

УДК 551.46

**Кузнецов К.И.<sup>1</sup>, Пелиновский Е.Н.<sup>1</sup>, Куркин А.А.<sup>1</sup>, Зайцев А.И.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Нижегородский государственный технический университет  
им. Р.Е.Алексеева (г. Нижний Новгород)

<sup>2</sup>Специальное конструкторское бюро средств автоматизации  
морских исследований ДВО РАН (г. Южно-Сахалинск)

## **ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ВАРИАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ НА МОРСКОМ ДНЕ**

**K. Kuznetsov<sup>1</sup>, E. Pelinovsky<sup>1</sup>, A. Kurkin<sup>1</sup>, A. Zaytsev<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University

<sup>2</sup>Special Research Bureau for Automation of Marine Research, Far Eastern Branch,  
Russian Academy of Sciences, Yuzhno-Sakhalinsk

### **RECOVERY OF SURFACE WAVES BY THE MEASUREMENTS OF PRESSURE VARIATIONS AT THE SEABED**

*Аннотация.* Исследуется возможность восстановления параметров ветровых волн по измерениям донного давления. В рамках слабо-дисперсионной полно-нелинейной теории длинных волн (так называемой системы Железняк-Пелиновского) и предположении о движении волны с постоянной скоростью, получена явная приближенная формула для однозначной связи между вариациями давления и смещения водной поверхности. Она включает нелинейные и дисперсионные поправки к гидростатической формуле, получаемой из нелинейной теории мелкой воды. Выполнены количественные расчеты восстановления параметров волны по показаниям донного датчика. Отмечается, что для условий Охотского моря негидростатические поправки могут достигать 50%.

*Ключевые слова:* система Железняк-Пелиновского, ветровые волны, придонное давление, Охотское море, датчик придонного давления.

*Abstract.* We study the possibility of recovering the parameters of wind waves by the measurements of the bottom pressure sensor. In the framework of a weakly-dispersive fully nonlinear theory of long waves (so-called Zheleznyak–Pelinovsky model) and the assumption of a wave moving at a constant speed, we have derived an explicit approximate formula for the one-point relation between the pressure variation and water surface displacement. It includes nonlinear and dispersive corrections to the hydrostatic equation obtained from the nonlinear theory of shallow water. We have performed quantitative calculations of recovery parameters of the wave according to the measurements of the bottom sensor. It is noted that for the conditions of the Sea of Okhotsk non-hydrostatic corrections may reach 50%.

*Key words:* Zheleznyak–Pelinovsky model, wind waves, bottom pressure, Sea of Okhotsk, bottom pressure sensor.

Распространенным методом измерения морских волн становится использование измерителей давления под водой или на морском дне. В частности, так работает система американская система буев DART, предназначенная для регистрации цунами в открытом океане [9]. Волны цунами являются достаточно длинными, так что вызываемое ими давление определяется известными формулами гидростатики. Учитывая к тому же, что такие буи установлены на больших глубинах, где ветровые волны уже не чувствуются, то задача восстановления смещения морской поверхности по вариациям придонного давления не вызывает особых затруднений. Если же датчики давления используются в мелком море, или при относительно небольшом погружении в воду, то они регистрируют колебания давления, связанные с волнами зыби и ветровыми волнами. Эти волны уже не являются длинными, так что давление в них не описывается гидростатической формулой. Такая ситуация, в частности, реализуется в условиях Охотского моря, где

Институтом морской геологии и геофизики ДВО РАН [5] и Специальным конструкторским бюро средств автоматизации морских исследований ДВО РАН [3] развернута система донных датчиков на глубинах от 10 до 20 м.

Восстановление колебаний морской поверхности, в частности волн зыби и ветровых волн, по данным регистраторов давления в общем случае является непростой задачей. Наиболее популярна в инженерной практике линейная теория волн на воде, определяющая связь между колебаниями придонного давления и морской поверхности [4; 8; 17; 18; 21]. Однако измерения показывают, что ошибка в предсказаниях параметров ветровых волн по данным регистраторов давления может достигать почти 20% [10]. Имеющаяся разница обусловлена влиянием нелинейности морских волн, которая не учитывается в рамках линейной теории потенциального движения жидкости. Совсем недавно начались исследования этой проблемы с позиций полнонелинейной потенциальной теории волн на воде [11-15; 20]. Получаемые в теории интегральные уравнения весьма громоздкие и трудны для практического использования. Начаты также экспериментальные исследования связи между полем давления и морскими волнами в лотке [20].

В настоящей работе задача восстановления колебаний морской поверхности по данным регистратора давления решается в рамках опубликованных слабо дисперсионных обобщений нелинейной теории мелкой воды [2; 6; 7; 16]. В их числе – основные уравнения негидростатической модели Железняк-Пелиновского и выражение для давления в толще воды, методика восстановления колебаний уровня моря по данным донных регистраторов. На их основе получены и суммированы результаты расчетов для условий Охотского моря.

### Слабодисперсионная модель нелинейных морских волн в бассейне произвольной глубины

В настоящее время существует много разновидностей слабодисперсионных обобщений нелинейной теории мелкой воды. Здесь

мы воспользуемся так называемой системой уравнений Железняк-Пелиновского для волн в бассейне переменной глубины [2].

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}[(h + \eta)\bar{u}] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} + g\nabla\eta = \bar{D}\{\eta, u', x\}, \quad (2)$$

где  $\eta(x, y, t)$  – смещение водной поверхности,  $\mathbf{u}(x, y, t)$  – двух-компонентный вектор усредненной по глубине скорости течения,  $h(x, y)$  – невозмущенная глубина бассейна,  $g$  – ускорение силы тяжести, и  $\bar{D}$  – функционал, определяющий влияние малой дисперсии

$$\bar{D} = \frac{1}{3(h + \eta)} \nabla \left[ (h + \eta)^3 R + \frac{(h + \eta)^2}{2} Q \right] - \nabla h \left[ \frac{h + \eta}{2} R + Q \right], \quad (3)$$

$$R = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{u} + (\bar{u}\nabla) \operatorname{div} \bar{u} - (\operatorname{div} \bar{u})^2, \quad (4)$$

$$Q = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \nabla h + (\bar{u}\nabla)(\bar{u}\nabla h). \quad (5)$$

Как уже отмечалось в [6], форма записи слабодисперсионных систем (1) – (2), точнее, выражения для функционала  $\bar{D}$ , имеет важное значение при конструировании эффективных численных алгоритмов. Так, уравнения Железняк-Пелиновского более удобны для численной реализации, поскольку не содержат вторых производных по времени.

Запишем также выражение для поля давления на любой глубине под поверхностью, получаемого в рамках данной модели [1; 2]

$$p = p_{\text{атм}} + \rho g(\eta - z) + \frac{\rho}{2} [z^2 + 2h(z - \eta) - \eta^2] R - \rho(\eta - z) Q, \quad (6)$$

где  $\rho$  – плотность воды, вертикальная координата  $z$  направлена вверх. Два последних слагаемых в (6) описывают влияние нелинейной дисперсии на поле давления. В случае бассейна постоянной глубины последнее слагаемое в (6) отсутствует. Приведем здесь же выражение для давления на дне, которое обычно и меряется большинством донных регистраторов

$$p = p_{atm} + \rho g(\eta + h) - \frac{\rho}{2}[h^2 + 2h\eta + \eta^2]R - \rho(\eta + h)Q. \quad (7)$$

Удобно измерять давление в терминах эффективного смещения

$$\xi = \eta - \frac{1}{2g}[h^2 + 2h\eta + \eta^2]R - \frac{1}{g}(\eta + h)Q, \quad (8)$$

так что

$$p(x, y, z = -h, t) = p_{atm} + \rho gh + \rho g\xi(x, y, t). \quad (9)$$

Эти уравнения являются исходными для решения задачи о восстановлении колебаний свободной поверхности по данным регистраторов давления.

### Связь колебаний водной поверхности с вариациями давления

В измерениях с использованием донных регистраторов давления из формулы (9) легко вычислить колебания эффективного смещения  $\xi(x, y, t)$ . Она совпадает с реальными колебаниями морской поверхности только при условии пренебрежения негидростатических добавок в (8), что справедливо только для очень длинных волн. В общем же случае возникает задача нахождения неизвестной функции  $\eta(x, y, t)$  по известной функции  $\xi(x, y, t)$ . Наш подход использует то обстоятельство, что при выводе слабодисперсионной модели нелинейных волн на воде использовалась малость дисперсии, то есть функционала  $\bar{D}$ , что автоматически ведет к малости  $R$  и  $Q$ . Это означает, что негидростатические поправки к давлению в (7) и (8) должны быть малы. Но тогда в малых слагаемых возможно отождествление функций  $\eta(x, y, t)$  и  $\xi(x, y, t)$ . В результате формула (8) может быть обращена

$$\eta \approx \xi + \frac{1}{2g}[h^2 + 2h\xi + \xi^2]R + \frac{1}{g}(h + \xi)Q. \quad (10)$$

Такое же приближение необходимо сделать в функциях  $R$  и  $Q$ . Но обе функции зависят от поля скоростей, а не поля смещения – смотри (4) и (5). Таким образом, задача свелась к вычислению поля скоростей по задан-

ному полю эффективного смещения, и для этого возможно использование уравнения (1) или (2), которые с нужной точностью записываются как

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \text{div}[(h + \xi)\vec{u}] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + g\nabla\xi = 0. \quad (12)$$

В общем случае волнового поля в бассейне переменной глубины поле скоростей может быть определено только численно по полю смещения, что означает невозможность получения аналитических зависимостей для искомой задачи. На практике, однако, волнение на море представляет собой две системы волн: ветровые и зыбь, каждая из которых имеет узкую диаграмму направленности. Если зыби нет, то имеем дело с однонаправленными волнами, и для них возможно использовать одномерную систему (11) - (12). В частности, уравнение (11) трансформируется в

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h + \xi)u] = 0. \quad (13)$$

В случае распространения прогрессивной волны в бассейне постоянной глубины решение уравнения (13) находится в явном виде

$$u = V \frac{\xi}{h + \xi}, \quad (14)$$

где  $V$  – скорость распространения волны. В результате мы имеем замкнутую формулу для вычисления смещения водной поверхности

$$\eta \approx \xi + \frac{1}{2g}[h^2 + 2h\xi + \xi^2]R. \quad (15)$$

где  $R$  вычисляется из (4)

$$R = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad (16)$$

и скорость  $u$  – с помощью (14). Наконец, надо учесть то обстоятельство, что давление

измеряется в точке, поэтому все пространственные переменные должны быть заменены на временные с использованием связи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (17)$$

В результате, функция  $R$  записывается в виде

$$R = -\frac{1}{V} \left( 1 - \frac{u}{V} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2, \quad (18)$$

Важно отметить, что для вычисления смещения водной поверхности в точке, мы должны знать вариации давления в точке и согласно (18) – скорость распространения волны  $V$ . На самом же деле, в (18) всюду входит скорость течения и скорость волны не независимо, а через комбинацию  $u/V$ . Последняя же находится из (14) как

$$\frac{u}{V} = \frac{\xi}{h + \xi}, \quad (19)$$

так что знание скорости распространения волны не является обязательным. Таким образом, мы можем привести окончательное выражение вычисления смещения водной поверхности

$$\eta \approx \xi - \frac{1}{2g} \left[ h^2 + 2h\xi + \xi^2 \right] \left[ \frac{h}{h + \xi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\xi}{h + \xi} \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\xi}{h + \xi} \right) \right\}^2 \right]. \quad (20)$$

Формула (20) позволяет оценить смещение водной поверхности по измерениям донного давления. Отметим, что оно должно измеряться достаточно аккуратно, чтобы иметь возможность вычислить ее вторую производную. Формальным ограничением данного подхода является малость дисперсионных эффектов, так что волна должна быть достаточно длинной. При этом на амплитуду ее не накладывается никаких ограничений. Если к тому же волна имеет достаточно малую амплитуду, то, учитывая и малость дисперсии, во всех «негидростатических» членах можно пренебречь влиянием нелинейности. Тогда

формула (20) принимает очень простой вид

$$\eta \approx \xi - \frac{h}{2g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (21)$$

### Примеры расчета поверхностных волн по вариациям донного давления для условий Охотского моря

Рассмотрим несколько примеров аналитического вычисления смещения водной поверхности, используя модельные записи вариаций давления на дне. При этом мы будем использовать эффективное смещение, чтобы обе характеристики имели одну размерность.

А) *Распространение монохроматической волны*

$$\xi(t) = A \sin(\omega t). \quad (22)$$

В малоамплитудном приближении смещение водной поверхности остается синусоидальным и синфазным вариациям давления

$$\eta(t) = A \left( 1 + \frac{h\omega^2}{2g} \right) \sin(\omega t). \quad (23)$$

Как видим, амплитуда колебаний свободной поверхности превышает гидростатическое значение.

Для оценки отличия малоамплитудного приближения от гидростатического приближения, построим графики  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ , с параметрами, характерными для шельфа Охотского моря, которые были получены во время натурных экспериментов [19]. На шельфе Охотского моря наиболее часто встречаются волны с периодами 4-7 секунд, а наиболее часто наблюдаемые амплитуды волн колеблются в диапазоне от 10 см до 40 см. Натурные наблюдения при этом проводились на глубинах от 5 м до 20 м, с помощью датчиков придонного давления. На рис. 1 приведены функции  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  для волны с периодом 4 секунды в бассейне глубиной 20 метров. Отклонения от гидростатики довольно слабые. Рис. 2 демонстрирует влияние негидростатических эффектов через отношение  $\eta(t)/\xi(t)$ . Для ус-

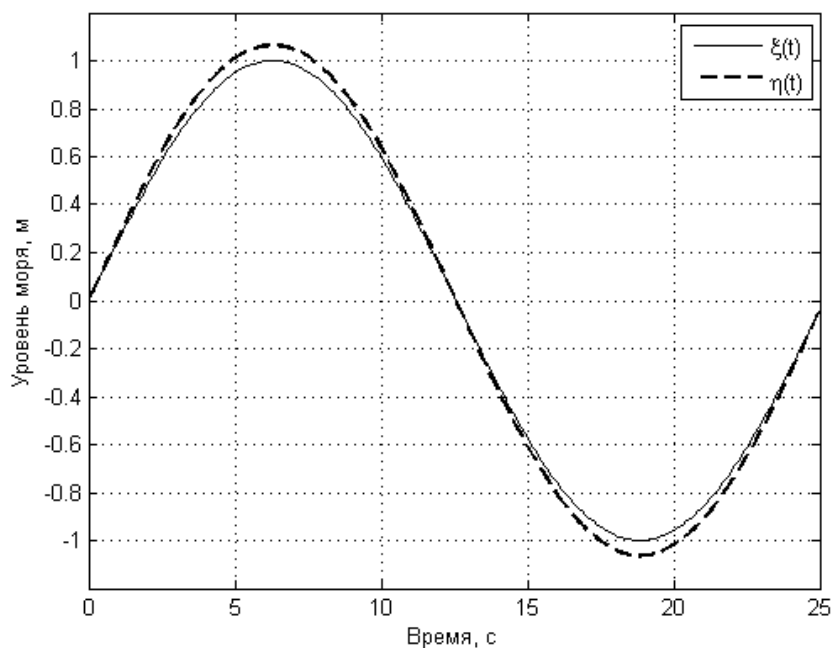


Рис. 1. Смещение водной поверхности, рассчитанное по малоамплитудному приближению (пунктирная линия) и гидростатическому приближению (тонкая линия) для волн с амплитудой  $A = 1$  м и периодом 4 секунды; глубина бассейна – 20 метров

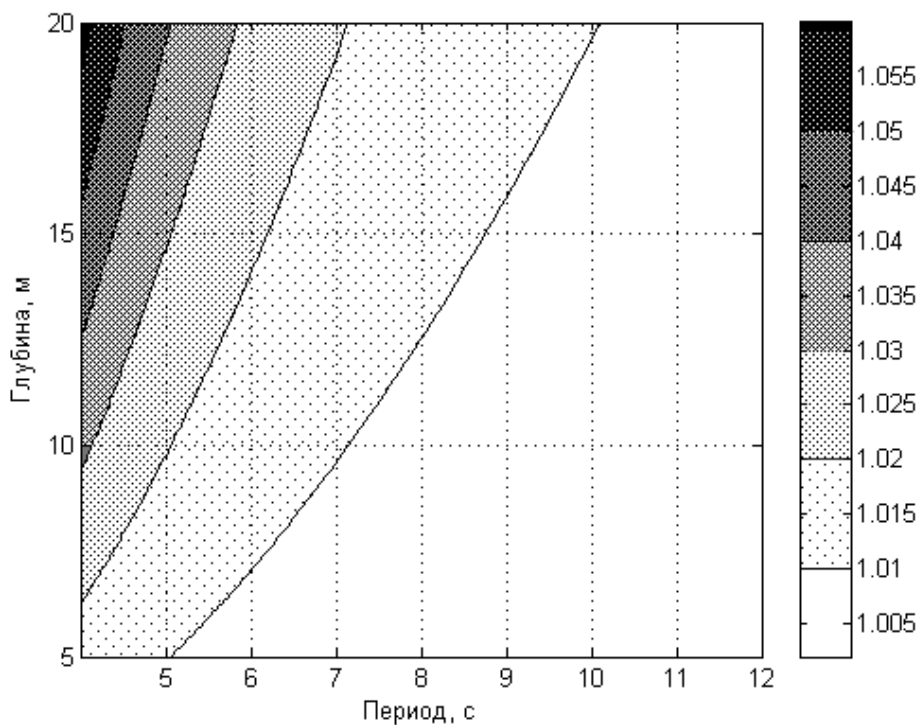


Рис. 2. Отношение  $\eta(t)/\xi(t)$  в зависимости от периода волн, наиболее часто наблюдаемых на шельфе Охотского моря и глубины

ловий наблюдений в зависимости от глубины и периода волны разница может достигать 5%. Аналогичные выводы для периодических волн сделаны в [20] для периодических волн в лотке.

Б) Распространение гауссового импульса

$$\xi(t) = A \exp\left(-\frac{4t^2}{T^2}\right), \quad (24)$$

где  $T$  – характерная длительность импульса. В этом случае колебания свободной поверхности есть

$$\eta(t) = A \left[ 1 + \frac{4h}{gT^2} - \frac{32t^2}{gT^4} \right] \exp\left(-\frac{4t^2}{T^2}\right). \quad (25)$$

Форма колебаний давления (через эффективное смещение) и свободной поверхности

показаны на рис. 3. Как видим, разница между гидростатическим и негидростатическим приближением довольно существенна и достигает 20%. Рис. 4 показывает, что расхождение в показаниях малоамплитудного и гидростатического приближений для гауссового импульса может достигать 50% при условиях, характерных для шельфа Охотского моря. Оно существенно больше, чем в случае монохроматической волны.

В данной работе обсуждается важная проблема восстановления параметров ветровых волн по данным регистраторов давления, установленных на дне. В условиях достаточного мелкого моря процедура восстановления найдена с помощью слабодисперсионного обобщения нелинейной теории мелкой воды. В рамках негидростатической модели Железняк-Пелиновского, в которой учитывается

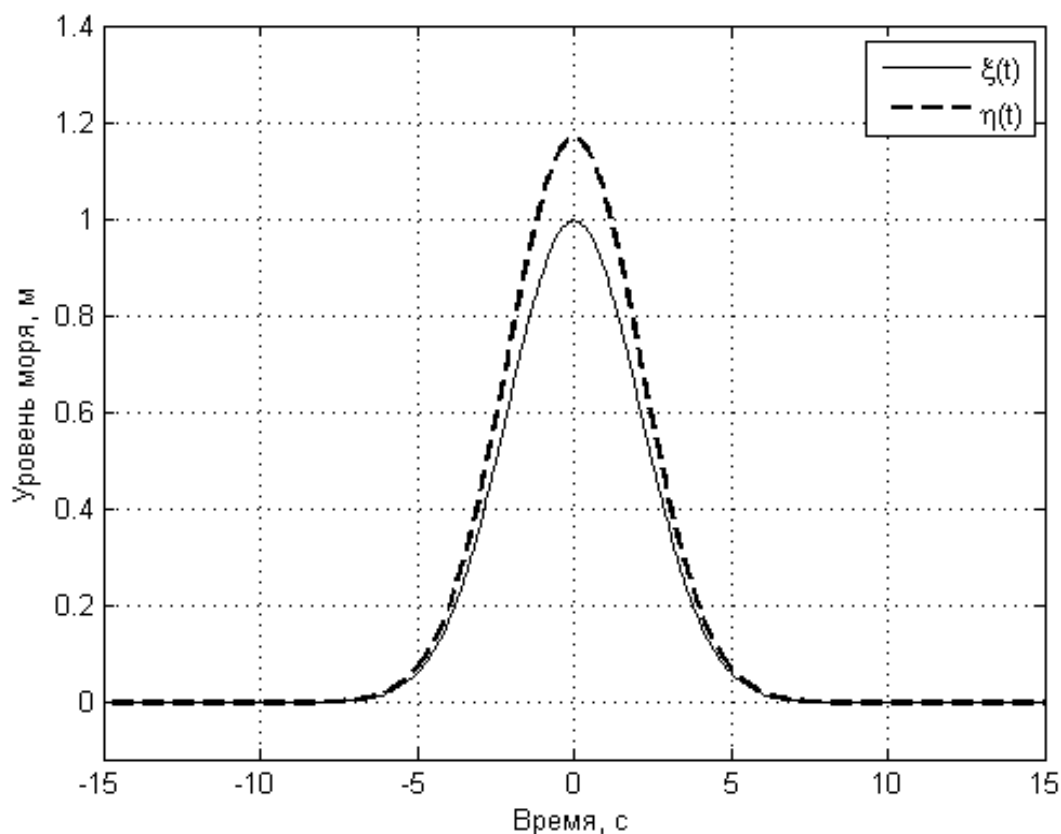


Рис. 3. Смещение водной поверхности, рассчитанное по малоамплитудному приближению (пунктирная линия) и гидростатическому приближению (тонкая линия) для импульса с амплитудой  $A = 1$  м, характерной длительностью импульса 6 секунд; глубина бассейна – 15 метров.

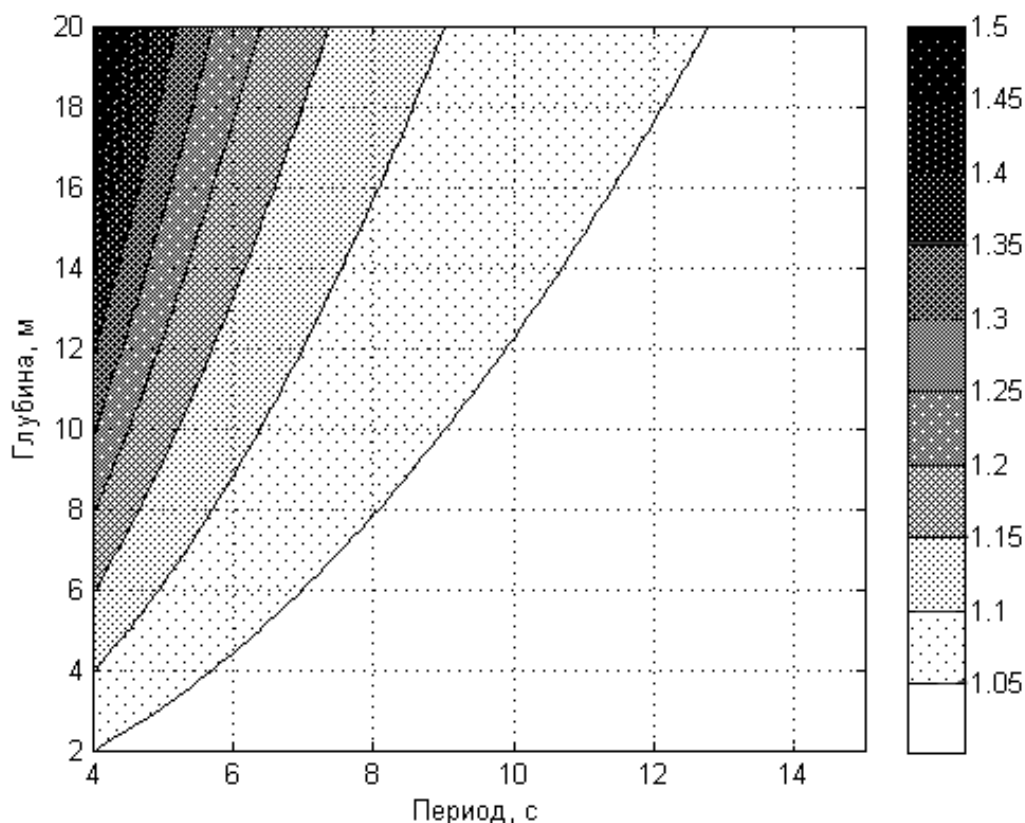


Рис. 4. Отношение  $\eta(t)/\xi(t)$  для гауссового импульса в зависимости от характерной длительности импульса и глубины.

произвольная нелинейность и слабая дисперсия, удастся получить явное выражение для колебаний морской поверхности с использованием точечного измерения придонного давления. При этом используется однонаправленное приближение для ветровых волн с узким угловым спектром. Конкретные расчеты выполнены для условий Охотского моря, где на глубинах 5-20 м часто встречаются ветровые волны с периодами 4-7 секунд и амплитудами 10-40 см. Показано, что негидростатические поправки для почти монохроматических волн достаточно малы, что подтверждается также результатами лабораторного эксперимента, описанных в [20]. В то же время негидростатические поправки оказываются существенными для импульсных сигналов, и могут достигать 50%. Полученные формулы могут использоваться для анализа ветровых волн в мелководных районах морей и океанов.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (соглашение № 14.В37.21.0642), грантов РФФИ (11-05-00216, 11-05-92002), МК-5222.2013.5, а также стипендии Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам СП-1935.2012.5, СП-1763.2013.5.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Железняк М.И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды // Накат цунами на берег. – Горький: ИПФ АН СССР, 1985. – С. 122–139.
2. Железняк М.И., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег. – Горький: ИПФ АН СССР, 1985. – С. 8–33.
3. Зайцев А.И. и др. Регистрация волн-убийц в за-

- ливе Анива Охотского моря // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2012. – № 1. – С. 33–41.
4. Заславский М.М., Красицкий В.П. О пересчете данных волнографа с датчиком давления на спектр поверхностных волн // Океанология. – 2001. – Т. 41 (№ 2). – С. 195–200.
  5. Левин Б.В. Первые результаты регистрации длинных волн в диапазоне периодов цунами в районе Курильской гряды на разнесенной сети станций / Б.И. Левин, А.Г. Чернов, Г.В. Шевченко и др. // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 427 (№ 2). – С. 239–244.
  6. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13. – С. 114–126.
  7. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17. – С. 94–109.
  8. Baquerizo A., Losada M.A. Transfer function between wave height and wave pressure for progressive waves // Coast. Engineer. – 1995. – V. 24. – P. 351–353.
  9. Mungov G., Eblé M., Bouchard R. DART® tsunameter retrospective and real-time data: A reflection on 10 years of processing in support of tsunami research and operations // Pure Appl. Geophys. – 2012. – doi: 10.1007/s00024-012-0477-5.
  10. Bishop C.T., Donelan M.A. Measuring waves with pressure transducers // Coast. Engineer. – 1987. – V. 11. – P. 309–328.
  11. Constantin A. On the recovery of solitary wave profiles from pressure measurements // J. Fluid Mech. – 2012. – V. 699. – P. 376–384.
  12. Constantin A., Strauss W. Pressure beneath a Stokes wave // Commun. Pure Appl. Maths. – 2010. – V. 63. – P. 533–557.
  13. Constantin A., Escher J., Hsu H.-C. Pressure beneath a solitary water wave: mathematical theory and experiments // Arch. Rat. Mech. Anal. – 2011. – V. 201. – P. 251–269.
  14. Deconink B., Oliveiras K.L., Vasan V. Relating the bottom pressure and surface elevation in the water wave problem // J. Nonl. Math. Physics. – 2012. – V. 19 (Suppl.1). – P. 179–189.
  15. Escher J., Schlurmann T. On the recovery of the free surface from the pressure within periodic travelling water waves // J. Nonlinear Math. Phys. – 2008. – V. 15. – P. 50–57.
  16. Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. – 1976. – V. 78. – P. 237–246.
  17. Huang M.-C., Tsai C.-H. Pressure transfer function in time and time-frequency domains // Ocean Engineering. – 2008. – V. 35. – P. 1203–1210.
  18. Kuo Y.-Y., Chiu J.-F. Transfer function between the wave height and wave pressure for progressive waves // Coast. Engineer. – 1994. – V.23. – P. 81–93.
  19. Kuznetsov K.I. Statistical characteristics of wind waves obtained in the south-eastern coast of Sakhalin Island / K.I. Kuznetsov, A.A. Kurkin, E.M. Pelinovsky et al. // Geophysical Research Abstracts. – 2013. – V. 15. – P. EGU2013–7854.
  20. Oliveras K.L. Recovering surface elevation from pressure data / K.L. Oliveras, V. Vasan, B. Deconinck et al. // SIAM J. Appl. Maths. – 2012. – V. 72 (№ 3). – P. 897–918.
  21. Tsai C.-H. On the recovery of surface wave by pressure transfer function / C.-H. Tsai, M.C. Huang, F.J. Young et al. // Ocean Engineering. – 2005. – V. 32. – P. 1247–1259.