

УДК.533.72.

## ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗОПОДОБНОГО ОБЛАКА С НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ В ОДНОРОДНОМ ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

А.Н. Голов, М.Н. Зудина

Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а

*Аннотация.* Рассмотрено выражение плотности потока вещества в нестационарной газоподобной системе многих частиц с учётом непотенциального слагаемого. Получены аналитические выражения компонент вихря плотности потока вещества. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

*Ключевые слова:* кинетика, вихревые движения, газоподобная среда.

1. Целью данной работы является теоретическое исследование закономерностей вихревых движений в нестационарных газоподобных системах большого числа частиц  $N$  во внешнем поле. Подобные явления широко распространены в природе, а также происходят в ряде технических процессов. Ранее эти явления преимущественно рассматривались в феноменологической теории сплошных сред [1, 3, 7], преимущественно для несжимаемых (а иногда и невязких) жидкостей. Теоретическое рассмотрение вихревых течений в газах также, обычно, исходит из уравнений динамики сплошной среды, не углубляясь в её молекулярную структуру ([2] и др.). Поэтому остаётся актуальным исследование таких движений на основе микроскопической теории. Предлагаемая ниже модель применима, как к облакам атомарно-молекулярного состава, так и к системам более крупных дисперсных частиц. Эта модель распространяется на нестационарные системы с переменной плотностью.

Для анализа вихревых движений была выбрана микроскопическая модель однородных бесструктурных слабо взаимодействующих частиц массой  $m$  в однородном постоянном поле, рассмотренная в [4, 5, 6]. Система принята неограниченной (т. е., физически достаточно большой, чтобы не рассматривать граничные условия), и свободно расширяется в вакууме.  $OZ$  выбрано в направлении действия силы поля  $f$ , которая принята одной и той же для всех частиц. Здесь мы рассмотрим более общий случай, чем в работе [6], а именно, допускаем начальное движение сгустка частиц, образующих данную систему с постоянной скоростью  $v_0$ , направленной по той же оси  $Z$ . Понятно, что такой же эффект будет иметь место при наблюдении облака в движущейся СО.

2. Известно ([8, 10] и др.), что, зная статистическую функцию распределения системы, можем описать её, в рамках кинетической теории, квазинепрерывной средой с некоторой эффективной плотностью. Для случая, когда частицы находятся в вакууме и выполняются принятые условия, функция распределения имеет вид:

$$F = A \cdot \exp \left\{ -k_1 \cdot p_{1\alpha} p_{1\alpha} + k_3 \cdot p_{1\alpha} q_{1\alpha} - b \cdot q_{1\alpha} q_{1\alpha} - k_1 \cdot p_{13} p_{13} - k_2 \cdot p_{13} + k_3 \cdot p_{13} q_{13} - k_4 \cdot q_{13} - b \cdot q_{13} q_{13} - k_6 \right\} \quad (1)$$

где:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= au; \\
 k_2 &= (2am + ct)v_0 - 2aft - \frac{3cft^2}{2m} - \frac{bft^3}{m^2}; \\
 k_3 &= c + \frac{2bt}{m}; \\
 k_4 &= c(ft - mv_0) = \frac{bft^2}{m}; \\
 k_6 &= amv_0(mv_0 - 2ft) + ft^2\left(af - \frac{cv_0}{2}\right) + \frac{f^2t^3}{2m}\left(c + \frac{bt}{2m}\right); \\
 u &= 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}; \\
 w &= 1 - \frac{c^2}{4ab}; \\
 A &= \left(\sqrt{abw} / \pi\right)^{3N}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

$a, b, c$  – константы задачи (вводимые из соображений размерности), прочие обозначения – стандартные. В (1) и далее приняты условные обозначения тензорного анализа: повторяющиеся значки означают сумму по всем их значениям, причём латинские значки нумеруют частицы, а греческие – координаты одной частицы. В (1)  $\alpha = 1, 2$ , а третья координата (и импульс) выделена особо.

Формула (1) получена строго из решения уравнения Лиувилля – Гиббса методом интегралов однородного лиувиллиана [4]. Она является обобщением формул, приведённых в [4] и [5] на случай с начальным движением системы. Используя (1), найдём эффективную плотность среды, которая зависит от времени и имеет вид:

$$\rho = Nm \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ -\beta \cdot \left[ x^2 + y^2 + \left( z + v_0 t - \frac{ft^2}{2m} \right)^2 \right] \right\}, \tag{3}$$

где  $x, y, z$  – координаты в физическом пространстве,  $t$  – время, и обозначено:  $\beta = bw/u$ .

Векторы  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}_0$  направлены вдоль  $\mathbf{OZ}$ , но могут иметь разный знак. Формула (3) есть обобщение соответствующей формулы, использованной в [7].

Используя выражение (3), найдём компоненты вектора плотности потока вещества:

$$j_x = \frac{k_3 x}{2amu} \rho; \tag{4}$$

$$j_y = \frac{k_3 y}{2amu} \rho; \tag{5}$$

$$j_z = \frac{(k_3 z - k_2)}{2amu} \rho. \quad (6)$$

Выражения  $k_2$ ,  $k_3$  и  $u$  – см. в (2). Отличие (4) – (6) от соответствующих формул, использованных в [6] и [5] в выражениях плотности  $\rho$  и величины  $k_2$ . Легко усмотреть, что выражения (4) и (5) пропорциональны градиенту плотности (3) (с зависящим от времени коэффициентом). При  $f = 0$  и  $v_0 = 0$  к такому же виду приводится и  $j_z$ . Т. о., в отсутствие внешнего поля и начального движения системы вектор  $\mathbf{j}$  – потенциальный, и поле течений среды – безвихревое. При наличии внешнего поля и начальной скорости выражение (6) содержит дополнительно конвективный член, пропорциональный плотности и не являющийся потенциальным. Вследствие этого и возникают вихревые течения среды. Заметим, однако, что в сходных задачах наличия поля или начального движения недостаточно для образования вихрей. Например, в модели с одномерным движением, когда плотность не зависит от координат, ортогональных оси движения, вихри не возникают. Т. о., для образования вихрей необходимо: 1) наличие конвективного члена в векторе  $\mathbf{j}$ , и 2) неоднородность плотности с зависимостью от не менее, чем двух координат. Из анализа выражений  $k_2$  и  $k_3$  видим, что, когда  $f$  и  $v_0$  не малы, в некоторые промежутки времени и в некоторых областях пространства конвективный поток может превосходить потенциальный. Указанные потоки могут быть коллинеарны или антиколлинеарны. Заметим, что в гидродинамике и газодинамике обычно пренебрегают неконвективной (диффузионной) частью потока вещества. В начале же развития феноменологической теории переноса рассматривались только потоки, пропорциональные градиентам. Включение в теорию переноса конвективных потоков произошло уже на следующем этапе [9], и исходило из макроскопического рассмотрения среды в движущейся системе отсчёта.

3. Находя частные производные по координатам от (4) – (6), по стандартным формулам получим проекции вихря плотности потока вещества:

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{j} = \frac{\beta y \cdot \left[ -k_3 (v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]}{amu} \rho; \quad (7)$$

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{j} = -\frac{\beta x \cdot \left[ -k_3 (v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]}{amu} \rho; \quad (8)$$

$$\mathbf{rot}_z \mathbf{j} = 0. \quad (9)$$

В частном случае, при  $v_0 = 0$ , формулы (7) и (8) переходят в соответствующие формулы, приведённые в [6] (плотность также приводится к выражению, использованному в [6]). При  $f = 0$  имеем (при соответствующем выражении плотности):

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{j} = -2\beta y \cdot \rho v_0; \quad (10)$$

$$\text{rot}_y \mathbf{j} = 2\beta x \cdot \rho v_0; \quad (11)$$

Отсюда видно, что вихревое движение в системе может возникать и в отсутствии поля вследствие ненулевой скорости  $v_0$ . В общем случае вихри создаются как внешним полем, так и начальным движением системы. В зависимости от направления векторов  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}_0$  вихреобразование либо усиливается, либо частично компенсируется. Т. о., для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе её эволюции.

Из найденных выражений следует: 1) вихрь плотности потока. лежит в плоскости, ортогональной направлению поля и начальной скорости; 2) его проекции – нечётные функции координат  $x$ ,  $y$  и равны нулю на  $OZ$  при любом  $t$ ; 3) в момент включения поля ( $t = 0$ ) вихревые течения создаются только начальным движением; 4) при  $t \rightarrow \infty$  вихревые течения асимптотически аннулируются (совместно с предыдущим это приводит к существованию максимума вихревых движений при конечном  $t > 0$ ); 5) При  $x, y \rightarrow \pm \infty$  вихревые течения также асимптотически аннулируются (совместно со свойством 2 это означает наличие экстремума вихря при конечных  $x, y > 0$ ); 6) в отсутствие внешнего поля и начального движения все проекции  $\text{rot } \mathbf{j}$  равны нулю, вихри не возникают; 7) экстремум вихря смещается по  $OZ$ , причём при разнонаправленных векторах  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}_0$  направление смещения изменяется. Асимптотическое затухание вихревых движений со временем есть результат убывания плотности (3) вследствие расширения системы.

4. На рис. 1 и 2 дано графическое представление пространственно-временных зависимостей вихревого движения системы. При построении графиков из соображений наилучшей наглядности были приняты следующие значения констант и параметров задачи, входящих в формулы (7) и (8): ( $a=1, b=1, c=1, m=1, f=2, N=1, v_0=1/2, w=3/4$ ). Такой выбор не изменяет основных закономерностей хода кривых, определяя лишь выбор масштабов и способ обезразмеривания аргументов. Направление  $v_0$  принято противоположно  $f$ . Для примера приведены графики компоненты (8), для компоненты (7) они имеют сходный вид. В приводимых графиках фиксированы значения ( $x=1, y=1$ ) (в безразмерных переменных), т. к. зависимость от этих переменных достаточно прозрачна из вида функции. Представлены профиль компоненты вихря по выделенной оси  $Z$  в разные моменты времени и зависимость её от времени в точках с разными значениями координаты  $z$ .

Из рис. 1 видно, что вихрь, «расплываясь» в пространстве вследствие расширения системы, одновременно дрейфует вследствие начальной скорости и действующей силы.

5. Более наглядное представление о пространственно-временных зависимостях вихревого движения системы даёт модуль вихря. Для графического представления удобно взять квадрат модуля, образуемый из выражений (7) и (8).

$$R^2 = \frac{\beta^2 (x^2 + y^2) \cdot \left[ -k_3 (v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]^2}{(atu)^2} \rho^2. \quad (12)$$

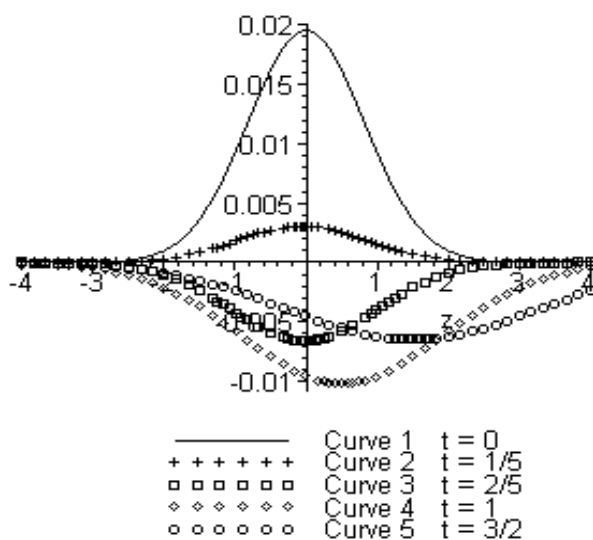


Рис. 1. Профиль  $\text{rot}_y \mathbf{j}$  по  $OZ$  в указанные моменты безразмерного времени.

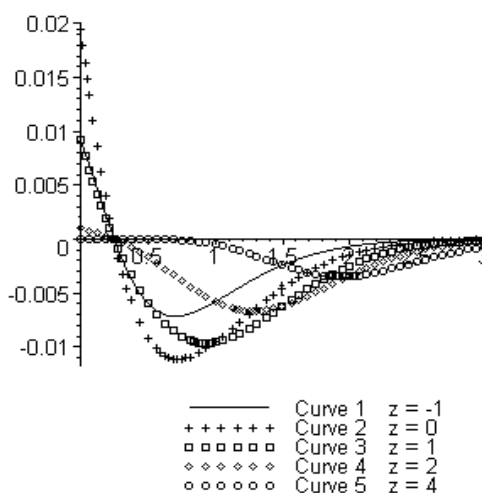
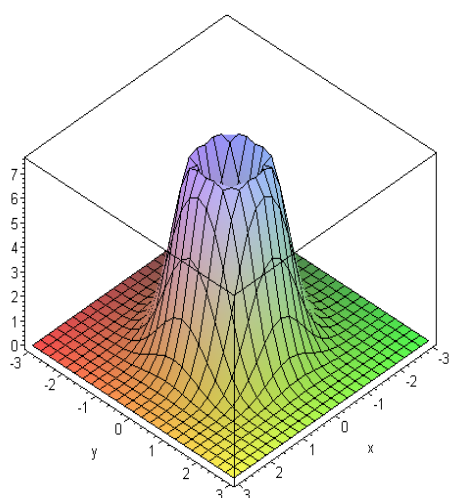
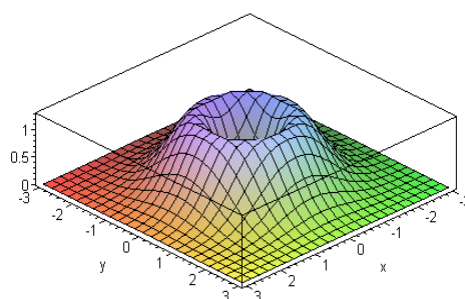


Рис. 2. Зависимость  $Y$ -проекции вихря от времени при различном  $z$ .

На рис. 3 приведены 3-мерные графики этой функции, симметричной относительно  $OZ$ . Значения констант и параметров приняты, как и выше (кроме  $f=1$  и  $v_0=1$ ). Изображён профиль функции в плоскости  $XY$  при фиксированном  $z = 0$  в два момента: 3а) –  $t = 0$ , 3б) –  $t = 1/2$ . Значения функции для удобства изображения умножены на 1000. Из сравнения 3а) и 3б) видно, что вихрь имеет осесимметричную структуру с нулевым минимумом на  $OZ$  и, с течением времени, расплывается при понижении максимума. При противоположно направленных векторах  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{f}$  амплитуда максимума может изменяться со временем немонотонно (см. рис. 1).



а)  $t=0$ .



б)  $t=1/2$

Рис. 3. Типичные 3-мерные графики квадрата модуля вихря ( $R^2 \cdot 10^3$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеевко, С.В., Куйбин, П.А., Окулов, В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей/С.В. Алексеевко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003 г. - 504 с.
2. *Белоцерковский, О.М., Андрущенко, В.А., Шевелев, Ю.Д.* Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере/О.М.Белоцерковский, В.А. Андрущенко, Ю.Д. Шевелев. РФФИ. 2000 г.
3. *Вилля, Г.* Теория вихрей/Г. Вилля. - Л. – М.: ОНТИ, 1936 г. - 266 с.
4. *Голов, А.Н., Яламов, Ю.И.* Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем/ А.Н. Голов, Ю.И. Яламов. - М.: изд. МГОУ. 2011, - 230 с.
5. *Голов, А.Н., Харитонов, А.П.* Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле/А. Н. Голов, А. П. Харитонов//Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», - 2008, - №3–4, - с. 12 – 21.
6. *Голов, А.Н., Зудина, М.Н.* Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле/ А.Н. Голов, М.Н. Зудина.//Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», - 2012. - № 1, - с. 39 – 43.
7. *Гольдштик, М.А./М.А. Гольдштик.* Вихревые потоки. – Новосибирск: Наука, 1981, - 366 с.
8. *Гуров, К.П.* Основания кинетической теории/К.П. Гуров. - М.: «Наука», 1966.- 351 с.
9. *Де Грот, С.Р. и Мазур, П.* Неравновесная термодинамика/ С. Р. Де Грот, П. Мазур. - М.: «Мир», 1964. - 510 с.
10. *Куни, Ф.М.* Статистическая физика и термодинамика/Ф. М. Куни. - М.:«Наука», 1981- 351с.

THE VORTEX MOTION OF THE GAS-LIKED CLOUDS  
WITH A INITIAL VELOCITY IN THE CONSTANT HOMOGENEOUS FIELD

A. Golov, M. Zudina

Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

*Abstract.* The formula of the density of the matter flow in the non-stationary gas-liked system of many particles with regard for the non-potential term is considered. The analytical formulae of the components of the curl of the density of the matter flow are obtained. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

*Key words:* kinetics, vortex motion, gas-liked medium.

УДК 533.9.01

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЫ ЗЕМЛИ  
С УЧЕТОМ ДАННЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

А.С. Рабинович, С.Ю. Абакумов

Московский государственный университет приборостроения и информатики  
107996, Москва, ул. Стромынка, 20

*Аннотация.* В статье проводится исследование областей E и F ионосферы Земли. Ввиду того, что хорошо известная модель стандартной атмосферы становится неудовлетворительной на высотах, превышающих 150 км от поверхности Земли, предлагается новая модель верхней ионосферы. В ней учитываются сильные электрические поля в ионосфере Земли, которые описываются в рамках нелинейного обобщения уравнений Максвелла на основе теории Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией. Показывается, что предложенная нелинейная модель находится в хорошем согласии с экспериментальными данными для областей E и F ионосферы.

*Ключевые слова:* области E и F ионосферы Земли, равновесное состояние ионосферы, нелинейная модель верхней ионосферы, сильные электрические поля, распределение плотности в верхней ионосфере.

Целью данной работы является описание распределения плотности в слоях E и F ионосферы. Нижняя граница слоя E располагается на высоте 90 – 100 км, а верхняя на высоте 130 – 140 км. Выше этого слоя располагается слой F, простирающийся до высот более 1000 км [1]. Для исследования рассматриваемых слоев применим математическую модель, описывающую их равновесное состояние под действием давления и гравитационных и электрических сил [2]:

$$\frac{dp}{dr} + g \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \rho - \Theta E = 0, \quad (1)$$