. «Пусть $(x; y)$ – координаты некоторой точки плоскости. Тогда левая часть первого уравнения системы – сумма расстояний от этой точки М(0;4) и до прямой, заданной уравнением $x-2y-2=0$. Заметим еще, что правая часть уравнения равна расстоянию от точки М до указанной прямой. Точки плоскости, обладающие данным свойством, лежат на перпендикуляре, проведенном из точки М на рассматриваемую прямую. Проведем этот перпендикуляр MP. Очевидно, что для любой точки N, не принадлежащей этому перпендикуляру, сумма расстояний от точки M до рассматриваемой прямой будет больше длины перпендикуляра MP. Ясно, что основание перпендикуляра P имеет координаты (2;0). Учитывая неравенство системы $x \geq 2$, получим, что только координаты точки P являются искомым решением данной системы.

Ответ: (2;0)» Для сравнения приведем наше решение.

Рассмотрим два случая:

$$1)\ x-2y-2>0, \qquad 2)\ x-2y-2\leq 0.$$

В случае 1 имеем неравенство $x>2(y+1)$ и

$\sqrt{x^2+(y-4)^2}>\sqrt{4y^2+8y+4+y^2-8y+16}=\sqrt{5y^2+20}\geq 2\sqrt{5}$, т.е. $\sqrt{x^2+(y-4)^2}>2\sqrt{5}$, чего быть не может, так как правая часть уравнения равна $2\sqrt{5}$.

Во втором случае $y\geq \dfrac{x-2}{2}\geq 0$.

Тогда первое уравнение системы примет вид $\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-4)^2}=8+x-2y$ или $4x^2-16x+16+y^2+4y(x-2)=0, \quad 4(x-2)^2+y^2+4y(x-2)=0.$ А так как, с другой стороны,

$$4(x-2)^2+y^2+4y(x-2)\geq 4(x-2)^2+\frac{(x-2)^2}{4}+2(x-2)^2\geq 0,$$ то равенство нулю возможно только при $x=2$. Тогда $y=0$.

Ответ: (2;0).

Наша практика подтверждает, что решения заданий по математике из КИМов ЕГЭ на уроках и внеклассных занятиях становятся эффективным средством развития мыслительной деятельности учащихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Денищева Л.О. и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. М.: Интеллект-Центр, 2005.
2. Денищева Л.О. и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. М.: Интеллект-Центр, 2006.
3. Денищева Л.О. и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. М.: Интеллект-Центр, 2007.
4. Денищева Л.О. и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. М.: Интеллект-Центр, 2008.
5. ЕГЭ. 2007. Математика. Тренировочные задания / Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шепелёв В.В. М.: Просвещение: Эксмо, 2007.
6. Эфендиев Э.И., Загиров Н.Ш., Багдуева З.Н. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. Махачкала: ДИПКПК, РЦОИ, 2005.
7. Эфендиев Э.И., Загиров Н.Ш., Багдуева З.Н. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. Махачкала: ДИПКПК, РЦОИ, 2006.

Z. Bagdueva, I. Tchelyabov

ABAUT SOME ASPECTS OF THE SSE IN MACH TEACHING

Abstract: Most of the tasks from the Test Measuring Materials for Math SSE are discussed in the article. These tasks are interesting from the point of methods of teaching

Key words: Unified State Exam in the teaching of mathematics, the intellectual activity.