

УДК 167+168

Егорычев И.Э.

Санкт-Петербургский государственный университет

ПРИРОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО У ПЛАТОНА

I. Yegorytchev

Saint-Petersburg State University

NATURE OF MATHEMATICAL BY PLATO

Аннотация. Теория умозраительных сущностей, порядок и связь которых те же, что порядок и связь вещей, представляется нам столь естественной, потому что она блестяще себя зарекомендовала и продолжает оставаться действенным инструментом познания во многих областях реальности. Стремительный взлёт науки от Коперника до Ньютона – это во многом результат применения математических методов к реальному миру, то есть искусство восхождения от бессистемных и несущественных свойств предметов к усмотрению их скрытых математических сущностей. Но всякая ли классифицирующая схема может быть таким познавательным инструментом? В статье предпринята попытка прояснить данный вопрос.

Ключевые слова: эйдос, сущность, эволюция, математика, теория множеств.

Abstract. The theory of intelligible essences, “order and relations of which are the same as order and relations of things” seems so natural to us, as it is still a very useful cognitive instrument in many domains of reality. Dashing growth of scientific knowledge from Copernicus and up to Newton was a result of application of mathematical methods to real world, i.e. the art of ascending from random and unsubstantial qualities of things to their hidden mathematical essences. But can any classifying scheme be a cognitive tool? This article attempts at clarifying the matter.

Key words: eidos, essence, evolution, mathematics, set theory.

В теореме 7 части 2-й спиновской «Этики» утверждается: «Порядок и связь идей те же, что порядок и связь вещей» [7, с. 293]. Там же приводится и доказательство: «Ибо идея всего, обусловленного какой-либо причиной, зависит от познания причины, следствие которой оно составляет» [7, с. 293]. Отвлечёмся, однако, от действительной “доказательности” такого доказательства и попробуем понять то, насколько естественной представляется нам исходная идея. Хочется даже воскликнуть: «А что тут вообще доказывать? Это же очевидно!». И тем не менее, такая очевидность была бы попросту невозможна без «платоновского жеста» [2, с. 62], когда-то указавшего нам на целый мир того, что подлинно существует, – на мир эйдосов. Аристотелевская теория сущностей есть не что иное, как попытка избавиться от противоречий ту самую теорию *Идей*, в соответствии с которой каждая земная вещь – всего лишь более или менее удачная копия или отражение не подверженного никаким изменениям и существующего вне времени прообраза. Этот мир совершенных *Форм* невидим глазу, но доступен рассудочному умозерцанию – то есть такому типу человеческой практики, которая во времена Платона и носила название математического по преимуществу: «*Ἡ μαθηματικὴ*» означает для греков то, что при рассмотрении сущего и обращении с вещами человек знает заранее: у тел – их

телесность, у растений – растительность, у животных – животность, у человека – человечность. К этому уже известному, т. е. математическому, относятся, наряду с вышеназванным, и числа... Только потому, что число, так сказать, ярче всего бросается в глаза как всегда-уже-известное, будучи самым знакомым из всего математического, математикой стали называть числовое. Но никоим образом существо математики не определяется числом» [8, с. 43]. То, что изучают геометры, и то, о чём они доказывают теоремы, – это, к примеру, *идеи* круга или треугольника. Но лишь поскольку наряду с идеями геометрическими существуют, так сказать, идеи физические – камня, лошади, человека и т. п., – знание о природе также оказывается возможным. И точно так же, как никакой реальный круг никогда не достигнет совершенства умопостигаемого круга, никакая реальная лошадь не способна в совершенстве воплотить собой идею лошади, хоть все вещи и стремятся к этому. Таким образом, всё существующее и развивающееся в этом мире развивается, так или иначе соотнося себя с божественным образцом, и является, тем самым, воплощением своей предзаданной сущности.

Отметим, что доставшаяся в наследство сэру Чарльзу Дарвину таксономия живого, состоятельности которой им было дано радикально новое обоснование, сама является прямым потомком, через Аристотеля, платоновского эссенциализма. Действительно, она есть часть нашего философского наследия, и это вовсе не означает, что такое наследие – всего лишь бесполезная или необоснованная догма. Столь стремительный взлёт современной науки, от Коперника до Ньютона, – это во многом результат применения математических методов к реальному миру, то есть искусство восхождения от бессистемных и несущественных свойств предметов к усмотрению их скрытых *математических* сущностей. В самом деле, закон всемирного тяготения одинако-

во применим к телам любой формы и любого цвета – существенным здесь является только их масса. И точно так же дело обстояло в химии, пришедшей на смену алхимии одновременно с постулированием существования лишь конечного числа неизменяющихся элементов, таких, как углерод, водород, кислород и железо, которые со временем могут образовывать бесчисленные комбинации, но всегда могут быть обнаружены в любой из них именно благодаря своим неизменяющимся сущностным свойствам. Да и сам Аристотель, пытаясь ответить на вопрос о том, что есть сущее, поскольку оно сущее, или что есть всякая вещь не в силу того, что она обладает теми или иными заранее предположенными свойствами, а в силу того, что она просто *есть* [1, с. 119], обращает внимание на то, в каких смыслах о сущем говорится, что оно есть. Для Аристотеля эти способы “сказания” отнюдь не случайны и указывают на некие высшие роды бытия, т. е., опять-таки, на некоторые сущностные аспекты мира.

Итак, теория умозрительных (или математических) сущностей, *порядок и связь которых те же, что порядок и связь вещей*, представляется нам столь естественной, потому что она блестяще себя зарекомендовала и продолжает оставаться действенным инструментом познания во многих областях реальности. Но всякая ли классифицирующая схема может быть таким инструментом? Различаются ли *на самом деле*, так сказать, *сущностно*, холмы и горы, дома и дворцы или, к примеру, виолончель и скрипка? Философами-эмпириками в своё время была разработана теория, призванная различать реальные и номинальные сущности – последние, являясь лишь пустыми именами, или именами имён, “паразитируют” на словах, которые мы употребляем, и к реальной сущности вещи могут иметь отношение лишь случайным образом. В отличие от них, реальные

сущности открываются исследователю в результате тщательного изучения им природы вещей и только после внимательного отделения существенного от несущественного в соответствии с особыми принципами. И, несмотря на имевшие место затруднения с точным определением того, что же это за принципы, обладающие успехами в физике и химии позволяли рассчитывать, что подобные принципы будут со временем обнаружены и в остальных областях реальности, в частности в науке о живых организмах – зоологии.

К моменту выхода в свет поистине революционного труда Дарвина [4] в этой науке скопилось достаточное количество загадочных фактов, которые с точки зрения эссенциализма никак не удавалось объяснить – то здесь, то там обнаруживались некие «промежуточные» существа, обладающие, если так можно выразиться, «более чем одной сущностью». Также иногда оставалось не до конца понятным, какой объединяющий признак следует предпочесть на более высоких этажах классификации: чем, например, теплокровность предпочтительнее плотоядности, а наличие позвоночника – наличия глаз? Всех ли ящериц следует относить к одному виду, или кого-то правильнее выделить в отдельный? Другими словами, какой порядок (и связь) в точности воспроизводит тот, который был задуман природой? Находимые геологами останки вымерших живых существ, с одной стороны, только прибавляли загадок, но, с другой стороны, именно эти многочисленные геологические находки позволили Чарльзу Дарвину сформулировать его ключевую идею: в отличие, скажем, от треугольника, или от атома углерода, который, насколько мы можем судить, всегда имел то строение, которое он имеет сейчас, живые существа изменялись и продолжают меняться с течением времени!

Эволюционная идея Дарвина, несмотря на то, что она находит всё больше и боль-

ше подтверждений в различных областях реальности, всё ещё остаётся трудной для восприятия даже для некоторых специалистов. Слишком глубоко в нас укоренился эссенциалистский способ мышления, и, надо сказать, не без оснований. Математика продолжает давать потрясающе плодотворные результаты, несмотря на то, что имеет дело с математическими объектами – вечными и неизменными сущностями в их максимально возможной чистоте. Вообще говоря, наука, которая, как известно, «научна ровно настолько, насколько много в ней математики», продолжает с успехом «вспарывать» природу по её естественным швам, и для этого, похоже, ей необходим тот или иной категориальный инструментарий, восходящий в итоге к чему-то вроде эссенциализма: в этом сходятся как платоническая, так и аристотелевская точки зрения. Однако понятие мутации, применимое, как казалось вначале, лишь в некоторых отделах биологии, может быть довольно основательно обобщено. В частности, идея примата различия перед тождеством лежит как в основе структуральной лингвистики, так и подавляющего большинства постструктуралистских философских конструкций. Превращение инструмента философии в её предмет становится возможным потому, что язык начинает мыслиться не как нечто привходящее – некая прозрачная субстанция или эпифеномен мышления, а как фундаментальная онтологическая структура, обращение к которой открывает доступ к таким аспектам бытия, которые раньше были недостижимы для философской рефлексии. В качестве одного из таких аспектов обнаруживает себя произвольность языкового знака, на которую впервые наиболее отчётливо стали указывать Витгенштейн и Соссюр (см.: [3; 6]). Важнейшее следствие данного взгляда на язык и на знак вообще состоит в том, что всякий контроль над ними оказывается своего рода насилием над сущим, поскольку такой контроль всег-

да осуществляется кем-то, а не обнаруживается нами в качестве онтологически необходимого свойства мира. Однако это ещё вовсе не означает, что всякое тождество (будь то в форме равенства вещи самой себе или в форме некоего предзаданного единства смысла/ конечного числа смыслов), однажды уличённое в своей онтологической неподлинности, навсегда изгоняется из всех регионов сущего. Напротив, оно прочно обосновывается в той части человеческого сознания, которую Жак Лакан назовёт регистром Воображаемого. Там царит «полный порядок» и конститутивная для этого регистра иллюзия взаимно-однозначного соответствия порядков означающего и означаемого (порядка речи и порядка истины), иллюзия того, что все вещи «по своей природе» имеют те значения, которые они имеют, и что, двигаясь от одних значений к другим, я (хотя бы в принципе) способен достичь истины Реального.

Ален Бадью в своём фундаментальном труде «Бытие и событие» [9], опираясь на аксиоматическую теорию множеств Цермелло-Френкеля, пытается формально обосновать приоритет различия над тождеством. Он утверждает, что математика есть онтология, хоть математикам совсем не обязательно об этом знать – достаточно того, что найдутся философы, которые своей работой обеспечат узнаваемость тех истин о бытии (Бадью называет такую работу философов «подшивкой к бытию»), которые открывают математики, зачастую сами того не подозревая. И одной из таких истин является следующая: бытие есть чистая множественность. И более того: Единого не существует. Посмотрим подробнее то, как можно прийти к этому выводу.

Итак, неформально в «наивной» теории множеств Георга Кантора множество определено как «многое, мыслимое как единое»¹, тогда как формально всякое мно-

¹ Данная словесная формулировка принадлежит философу и математику Бертррану Расселу.

жество строится им следующим образом:

$M = \{x : P(x)\}$, т. е. в одну совокупность мы объединяем все такие объекты, которые обладают некоторым свойством P (о которых сказывается нечто присущее им всем, поэтому это сказываемое называется предикатом, или логическим сказуемым). Понятно, что такая операция есть операция абстрагирования, отвлечения от каких-то других, индивидуальных свойств этих объектов, поскольку в противном случае мы никогда не смогли бы их мыслить как «в некотором отношении» одинаковые (принадлежащие одному множеству). Вообще говоря, на самом непосредственном уровне, уровне восприятия, мир действительно является нам как многое, и операция «счёта за одно» есть Идея, или идеализация. Платон, настаивая на первичности Идеи, тем самым переворачивает всю «наивную» онтологию, строившуюся на очевидности восприятия, и приписывает Идеям наивысший бытийный статус. Таким образом, идея Единого оказывается уже не просто самой бедной абстракцией, а высшим родом Сущего. На языке же теории множеств мы можем утверждать следующее: сортируя вещи по различным совокупностям, мы обращаем наше внимание на то, что свойство «быть множеством» есть также логическое сказуемое, и образуемая по данному свойству совокупность вбирает в себя всякое сущее вообще, включая саму себя в качестве элемента, и в этом смысле является Единым. Другими словами, Единое есть множество всех множеств. И в то же время такой объект внутренне противоречив.

Чтобы показать это, начнём с некоторых определений:

Определение 1. Множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Понятие *мощности*, таким образом, есть обобщение понятия количества, которое

удаётся распространить на бесконечные множества. Действительно, чтобы сравнить число людей в классе с числом стульев, мы можем пересчитать их, а можем попросить каждого занять свой стул. Если в результате не останется ни лишних людей, ни лишних стульев, мы сможем утверждать, что и тех, и других равное количество. Этот вывод основывается на том, что между множеством людей и множеством стульев было установлено взаимно-однозначное соответствие (мы уже сталкивались с этой процедурой выше, когда речь шла об изоморфизме – взаимно-однозначном отображении, сохраняющем операцию).

В случае бесконечных множеств этот способ оказывается единственным внятным способом сравнивать бесконечные множества.

Определение 2. Множество называется *бесконечным*, если оно содержит собственное (не совпадающее со всем множеством) подмножество, равномощное всему множеству.

Определение 3. Мощность множества **B** больше мощности множества **A**, если множества **A** и **B** неравномощны, и **B** содержит подмножество **B₁**, равномощное с **A**.

Теорема 1. Мощность множества всех подмножеств любого непустого множества **M** больше мощности самого множества **M**.

Доказательство¹: Пусть **M** – произвольное непустое множество. Рассмотрим множество **M***, состоящее из всех подмножеств множества **M**. Если **M** содержит элементы *a, b, c, d,...*, то **M*** будет содержать элементы вида $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \dots, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \dots$ и. т. д. Обозначим через **M₁** множество всех одноэлементных подмножеств:

$$M_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \dots\}.$$

Очевидно, что $M_1 \subset M^*$, поскольку между **M** и **M₁** можно установить взаимно-

однозначное соответствие, поставив каждому элементу из **M** подмножество, состоящее из этого элемента: $a \rightarrow \{a\}, b \rightarrow \{b\}, \dots$.

Покажем, что **M** и **M*** неравномощны. Предположим, что между множествами **M** и **M*** можно установить взаимно-однозначное соответствие. При этом каждому элементу из **M** будет соответствовать один и только один элемент из **M***. Это значит, что каждому элементу из **M** будет соответствовать некоторое подмножество множества **M**:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \{\dots\} & \{\dots\} & \{\dots\} & \dots \end{array}$$

В верхней строке мы расположили все элементы из **M**, а в нижней – все подмножества **M**, т. е. все элементы из **M***. При этом для каждого элемента множества **M** возможны два случая: этот элемент либо содержится в поставленном ему в соответствие подмножестве (назовём такой элемент *включённым*), либо не содержится (такой элемент назовём *невключённым*). Поскольку по предположению в нижней строке расположены все подмножества **M**, то там находится и пустое множество. Соответствующий ему элемент будет неключённым (обозначим его через *n*). В той же строке находится и все множество **M**, и соответствующий ему элемент (обозначим его через *m*) будет включённым. Внесём в нашу схему соответствующие дополнения:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & \dots & n & m & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \{\dots\} & \{\dots\} & \{\dots\} & \dots & \emptyset & M & \dots \end{array}$$

Рассмотрим теперь множество **S**, состоящее из всех неключённых элементов. Очевидно, что **S** непусто, так как $n \in S$.

¹ Доказательства приводятся по: [5].

Множество $S \subset M$, причём S не совпадает с M , так как в M есть элемент t , который не входит в S . Поскольку S – подмножество множества M , то оно поставлено в соответствие некоторому элементу p из M . Пусть p – включённый элемент. Тогда он по определению лежит в S , но это невозможно, так как S состоит только из невключённых элементов. Пусть p – невключённый элемент. Тогда он не лежит в S , что также невозможно, поскольку в S лежат все невключённые элементы! Таким образом, наше предположение о том, что M и M^* равноможны, неверно.

Тем самым, мы показали, что множества M и M^* неравноможны и множество M^* содержит подмножество, равноможное с M . Следовательно, мощность множества M^* больше мощности множества M .

Теорема 2 (антиномия Кантора). Не существует множества всех множеств.

Доказательство: Предположим, что U – множество всех множеств, и U^* – множество всех подмножеств U . Тогда (по только что доказанной Теореме 1) U^* имеет мощность большую, чем U , что невозможно, так как U по предположению содержит все (!) множества [5].

Таким образом, эйдос Единого не удаётся непротиворечиво помыслить не только

в самом платонизме, но и в математике, которую так горячо отстаивал сам Платон. То, что при попытках непротиворечиво помыслить *Единое*, мы неизбежно сталкиваемся со значительными трудностями, Платон показал в своём диалоге «Парменид». Однако только существенным образом разработанный язык теории множеств позволяет определить на нём *Единое* как множество всех множеств и строго формально доказать его невозможность (немыслимость).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Аристотель. Сочинения в 4-х томах. Т. 1. – М., 1976. – 550 с.
2. Бадью А. Манифест философии. – СПб., 2003. – 184 с.
3. Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. 1. – М., 1994. – 612 с.
4. Дарвин Ч. Происхождение видов путём естественного отбора, или Сохранение благоприятных рас в борьбе за жизнь. – СПб., 2001. – 568 с.
5. Дорофеева А.В. Высшая математика. – М., 2003. – 384 с.
6. Соссюр Ф. Курс общей лингвистики. – М., 2004. – 256 с.
7. Спиноза Б. Этика// Сочинения в 2-х томах. Т. 2. – СПб., 1999. – 489 с.
8. Хайдеггер М. Время картины мира// Время и бытие. – М., 1993. – 447 с.
9. Badiou A. Being and Event. – N.Y.: Continuum, 2007. – 526 p.