УДК 517.518.452(456)

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

А.В. Баскаков, Н.П. Волков, М.В. Сучков

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Рассмотрена задача о представлении непрерывных функций операторами суммирования рядов Фурье с помощью треугольных матриц вида $\mathsf{L}_n(f,\Lambda,x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$

Доказана теорема, обобщающая теорему К.В. Ермакова о равномерной сходимости этих операторов при некоторых ограничивающих условиях на элементы матрицы Λ.

Ключевые слова: Ряды Фурье, равномерная сходимость, операторы суммирования, треугольная матрица.

Рассмотрим функцию $f\in L_{2\pi}$, её ряд Фурье $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$.

Введем обозначения:

$$\phi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),$$

$$D_k(t)=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}},\quad F_k(t)=\sum_{\nu=0}^{k}D_\nu(t)=\frac{\sin^2(k+\frac{1}{2})t}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

Для треугольной матрицы $\Lambda=(\lambda_{n,k})_{n,k=1}^{\infty,n}$ (будем также всегда в дальнейшем полагать $\lambda_{n,0}=1$ при $n=1,2,\ldots$ и $\lambda_{n,k}=0$ при $k>n$) положим

$$\mathsf{L}_n(f,\Lambda,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$\Delta\lambda_{n,k}=\lambda_{n,k}-\lambda_{n,k+1},\quad \Delta^2\lambda_{n,k}=\Delta\lambda_{n,k}-\Delta\lambda_{n,k+1},\quad \forall k,n\in \text{Ґ}.$$

В работе Г.А.Фомина [2] было показано, что если треугольная матрица Λ удовлетворяет условию

$$n\sum_{k=0}^{n}(\Delta\lambda_{n,k})^2\le C \tag{1}$$

при некотором $C>0$, а функция $f\in C_{2\pi}$, то последовательность линейных операторов $\{\mathsf{L}_n(f,\Lambda,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$. С.Б.Стечкин в своем докладе в МГУ в 1965г. обобщил условие Г.А.Фомина (1) и показал, что последовательность

$\{\mathsf{L}_n(f,\Lambda,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$, если для матрицы Λ выполнено условие $n^{p-1}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_{n,k}\right|^p \le C,\ n=1,2,...$ для некоторых $C>0$ и $p>1$. В.А.Баскаковым [3] был определен точный порядок роста величин $A_n(\alpha)=\sup_{\Lambda\in\Lambda^*}\ \sup_{f\in Lip\alpha}\left\|\mathsf{L}_n(f,\Lambda,x)-f(x)\right\|_C,\ n\to\infty,$ где Λ^* - класс матриц, удовлетворяющих условию (1) с закрепленной константой C. В той же работе получены подробные результаты для класса H_ω.

П.В.Ермаков [4] доказал, что линейные методы, удовлетворяющие при некоторых постоянных C_1,C_2 условиям

$$n^{\frac{3}{2}}\left|\Delta\lambda_{n,0}\right|\le C_1,\quad n^3\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_{n,k}\right|\le C_2 \tag{2}$$

обладают, вообще говоря, лучшими свойствами аппроксимации по сравнению с методами, соответствующими условию Г.А.Фомина (1).

Теорема А. (П.В.Ермаков). Пусть Λ - треугольная матрица, удовлетворяющая условиям (2). Тогда для любой функции $f(x)\in C_{2\pi}$ последовательность $\{\mathsf{L}_n(f,\Lambda,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$.

В настоящей статье приводятся результаты, обобщающие теорему П.В.Ермакова.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1. Если матрица Λ удовлетворяет условиям

$$\left|\Delta\lambda_{n,0}\right|\le C_1\frac{1}{n^{2-\frac{1}{p}}},\quad n=1,2,..., \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_{n,k}\right|^p \le C_2\frac{1}{n^{2p-1}},\quad n=1,2,... \tag{5}$$

для некоторых постоянных C_1,C_2 и $p>2$, то для любого $p\in(1,2)$ найдутся постоянные C_{1p},C_{2p}, такие, что условия (4) и (5) будут выполняться при $p\in(1,2)$ с заменой постоянных C_1,C_2 на C_{1p},C_{2p}, соответственно.

Доказательство этой леммы основывается на неравенстве Гельдера.

Теорема 1. Пусть матрица Λ удовлетворяет условиям (4) и (5) при некоторых константах $p>1,\ C_1,\ C_2$, и функция $f(x)\in C_{2\pi}$. Тогда последовательность $\{\mathsf{L}_n(f,\Lambda,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$.

Доказательство. Пусть $p\in(1,2]$, и операторы

$$\mathrm{L}_n(f,\Lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)V_n(t)dt \tag{6}$$

определяются ядрами:

$$V_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\cos kt \tag{7}$$

Применяя дважды преобразования Абеля к равенству (7), получаем

$$V_n(t)=\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\,\frac{\sin^2(k+1)\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\;+\;\Delta\lambda_{n,n-1}\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\;+\;\lambda_{n,n}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Из условий (4) и (5) следует, что для некоторого числа C_3 :

$$n\left|\Delta\lambda_{n,n-1}\right|\le C_3,\quad n=1,2,...;\quad \left|\lambda_{n,n}\right|\ln n=o(1),\ n\to\infty. \tag{8}$$

Оценим нормы $\left\|\mathrm{L}_n\right\|$:

$$\left\|\mathrm{L}_n\right\|\le\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|V_n(t)\right|dt\le\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\,\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\Delta\lambda_{n,n-1}\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\lambda_{n,n}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt.$$

Применяя условия (8), получаем

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{L}_n\right\|&\le C+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\,\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt=\\&=C+\frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{n}}+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Big)\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\,\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt\overset{def}{=}C+J_1+J_2.\end{aligned} \tag{9}$$

Первый интеграл J_1 в (9) можно оценить:

$$J_1 \le Cn\sum_{k=0}^{n-2}\left|\Delta^2\lambda_{n,k}\right| \le Cn\left\{\sum_{k=0}^{n-2}\left|\Delta^2\lambda_{n,k}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{k=1}^{n-2}1\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$
$$\le C\cdot n\cdot n^{\frac{1-2p}{p}}\cdot n^{\frac{1}{q}} = C\cdot n^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} = C,\quad q=\frac{p}{p-1}, \tag{10}$$

а интеграл J_2:

$$J_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}(1-\cos(k+1)t)\right|dt \le J_{2,1}+J_{2,2}, \tag{11}$$

где

$$J_{2,1} = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\right|dt,\quad J_{2,2} = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\cos(k+1)t\right|dt,$$

Так как сумма $\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k} = \Delta\lambda_{n,0}-\Delta\lambda_{n,n-1}$, то значение $J_{2,1}$ оценивается:

$$J_{2,1} \le \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\right|\frac{dt}{t^2} \le C\cdot n\cdot\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\right| \le C. \tag{12}$$

Применяя теперь к интегралу $J_{2,2}$ неравенства Гельдера и Хаусдорфа-Юнга (см.[1], с. 211), получим и для него оценку

$$J_{2,2} \le \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\cos(k+1)t\right|\frac{dt}{t^2} \le$$
$$\le \frac{2}{\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_{n,k}\cos(k+1)t\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \tag{13}$$
$$\le C\left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\right)^{\frac{1}{p}}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\left|\Delta^2\lambda_{n,k}\right|^q\right|^{\frac{1}{q}} \le C$$

Из соотношений (9)-(13) следует, что нормы $\|L_n\|$ ограничены в совокупности, а из условия (5) - что для любого k предел $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_{n,k}=1$.

Теперь сформулированная нами теорема вытекает из известной теоремы Никольского (см. [1], с. 476).

Если $p>2$, то с помощью Леммы 1 сводим доказательство к доказанному случаю $p\in(1,2]$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема А вытекает из доказанной Теоремы 1 при значении параметра $p=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М., 1961.– 700 с.
2. *Фомин Г.А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье. – Математический сборник, 1964, 65, №1, с.144-152.
3. *Баскаков В.А.* О порядке приближения непрерывных функций некоторыми линейными методами суммирования рядов Фурье. – Изв. вузов. Математика, 1969, №7, с.20-27.
4. *Ермаков П.В.* О сходимости некоторых линейных операторов к функциям класса Z_{α} . – Математические заметки, 1977, т.22, №4, с.601-607.

ABOUT THE LINEAR METHOD OF SUMMATION OF FOURIER SERIES

A. Baskakov, N. Volkov, M. Suchkov

National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. The problem of the representation of continuous functions of Fourier series operators is considered with triangular matrices like

$$L_n(f,\Lambda,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

The theorem, which generalizes Theorem K.V.Ermakov on the uniform convergence of these operators under certain restrictive conditions on the elements of the matrix Λ is proved.

Key words: Fourier series, uniform convergence, summing operators, triangular matrices.