

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:533.72

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

В.А. Акимова\*, А.Л. Бугримов\*, А.В. Латышев\*\*, А.А. Юшканов\*

\*Московский государственный областной университет (МГОУ)

\*\* Московский государственный областной университет (МГОУ),  
Московский государственный гуманитарный  
университет им. М.А. Шолохова

*Аннотация.* Исследуются нули дисперсионной функции из второй задачи Стокса. Вторая задача Стокса – задача о поведении разреженного газа, заполняющего полупространство. Плоскость, ограничивающая полупространство, совершает гармонические колебания в своей плоскости. Используется линейризованное кинетическое эллипсоидально статистическое уравнение с параметром. Доказывается формула факторизации дисперсионной функции. С помощью формулы факторизации в явном виде находятся нули дисперсионной функции и проводится их исследование в зависимости от величины безразмерной частоты ограничивающей газ плоскости и параметра уравнения.

*Ключевые слова:* вторая задача Стокса, кинетическое эллипсоидально статистическое уравнение, разделение переменных, нули дисперсионной функции, собственные решения, непрерывный и дискретный спектры, факторизация дисперсионной функции.

#### Введение

Проблема генерации сдвиговых волн колеблющейся пластины или вторая задача Стокса для сплошной среды была сформулирована в середине XIX века [1]. Затем, после введения Максвеллом и Больцманом кинетических уравнений, вторая задача Стокса стала изучаться для разреженного газа.

Подробная история этой проблемы изложена в наших работах [2] – [4]. В этих работах вторая задача Стокса была решена аналитически. При этом использовалось известное кинетическое БГК–уравнение (Бхатнагар, Гросс, Крук).

В работе [5] были исследованы нули дисперсионной функции, отвечающей БГК–уравнению. Выяснен диапазон значений частот колебаний плоскости, в которых с точностью до одного процента точное выражение нуля дисперсионной функции можно заменить его асимптотическим приближением, взятым с помощью разложения дисперсионной функции в асимптотический ряд вблизи бесконечно удаленной точки.

Необходимость замены точного выражения нуля дисперсионной функции его асимптотическим представлением объясняется тем фактом, что вычисление макроха-

рактических задачи требует вычисления целого ряда значений сложных функций в нулях дисперсионной функции.

Подчеркнем, что эта задача привлекает к себе широкое внимание многих авторов (см., например, [6]–[11]) решалась численными и (или) приближенными методами. В работах [7, 8] вторая задача Стокса была успешно применена и нанотехнологиях.

В работе [12] вторая задача Стокса была решена аналитически с использованием эллипсоидально статистического уравнения.

Методы вычисления нулей дисперсионных функций для уравнений переноса нейтронов были заложены в работе [13]. Затем эти методы применялись и развивались для различных задач в работах [14]–[20].

В настоящей работе в явной форме представлены собственные решения эллипсоидально статистического кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Для этого в явной форме находятся нули дисперсионного уравнения. Для нахождения нулей используется факторизация дисперсионной функции, доказываемая с помощью краевой задачи Римана из теории функций комплексного переменного. Коэффициентом задачи Римана является отношение граничных значений дисперсионной функции сверху и снизу на действительной полуоси.

При малых значениях частоты колебаний ограничивающей разреженный газ плоскости найдена простая асимптотическая формула для вычисления нулей дисперсионной функции. Проводится графическое исследование модулей, а также действительной и мнимой частей нулей дисперсионной функции, вычисляемых по явной и асимптотической формулам. Вводится функция ошибок, представляющая собой относительное отклонение модуля асимптотического представления нуля от модуля его точного представления. Выяснен интервал значений частоты колебаний плоскости, в котором величина ошибок не превышает одного процента.

В п. 2 настоящей работы изучаются свойства дисперсионной функции в комплексной плоскости, а в п. 3 выводятся точные формулы для вычисления нулей дисперсионной функции и исследуются свойства этих нулей, как функции безразмерной частоты колебаний плоскости, ограничивающей разреженный газ стенки.

В работе [12] была аналитически решена вторая задача Стокса с использованием эллипсоидально статистического уравнения, которое после линеаризации и ряда упрощений сводится к уравнению

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) (1 - a\mu\mu') h(x_1, \mu') d\mu',$$

где

$$z_0 = 1 - i\omega_1,$$

$x_1$  – безразмерная координата,  $x_1 = x/l$ ,  $l$  – средняя длина свободного пробега газовых молекул,  $\omega_1 = \omega\tau = \omega/\nu$ ,  $\tau = 1/\nu$ ,  $\nu$  – частота столкновений газовых молекул,  $\omega$  – частота колебаний пластины, ограничивающей полупространство, заполненное разреженным газом,  $a$  – числовой параметр задачи,  $0 \leq a \leq 1$ .

### 1. Постановка задачи

Пусть разреженный одноатомный газ занимает полупространство  $x > 0$  над плоской твердой поверхностью, лежащей в плоскости  $x = 0$ . Поверхность  $(y, z)$  совершает гармонические колебания вдоль оси  $y$  по закону  $u_s(t) = u_0 e^{-i\omega t}$ .

Будем линеаризовать функцию распределения газовых молекул, полагая

$$f(x, t, \mathbf{v}) = f_0(v)(1 + \varphi(x, t, \mathbf{v})).$$

Здесь  $f_0 = n(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-\beta v^2)$  – абсолютный максвеллиан,  $\beta = m/(2kT)$ ,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура газа,  $n$  – концентрация (числовая плотность) газа,  $m$  – масса молекулы газа.

Пусть далее  $\nu = 1/\tau$  – частота столкновений газовых молекул,  $\tau$  – время между двумя последовательными столкновениями молекул,  $u_y(x, t)$  – массовая скорость газа,  $\sigma_{xy}(x, t)$  – компонента тензора вязких напряжений,

$$u_y(x, t) = \frac{1}{n} \int v_y f(x, t, \mathbf{v}) d^3 v,$$

$$\sigma_{xy}(x, t) = m \int v_x v_y f(x, t, \mathbf{v}) d^3 v.$$

Концентрация газа и его температуры считаются постоянными в линеаризованной постановке задачи.

Введем безразмерные скорости и параметры: Безразмерную скорость молекул:  $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$  ( $\beta = m/2kT$ ), безразмерную массовую скорость  $U_y(x, t) = \sqrt{\beta} u_y(x, t)$ , безразмерное время  $t_1 = \nu t$  и безразмерную компоненту тензора вязких напряжений:

$$P_{xy}(x, t) = \frac{\beta}{\rho} \sigma_{xy}(x, t),$$

где  $U_0 = \sqrt{\beta} u_0$  – безразмерная амплитуда скорости колебаний границы полупространства. Тогда линеаризованное эллипсоидально-статистическое кинетическое уравнение (см., например, [21]) (кратко ЭС-уравнение) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) = 2C_y U_y(x_1, t_1) - 2a C_x C_y P_{xy}(x_1, t_1). \quad (1.1)$$

Здесь  $a$  – числовой параметр уравнения, причем при  $a = 1$  число Прандтля является истинным ( $Pr = 2/3$ ). Заметим, что для безразмерного времени  $U_s(t_1) = U_0 e^{-i\omega t_1}$ .

Подчеркнем, что задача о колебаниях газа решается в линеаризованной постановке. Линеаризация задачи проведена по безразмерной массовой скорости  $U_y(x_1, t_1)$  при условии, что  $|U_y(x_1, t_1)| \ll 1$ . Это неравенство эквивалентно неравенству:

$$|u_y(x_1, t_1)| \ll \nu_T,$$

где  $v_T = 1/\sqrt{\beta}$  – тепловая скорость молекул, имеющая порядок скорости звука.

Величины безразмерных массовой скорости и компоненты тензора вязких напряжений через функцию  $\varphi$  выражаются следующим образом:

$$U_y(x_1, t_1) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_y \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) d^3 C, \quad (1.2)$$

и

$$P_{xy}(x_1, t_1) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_x C_y \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) d^3 C. \quad (1.3)$$

Учитывая, что колебания пластины рассматриваются вдоль оси  $y$ , будем искать функцию  $\varphi$  в виде:

$$\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) = C_y e^{-i\omega t_1} h(x_1, C_x). \quad (1.4)$$

С помощью (1.4) получаем следующую граничную задачу:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) (1 - a\mu\mu') h(x_1, \mu') d\mu', \quad (1.5)$$

$$h(0, \mu) = 2U_0, \quad \mu > 0, \quad z_0 = 1 - i\omega_1, \quad (1.6)$$

$$h(x \rightarrow +\infty, \mu) = 0. \quad (1.7)$$

Нетрудно показать, что параметр уравнения  $a$  и число Прандтля связаны соотношением:

$$\text{Pr} = \frac{2}{2+a}, \quad \text{откуда:} \quad a = \frac{2(1-\text{Pr})}{\text{Pr}}.$$

Правильному (истинному) числу Прандтля  $\text{Pr} = 2/3$  отвечает значение параметра  $a = 1$ . При  $a = 0$  эллипсоидально-статистическое уравнение переходит в БГК-уравнение с числом Прандтля  $\text{Pr} = 1$ , т.е. при  $\text{Pr} = 1$   $a = 0$ .

## 2. Собственные решения непрерывного спектра

Разделение переменных в уравнении (1.5) осуществляется следующей подстановкой

$$h_\eta(x_1, \mu) = \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad (2.1)$$

где  $\eta$  – параметр разделения, или спектральный параметр, вообще говоря, комплексный.

Подставляя (2.1) в уравнение (1.5) получаем характеристическое уравнение

$$z_0(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta n_0(\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} a\mu\eta n_1(\eta), \quad (2.2)$$

где  $n_k(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \mu'^k \Phi(\eta, \mu') d\mu'$ ,  $k = 0, 1$ .

Из уравнения (2.2) находим, что его можно представить в виде:

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi z_0}} n_0(\eta)(1 - b\mu\eta), \quad (2.3)$$

где  $b = -\frac{i\omega_1 a}{z_0}$ .

Далее примем следующую нормировку

$$n_0(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu' \equiv z_0.$$

Тогда уравнение (2.3) имеет при  $\eta, \mu \in (-\infty; +\infty)$  решение [22]:

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \frac{\eta(1 - b\mu\eta)}{\eta - \mu} + e^{\eta^2} \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (2.4)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака, символ  $Px^{-1}$  означает главное значение интеграла при интегрировании  $x^{-1}$ ,  $\lambda(z)$  – дисперсионная функция, введенная равенством:

$$\lambda(z) = 1 - i\omega_1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} (1 - bz\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Эту функцию можно преобразовать к виду:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 + (1 - bz^2) \lambda_0(z),$$

где  $\lambda_0(z)$  – известная функция из теории плазмы,

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - z}.$$

Собственные функции (2.4) называются собственными функциями непрерывного спектра, ибо спектральный параметр  $\eta$  непрерывным образом заполняет всю действительную прямую.

Таким образом, собственные решения уравнения (1.5) имеют вид (2.1), в котором функция  $\Phi(\eta, \mu)$  определяется равенством (2.4).

По условию задачи мы ищем решение, невозрастающее вдали от стенки. В связи с этим, спектром граничной задачи будем называть положительную действительную ось параметра  $\eta$ .

Приведем формулы Сохоцкого сверху и снизу на действительной оси для дисперсионной функции:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \pm i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2} (1 - b\mu^2) - i\omega_1 + \frac{1 - b\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - \mu}.$$

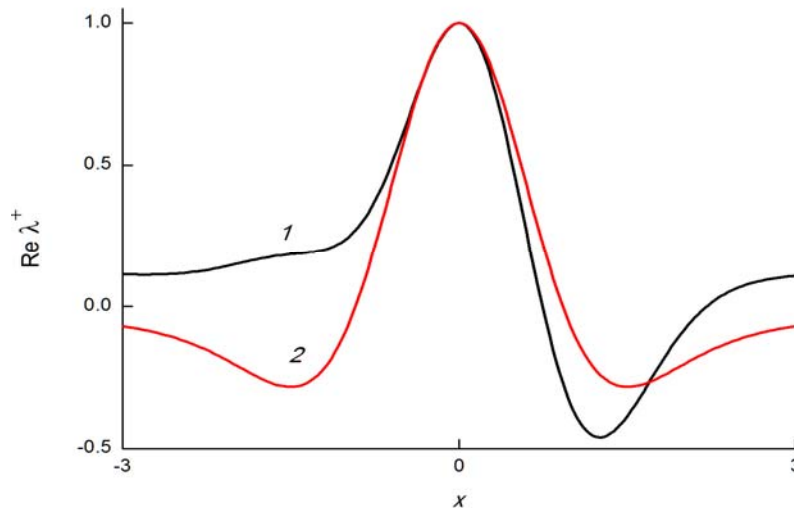


Рис. 1. Действительная часть граничных значений дисперсионной функции  $\lambda^+(x)$ , частота равна  $\Omega = 0.637$ ; кривая 1 отвечает числу Прандтля  $Pr = 2/3$ ; кривая 2 отвечает БГК – уравнению,  $Pr = 1$ .

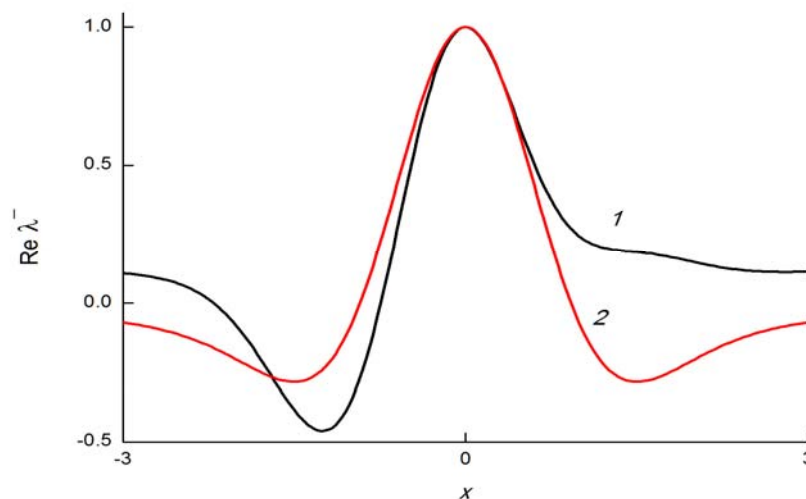


Рис. 2. Действительная часть граничных значений дисперсионной функции  $\lambda^-(x)$ , частота равна  $\Omega = 0.637$ ; кривая 1 отвечает числу Прандтля  $Pr=2/3$ ; кривая 2 отвечает БГК--уравнению,  $Pr=1$ .

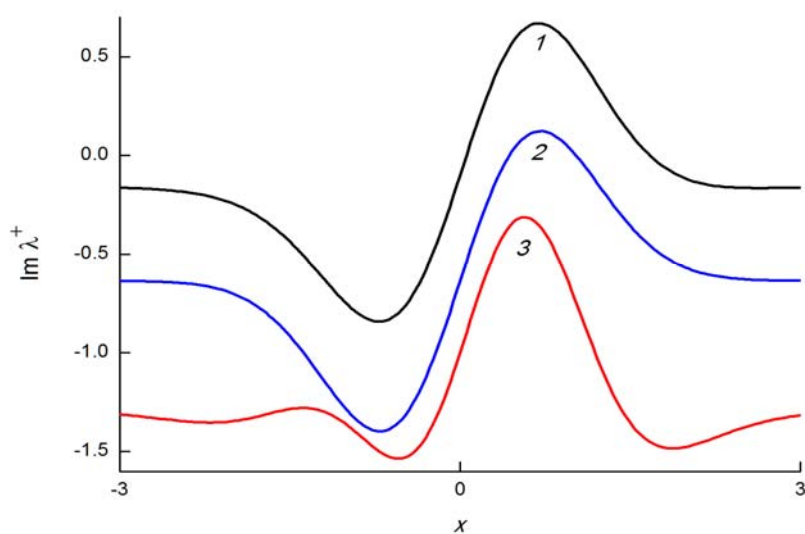


Рис. 3. Мнимая часть граничных значений дисперсионной функции  $\lambda^+(x)$ ;  
кривая 1 отвечает числу Прандтля  $Pr=2/3$ ,  $\Omega = 0.1$ ;  
кривая 2 отвечает  $Pr=2/3$ ,  $\Omega = 1$ ;  
кривая 3 отвечает БГК-уравнению,  $Pr=1$ ,  $\Omega = 0.637$ .

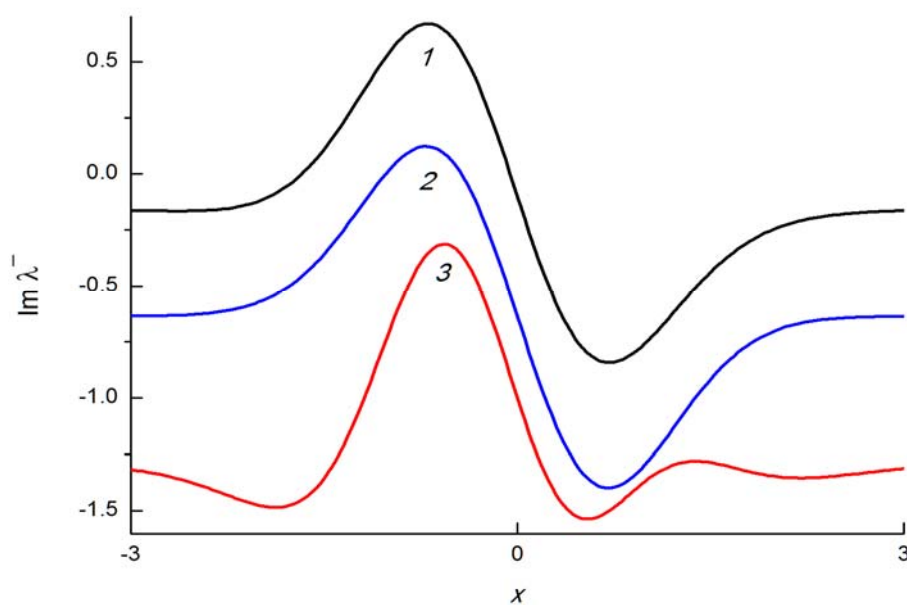


Рис. 4. Мнимая часть граничных значений дисперсионной функции  $\lambda^-(x)$ ;  
кривая 1 отвечает числу Прандтля  $Pr=2/3$ ,  $\Omega = 0.1$ ;  
кривая 2 отвечает  $Pr=2/3$ ,  $\Omega = 1$ ;  
кривая 3 отвечает БГК-уравнению,  $Pr=1$ ,  $\Omega = 0.637$ .

Разность граничных значений сверху и снизу на действительной оси дисперсионной функции отсюда равна:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2} (1 - b\mu^2)i,$$

полусумма граничных значений равна:

$$\frac{\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu)}{2} = -i\omega_1 + \frac{1 - b\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - \mu}.$$

Сингулярный интеграл в этих равенствах понимается в смысле главного значения.

### 3. Структура дискретного спектра

Покажем, что дискретный спектр, состоящий из нулей дисперсионного уравнения  $\lambda(z) = 0$ , содержит два нуля  $-\eta_0$  и  $\eta_0$ , из которых обозначается через  $\eta_0$  тот нуль, у которого  $\text{Re}\eta_0 > 0$ .

Сначала рассмотрим случай малых значений  $\omega_1$ . Разложим дисперсионную функцию в асимптотический ряд по отрицательным степеням переменного  $z$  в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 + \frac{b}{2} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3b}{4z^4} + \dots, z \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Из разложения (3.1) видно, что при малых значениях  $\omega_1$  дисперсионная функция имеет два отличающиеся лишь знаками комплексно-значных нуля. Заменяем ряд (3.1) его частичной суммой

$$\lambda^{as}(z) = -i\omega_1 + \frac{b}{2} - \frac{1}{2z^2}.$$

Тогда из уравнения  $\lambda^{as}(z) = 0$  найдем асимптотическое представление нулей дисперсионного уравнения:

$$\pm \eta_0^{as}(\omega_1) = \sqrt{i \frac{1 + 3i\omega_1 a / 2z_0}{\omega_1(2 + a/z_0)}} = \sqrt{i \frac{1 - i\omega_1 + 3i\omega_1 a / 2}{2\omega_1(1 - i\omega_1 + a/2)}}, \quad 0 \leq a \leq 1.$$

Отсюда видно, что при  $\omega_1 \rightarrow 0$  оба нуля дисперсионной функции имеют предельно одну бесконечно удаленную точку  $\eta_i = \infty$  кратности (порядка) два.

Теперь исследуем случай произвольных значений  $\omega_1$ . Далее нам понадобится функция

$$G(\tau) = \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)} = \frac{-i\omega_1 + (1 - b\tau^2)\lambda_0^+(\tau)}{-i\omega_1 + (1 - b\tau^2)\lambda_0^-(\tau)}. \quad (3.2)$$



Выделим у функции  $G(\tau)$  действительную и мнимую части. Заметим, что

$$b = b_1 + ib_2, \quad b_1 = \frac{a\omega_1^2}{1 + \omega_1^2}, \quad b_2 = \frac{a\omega_1}{1 + \omega_1^2},$$

$$\lambda_0^\pm(\tau) = l(\tau) \pm is(\tau), \quad s(\tau) = \sqrt{\pi\tau} e^{-\tau^2},$$

$$l(\tau) = 1 - 2\tau^2 \int_0^1 e^{-\tau^2(1-x^2)} dx.$$

Теперь равенство (3.2) записывается следующим образом:

$$G(\tau) = \frac{-i\omega_1 + [(1 - b_1\tau^2) - ib_2\tau^2](l(\tau) + is(\tau))}{-i\omega_1 + [(1 - b_1\tau^2) - ib_2\tau^2](l(\tau) - is(\tau))},$$

или

$$G(\tau) = \frac{p + q - i(\omega_1 - p_1 + q_1)}{p - q - i(\omega_1 + p_1 + q_1)},$$

где

$$p(\tau) = (1 - b_1\tau^2)l(\tau), \quad q(\tau) = b_2\tau^2s(\tau),$$

$$p_1(\tau) = (1 - b_1\tau^2)s(\tau), \quad q_1(\tau) = b_2\tau^2l(\tau).$$

Теперь функцию  $G(\tau)$  можно представить в виде:

$$G(\tau) = G_1(\tau) + iG_2(\tau),$$

где

$$G_1(\tau) = \frac{g_1(\tau)}{g_0(\tau)}, \quad G_2(\tau) = \frac{g_2(\tau)}{g_0(\tau)},$$

$$g_1(\tau) = p^2 - q^2 + \omega_1^2 - p_1^2 + q_1^2,$$

$$g_2(\tau) = 2[pp_1 + q(\omega_1 + q_1)],$$

$$g_0(\tau) = (p - q)^2 + (\omega_1 + p_1 + q_1)^2.$$

Функции  $g_j(\tau)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) понадобятся в явном виде:

$$g_1(\tau) = \omega_1^2 - [s^2(\tau) - l^2(\tau)][(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4],$$

$$g_2(\tau) = 2s(\tau)\{\omega_1 b_2\tau^2 + l(\tau)[(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4]\},$$

$$g_0(\tau) = \omega_1^2 + 2\omega_1[(1 - b_1\tau^2)s(\tau) + b_2\tau^2l(\tau)] + [l^2(\tau) + s^2(\tau)][(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4].$$

В этих равенствах

$$(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4 = \frac{1 + \omega_1^2(1 - a\tau^2)^2}{1 + \omega_1^2}.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$g_1(\tau) = \frac{\omega_1^4 - \omega_1^2 s_1(\tau) - s_0(\tau)}{1 + \omega_1^2},$$

где  $s_0(\tau) = s^2(\tau) - l^2(\tau)$ ,  $s_1(\tau) = s_0(\tau)(1 - a\tau^2)^2 - 1$ ,  
и

$$g_2(\tau) = \frac{2s(\tau)}{1 + \omega_1^2} \left\{ -a\omega_1^2 \tau^2 + l(\tau)[1 + \omega_1^2(1 - a\tau^2)^2] \right\},$$

$$g_0(\tau) = \omega_1^2 + [l^2(\tau) + s^2(\tau)] \frac{1 + \omega_1^2(1 - a\tau^2)^2}{1 + i\omega_1^2} +$$

$$+ 2\omega_1 \left[ \left( 1 - \frac{a\omega_1 \tau^2}{1 + \omega_1^2} \right) s(\tau) - \frac{a\omega_1 \tau^2}{1 + \omega_1^2} l(\tau) \right].$$

Можно показать с помощью принципа аргумента аналогично тому, как это сделано в [2], что число нулей дисперсионной функции равно:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d \ln G(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} d \ln G(\tau) =$$

$$= \frac{1}{\pi} [\arg G(\tau)]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \arg G(+\infty) = 2\chi(G),$$

т.е. удвоенному индексу функции  $G(\tau)$ .

Введем угол  $\theta(\tau) = \arg G(\tau)$  – главное значение аргумента, фиксированное в нуле условием  $\theta(0) = 0$ ,

$$\theta(\tau) = \operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{Re} G(\tau)}{\operatorname{Im} G(\tau)} = \operatorname{arccctg} \frac{g_1(\tau)}{g_2(\tau)}. \quad (3.3)$$

Из уравнения  $g_1(\tau) = 0$  найдем его положительный корень:

$$\omega_1(a) = \sqrt{\frac{s_1(\tau)}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_1(\tau)}{2}\right)^2 + s_0(\tau)}} \equiv \Omega(\tau, a).$$

Введем выделенную частоту колебаний пластины, ограничивающей газ:

$$\omega_1^*(a) = \max_{0 < \tau < \infty} \Omega(\tau, a). \quad (3.4)$$

Эту частоту колебаний будем называть критической.

Аналогично [2] можно показать, что в случае, когда частота колебаний пластины меньше критической, т.е. при  $0 \leq \omega < \omega_1^*(a)$ , индекс функции  $G(\tau)$  равен единице. Это означает, что число комплексных нулей дисперсионной функции в плоскости с разрезом вдоль действительной оси, равно двум.

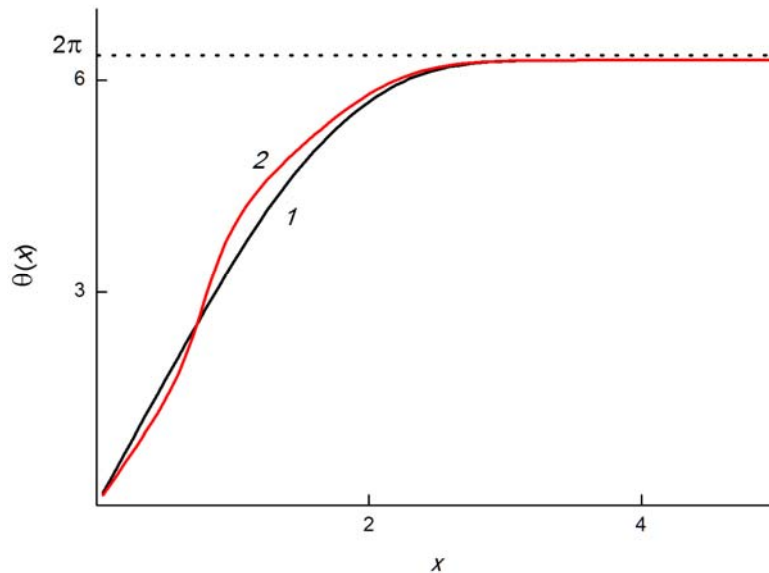


Рис. 5. Угол  $\theta = \theta(x)$ ,  $\text{Pr}=2/3$ , кривая 1 отвечает  $\Omega = 0.1$ ; кривая 2 отвечает  $\Omega = 0.5$ .

В случае, когда частота колебаний пластины превышает критическую ( $\omega > \omega_1^*(a)$ ) индекс функции  $G(\tau)$  равен нулю:  $\chi(G) = 0$ . Это означает, что дисперсионная функция не имеет нулей в верхней и нижней полуплоскостях. В этом случае дискретных (частных) решений исходное уравнение (1.9) не имеет.

Таким образом, дискретный спектр характеристического уравнения, состоящий из нулей дисперсионной функции, в случае  $0 \leq \omega < \omega_1^*(a)$  есть множество из двух точек  $\eta_0$  и  $-\eta_0$ . При  $\omega > \omega_1^*(a)$  дискретный спектр – это пустое множество. При  $0 \leq \omega < \omega_1^*(a)$  убывающее собственное решение уравнения (1.9) имеет вид:

$$h_{\eta_0}(x_1, \mu) = e^{-x_1 z_0 / \eta_0} \Phi(\eta_0, \mu),$$

где  $\Phi(\eta_0, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)}{\eta_0 - \mu}$  – собственная функция характеристического урав-

нения. Это означает, что дискретный спектр рассматриваемой граничной задачи состоит из одной точки  $\eta_0$  в случае  $0 < \omega < \omega_1^*(a)$ . При  $\omega_1 \rightarrow 0$  оба нуля  $\pm \eta_0$ , как уже указывалось выше, перемещаются в одну и ту же бесконечно удаленную точку. Это означает, что в случае  $\omega_1 = 0$  дискретный спектр задачи состоит из одной бесконечно

удаленной точки кратности два и является присоединенным к непрерывному спектру. В этом случае дискретных (частных) решения ровно два:

$$h_1(x_1, \mu) = 1, \quad h_2(x_1, \mu) = x_1 - \frac{2}{2+a} \mu.$$

Приведем таблицу критических частот в зависимости от значений числа Прандтля и параметра уравнения  $a$  согласно (3.4).

Таблица 1

Таблица значений критических частот

Число Прандтля $Pr$	Параметр $a$	Критическая частота $\omega_1^*$
1	0	0.733
0.952	0.1	0.717
0.909	0.2	0.717
0.870	0.3	0.691
0.833	0.4	0.681
0.800	0.5	0.672
0.769	0.6	0.662
0.741	0.7	0.654
0.714	0.8	0.648
0.690	0.9	0.642
2/3	1	0.637

#### 4. Факторизация дисперсионной функции

Здесь устанавливается формула, представляющая факторизацию дисперсионной функции в верхней и нижней полуплоскостях, а также выводится формула для факторизации граничных значений дисперсионной функции сверху и снизу на действительной оси. Такая факторизация дается в терминах функции  $X(z)$ .

В основе аналитического решения граничных задач кинетической теории лежит решение однородной краевой задачи Римана (см. [23]) с коэффициентом  $G(\mu) = \lambda^+(\mu) / \lambda^-(\mu)$ :

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = G(\mu), \quad \mu > 0.$$

Однородная краевая задача Римана называется также (см. [23]) задачей факторизации коэффициента  $G(\mu)$ .

Задача Римана означает, что отношение  $\lambda^+(\mu) / \lambda^-(\mu)$  можно заменить отношением функций  $X^+(\mu) / X^-(\mu)$ , являющихся граничными значениями функции  $X(z)$ , аналитической в комплексной плоскости  $\square$  и имеющей в качестве линии скачков положительную действительную полуось. Дисперсионная функция имеет в качестве линии скачков всю действительную ось.

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$X^+(\mu) = G(\mu)X^-(\mu), \quad \mu > 0, \quad (4.1)$$

где коэффициент задачи  $G(\tau)$  определен равенством (3.2).

Решение задачи Римана (4.1) проводится аналогично [3] и дается интегралом типа Коши:

$$X(z) = \frac{1}{z^\chi} \exp V(z), \quad (4.2)$$

где  $\chi = \chi(G)$  – индекс коэффициента задачи, введенный в п. 3, а  $V(z)$  понимается как интеграл типа Коши

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln G(\tau) - 2\pi i \chi}{\tau - z} d\tau. \quad (4.3)$$

Здесь  $\ln G(\tau) = \ln|G(\tau)| + i\theta(\tau)$  – главная ветвь логарифма, фиксированная в нуле условием  $\ln G(0) = 0$ , угол  $\theta(\tau) = \arg G(\tau)$  – главное значение аргумента, введенное равенством (3.3). Интеграл (4.3) удобнее рассматривать в виде:

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{q(\tau) - \pi\chi}{\tau - z} d\tau,$$

где  $q(\tau) = \frac{\theta(\tau)}{2} - \frac{i}{2} \ln|G(\tau)|$ ,

или в виде:

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \chi = 0, 1,$$

где  $\zeta(\tau) = q(\tau) - \pi\chi$ .

Пусть сначала  $\chi(G) = 1$ , т.е.  $\omega_1 \in [0, \omega_1^*(a))$ . Покажем, что для дисперсионной функции  $\lambda(z)$  везде в комплексной плоскости  $\square$ , исключая действительную ось  $\mathbb{R}$ , справедлива формула

$$\lambda(z) = -\lambda(\infty)(z^2 - \eta_0^2)X(z)X(-z). \quad (4.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda(\infty) &= -i\omega_1 + \frac{b}{2} = -i\omega_1 \left[ 1 + \frac{a}{2(1-i\omega_1)} \right] = \\ &= -\frac{i\omega_1}{\text{Pr}} \frac{1-i\omega_1}{1-i\omega_1}, \quad \frac{2}{3} \leq \text{Pr} \leq 1. \end{aligned}$$

Из этой формулы вытекает, что для ее граничных значений на  $\mathbb{R}$  справедливы соотношения:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = -\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X^{\pm}(\mu)X(-\mu), \quad \mu \geq 0, \quad (4.5)$$

$$\lambda^{\mp}(\mu) = -\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X^{\mp}(\mu)X(-\mu), \quad \mu \leq 0. \quad (4.6)$$

Для доказательства формулы (4.4) введем вспомогательную функцию:

$$R(z) = \frac{\lambda(z)}{-\lambda(\infty)(z^2 - \eta_0^2)X(z)X(-z)}. \quad (4.7)$$

Эта функция аналитична везде в комплексной плоскости кроме точек разрывов  $\mathfrak{d}_+$  и  $\mathfrak{d}_-$ . Точки  $z = \pm\eta_0$  являются устранимыми, т.к. в этих точках  $\lambda(\pm\eta_0) = 0$ .

Каждая точка разрывов  $\mathfrak{d}_+$  и  $\mathfrak{d}_-$  является устранимой. В самом деле, если  $\mu > 0$ , то на основании равенства (4.4) и (4.7) имеем:

$$\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X^+(\mu)X(-\mu)} = \frac{\lambda^-(\mu)}{\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X^-(\mu)X(-\mu)},$$

откуда  $R^+(\mu) = R^-(\mu)$ ,  $\mu > 0$ . Если  $\mu < 0$ , то на основании равенства (4.4), в котором  $\mu$  заменим на  $-\mu$ , имеем:

$$\frac{X^+(-\mu)}{X^-(-\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu < 0.$$

Нетрудно видеть, что  $\lambda^+(-\mu) = \lambda^-(\mu)$ ,  $\lambda^-(-\mu) = \lambda^+(\mu)$ . Поэтому

$$\frac{X^+(-\mu)}{X^-(-\mu)} = \frac{\lambda^-(\mu)}{\lambda^+(\mu)}, \quad \mu < 0,$$

Отсюда:

$$\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X(-\mu)} = \frac{\lambda^-(\mu)}{\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^+(-\mu)}, \quad \mu < 0,$$

или

$$R^+(\mu) = R^-(\mu), \quad \mu < 0.$$

Для того чтобы доказать равенства

$$R^+(\mu) = \frac{\lambda^+(\mu)}{-\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^+(-\mu)}$$

и

$$R^-(\mu) = \frac{\lambda^-(\mu)}{-\lambda(\infty)(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^+(-\mu)},$$

заметим, что если точка  $z$  стремится к точке  $\mu$  ( $\mu < 0$ ) из верхней или нижней полуплоскости, то функции  $R^+(\mu)$  или  $R^-(\mu)$  вычисляются согласно предыдущим равенствам. Следовательно, эту функцию можно считать аналитической функцией везде в  $\square$ , в том числе и в точках разреза, доопределив ее на разрезе по непрерывности. Осталось заметить, что функция  $R(z)$  аналитична везде в  $\bar{C}$  и  $R(\infty)=1$ . По теореме Лиувилля эта функция является тождественно постоянной:  $R(z) \equiv 1$ , откуда и вытекает формула (4.4).

Формулы (4.5) и (4.6) очевидно вытекают из формулы (4.4).

Из формулы (4.4) найдем в явном виде формулу для вычисления нулей дисперсионной функции:

$$\eta_0(\omega_1, z) = \sqrt{z^2 + \frac{\lambda(z)}{\lambda(\infty)X(z)X(-z)}}.$$

В этой формуле в качестве точки  $z$  удобно взять точку на мнимой оси:  $z=N_i$ ,  $N=1, 2, \dots$ . Тогда получим формулу:

$$\eta_0(\omega_1) = \sqrt{-N^2 + \frac{\lambda(N_i)}{\lambda(\infty)X(N_i)X(-N_i)}}.$$

Мы вычислим обе части равенства (4.4) в точке  $z=i$ . В результате для нулей дисперсионной функции получаем следующую формулу:

$$\eta_0(\omega_1) = \sqrt{-1 + \frac{\lambda(i)}{\lambda(\infty)} \exp[-V(i) - V(-i)]}. \quad (4.8)$$

Рассмотрим случай нулевого индекса:  $\chi(G) = 0$ , т.е.  $\omega_1 \in (\omega_1^*, +\infty)$ . Аналогично предыдущему доказываются формулы:

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= -\lambda(\infty)X(z)X(-z), & \text{Im } z \neq 0. \\ \lambda^\pm(\mu) &= -\lambda(\infty)X^\pm(\mu)X(-\mu), & \mu \leq 0. \\ \lambda^\pm(\mu) &= -\lambda(\infty)X(\mu)X^\mp(-\mu), & \mu < 0. \end{aligned}$$

Исследование свойств нулей дисперсионной функции проводится по формуле (4.8). На рис. 6 проводится сравнение модулей точного значения нуля  $\eta_0(\omega_1)$  (кривая 1) и асимптотического представления  $\eta_0^{as}$  (кривая 2).

Введем функцию ошибок – функцию относительного отклонения асимптотического представления модуля нуля от модуля его точного представления:

$$O(\omega_1) = \frac{|\eta_0(\omega_1)| - |\eta_0^{as}(\omega_1)|}{|\eta_0(\omega_1)|} \cdot 100\%.$$

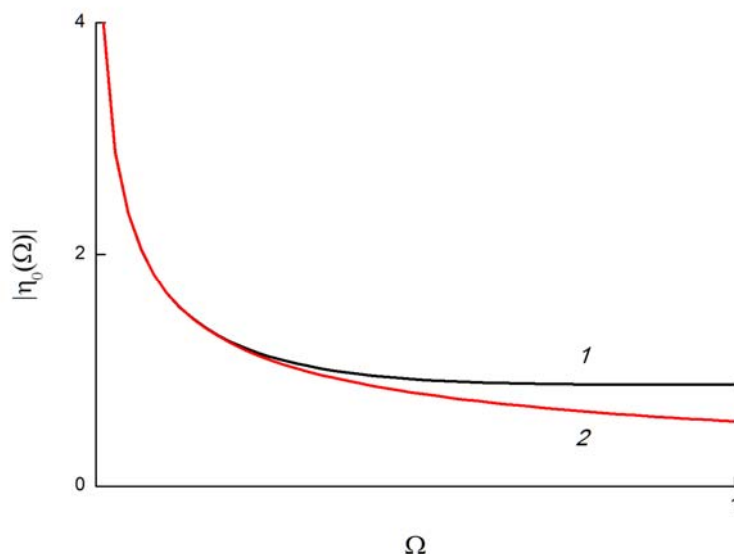


Рис. 6. Сравнение модулей нулей  $\eta_0 = \theta_0(\Omega)$  (кривая 1) и  $\eta = \eta_0^{as}(\Omega)$  (кривая 2),  $Pr = 2/3$ .

На рис. 7 представлено поведение функции ошибок как функции безразмерной частоты колебаний плоскости, ограничивающей разреженный газ во второй задаче Стокса. Из рис. 7 видно, что в интервале  $0 \leq \omega_1 \leq 0.2$  величина функции ошибок не превышает одного процента. Этот факт позволяет в прикладных вопросах использовать асимптотическое представление нуля дисперсионной функции.

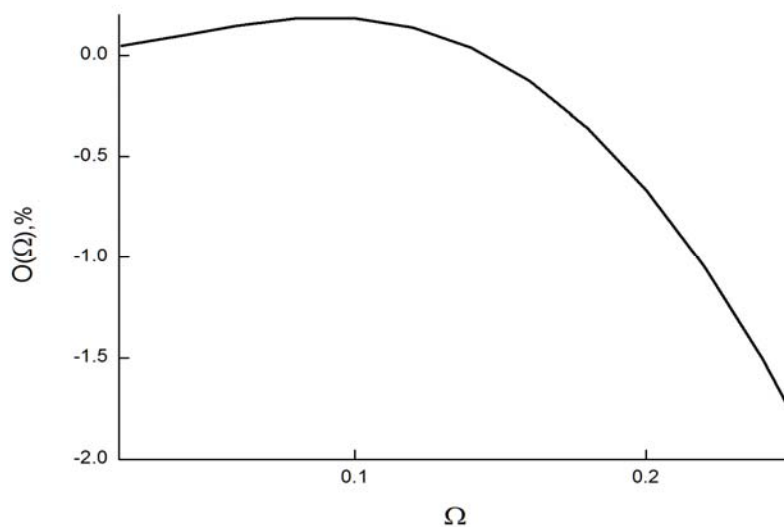


Рис. 7. Относительное отклонение модуля нуля  $|\eta_0^{as}(\Omega)|$  от  $|\eta_0(\Omega)|$ ,  $Pr = 2/3$ .



### Заключение

В настоящей работе исследуются нули дисперсионной функции из второй задачи Стокса. Вторая задача Стокса – задача о поведении разреженного газа, заполняющего полупространство. Плоскость, ограничивающая полупространство, совершает гармонические колебания в своей плоскости. Используется линейризованное кинетическое эллипсоидально–статистическое уравнение. С помощью решения краевой задачи Римана доказывается формула факторизации дисперсионной функции. С помощью формулы факторизации в явном виде находятся нули дисперсионной функции и проводится их исследование в зависимости от величины безразмерной частоты ограничивающей газ плоскости. Выяснен интервал значений частоты колебаний плоскости,  $0 \leq \omega_1 \leq 0.2$ , в котором величина функции ошибок не превышает одного процента.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Stokes G. G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil., IX, 1851, 8-106.
2. *Akimova V. A., Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part I: eigenvalues and eigensolutions// arXiv: 1111.3429v1 [math-ph] 15 Nov 2011, 27 pp.
3. *Akimova V. A., Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part II: mathematical apparatus of solving of problem// arXiv: 1111.5182v1 [math-ph] 22 Nov 2011, 26 pp.
4. *Akimova V. A., Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* Analytical Solution of Second Stokes Problem on Behavior of Gas over Oscillation Surface. Part III: Solving of Problem and Applications// arXiv: 1112.1283v1 [math-ph] 6 Dec 2011, 40 pp.
5. *Akimova V. A., Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* Zero of the dispersion equations from the second Stokes problem about behaviour of gas over the fluctuating surface. Vestnik MGOU (Moscow state regional univ.). Ser. Physics–Mathematics, 2012. №. 2, 3–14.[in russian].
6. *Sharipov F. and Kalempa D.* Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency // Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium, ed. by M.S.Ivanov and A.K.Rebrov. Novosibirsk, 2007, 1140-1145.
7. *Karabacak D. M., Yakhot V., and Ekinici K. L.* High–Frequency Nanofluidics: An Experimental Study using Nanomechanical Resonators, Phys. Rev. Lett., 98 (2007), 254505.
8. *Yakhot V. and Colosqui C.* Stokes' second flow problem in a highfrequency limit: application to nanomechanical resonators // J. Fluid Mechanics. V. 586. Sept. 2007, pp. 249–258.
9. *Dudko V. V., Yushkanov A. A., Yalamov Yu. I.* Influence of properties of a surface on characteristics of shift waves. J. tech. phys.,75:4 (2005), 134-135. [in russian].
10. *Dudko V. V., Yushkanov A. A., Yalamov Yu. I.* Generation by a fluctuating surface of shift waves in gas, High Temperature, 47:2 (2009), 262-268. [in russian].
11. *Dudko V. V.* Sliding of rarefied gas lengthways motionless and fluctuating surfaces. Thesis, Moscow, 2010. [in russian].

12. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* Analytical solution of second Stokes problem about behaviour of gas over fluctuating surface by means of ellipsoidal statistical equation// arXiv:1210.4135v1 [mathph] 15 Oct 2012, 24 pp.
13. *Burniston E. E. and Siewert C. E.* The Use of Riemann—Hilbert Problem in Solving a Class of Transcendental Equations // Proc. of the Cambridge Phil. Soc., 73 (1973). Pp. 111-118.
14. *Siewert C.E. and Thomas J. R., Jr.* Half-Space Problems in the Kinetic Theory of Gases // The Physics of Fluids, 16 (1973). Pp.1557-1559.
15. *Siewert C. E.* Explicit Results for the Quantum-Mechanical Energy States Basic to a Finite Square-Well Potential// Journal of Mathematical Physics, 19 (1978) 434-435.
16. *Siewert C. E.* On Computing Eigenvalues in Radiative Transfer// Journal of Mathematical Physics, 21 (1980). Pp. 2468-2470.
17. *Anastasselou E. G. and Ioakamidis N. I.* Application of the Cauchy theorem to the location of zeros of sectionally analytic functions// J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). Vol. 35, №5, 1984. Pp. 705-711.
18. *Ioakamidis N. I.* Application of the generalized Siewert—Burniston method to locating zeros and poles of meromorphic functions// J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). Vol. 36, №5, 1984. Pp. 733-742.
19. *Anastasselou E. G. and Ioakamidis N. I.* A generation of the Siewert—Burniston method for the determination of zeros of analytic functions// J. Math. Phys. Vol. 25, №8, 1984. 2422.
20. *Ioakamidis N. I.* A unified Riemann—Hilbert problem to the analytical determination of zeros of sectionally analytic functions// J. Math. Anal. and Appl. Vol. 129, №1, 1988. Pp. 134-141.
21. *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1978.
22. *Zharinov V. V., Vladimirov V. S.* Equations of mathematical physics, Fizmatlit, M., 2000. [in russian].
23. *Gakhov F. D.* Boundary value problems, Dover Publications, 1990.

## **THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE DISPERSION EQUATION FROM SECOND STOKES PROBLEM**

**V. Akimova\*, A. Bugrimov\*, A. Latyshev\*\* A. Yushkanov\***

\*Moscow State Regional University (MSRU)

\*\* Moscow State Regional University (MSRU),

*Sholokhov Moscow State University for the Humanities*

*Abstract.* Zero of dispersion function from second Stokes problem are investigated. Second problem Стокса is a problem about behavior of the rarefied gas filling half-space. The plane limiting half-space, makes harmonious oscillations. It is used linear kinetic ellipsoidal statistical equation with parameter. The factorization formula to dispersion function is proved. By means of the factorization formula are found zero of dispersive function in an explicit form and their research depending on quantity of dimensionless frequency of a plane limiting gas and equation parameter is carried out.

*Keywords:* second Stokes problem, kinetic ellipsoidal statistical equation, separation of variables, zero of dispersion function, eigen solutions, continuous and discrete spectra, factorization of dispersion function.