

УДК 372.851+378.147

**Иванова С.В.**

*Московский физико-технический институт*

**ПРИМЕНЕНИЕ УЧЕБНЫХ ПОНЯТИЙНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ  
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ**

**S. Ivanova**

*Moscow Institute of Physics and Technology*

**APPLYING EDUCATIONAL CONCEPTUAL FORMATIONS OF HIGHER  
MATHEMATICS TO TEACHING ANALYTIC GEOMETRY AND  
LINEAR ALGEBRA AT UNIVERSITY**

*Аннотация.* В статье рассматриваются вопросы обучения студентов учебной математической деятельности на основе структурно-интегративного и деятельностного подходов на примере курсов аналитической геометрии и линейной алгебры. Исследуются проблемы освоения и использования студентами основных структурных элементов и системных связей содержания обучения аналитической геометрии и линейной алгебре с помощью типовых систем учебных математических знаний и приемов учебной математической деятельности. На примере понятия линейного пространства показываются последовательные этапы обучения студентов учебной математической деятельности.

*Ключевые слова:* системное обучение высшей математике, понятийная организация знаний, учебные понятийные образования высшей математики, обучение учебной математической деятельности, обучение аналитической геометрии, обучение линейной алгебре.

*Abstract.* The article considers the questions of students teaching to studying mathematical activity on the base of structural-integrative and active approaches on examples of analytic geometry and linear algebra courses are considered. The main structural elements and systemic links of the learning content of analytic geometry and linear algebra are discoursed. The typical system of studying mathematical knowledge and studying mathematical activity are offered. And the methodic of students' teaching to study mathematics and mathematical activity are considered. The successive stages of studying the courses are showed by the example of the concept of linear space.

*Key words:* system teaching of higher mathematics, conceptual knowledge system, educational conceptual formations of higher mathematics, studying mathematical activity, analytic geometry, linear algebra.

В статье на примере курсов аналитической геометрии и линейной алгебры рассматривается проблема обучения учебной математической деятельности студентов технических вузов с фундаментальной математической подготовкой. Для этого предлагается конкретизация обобщенной ориентировочной основы учебной математической деятельности, изложенной в более ранних статьях [1; 2].

Актуальность проблемы обучения студентов учебной математической деятельности подтверждается многочисленными исследованиями в условиях современных компетентностного, деятельностного и личностного подходов. В работе рассматривается авторский подход к решению обозначенной проблемы на основе структурирования и интеграции учебного и математического содержания обучения студентами в учебной математической деятельности под руководством преподавателей. Для этого используются типовые для обучения высшей математике системы учебных математических знаний – учебные понятийные образования высшей математики.

Учебным понятийным образованием высшей математики (УПОВМ) будем называть специально организованную, структурированную, ориентированную на конкретный процесс обучения высшей математике систему знаний, структурную основу которой составляют:

– подсистема математических знаний, основанная на фундаментальных математических понятиях (математическое ядро) и направленная на структурное и системное представление для студентов программного математического содержания обучения;

– подсистема учебно-методических и методологических знаний (окружение ядра), направленная на обучение студентов восприятию, усвоению, освоению и систематизации понятийно организованных знаний и их обучение учебной, познавательной и исследовательской математической деятельности средствами обучения высшей математике.

В соответствии с основными учебными задачами в обучении высшей математике выделены четыре основных типа учебных понятийных образований, сущность которых ниже разъясняется на примере линейного пространства:

1) понятие-определение, направленное на обеспечение структурного представления и организации взаимосвязанного освоения студентами определений фундаментальных понятий;

2) горизонтальная понятийная система, направленная на формирование системы свойств, признаков понятия и связей между различными понятиями;

3) вертикальная понятийная система, направленная на формирование новых УПОВМ через развитие ранее сформированных систем знаний, при которых осуществляется, с одной стороны, освоение студентами новых математических понятий на основе ранее изученных, с другой стороны, углубление ранее изученного учебного понятийного образования;

4) категориальное понятийное образование, которое служит свертыванию и систематизации фундаментальных математических понятий в обучении.

Все типы учебных понятийных образований объединены общей структурой, реализация которой зависит от учебной задачи, а именно, в математическом ядре выделены поля терминов, основных теоретических сведений, примеров и контрпримеров, теоретических задач, теоретических методов и приемов, алгоритмических задач, алгоритмических методов и приемов, внутриматематических приложений и нематематических приложений. В окружении

ядра выделены учебно-методическая, словесно-языковая, символично-языковая, образная, деятельностная, систематизированная и методологическая составляющие.

Система учебных понятийных образований высшей математики направлена не только на обучение студентов математическому содержанию учебных предметов, но и на их обучение умению учиться, учебной математической деятельности, развитие их мышления и способностей ориентироваться в информационных потоках, что является важными составляющими профессиональной подготовки выпускников вузов. А также на формирование целостных мыслительных структур у учащихся в обучении.

Заметим, что УПОВМ могут быть отражены с помощью системы схем (см., например, [1]) или конспектов, отражающих указанную выше структуру. Важно, чтобы студенты составляли такие схемы самостоятельно (под контролем преподавателя), что может способствовать их обучению восприятию, воспроизведению, преобразованию, применению, систематизации математического содержания обучения. Для решения этих учебных задач используется соответствующее выделенной задаче варьирование полноты и структурированности явного предъявления студентам учебного материала.

Особенностью курсов аналитической геометрии и линейной алгебры является их сильная взаимосвязанность и общность структуры. Основными понятиями учебного курса линейной алгебры являются фундаментальные понятия линейного пространства, линейного отображения и преобразования, билинейной и квадратичной форм, евклидова пространства, а также матричное исчисление и системы линейных уравнений. Эти фундаментальные понятия изучаются сначала в курсе аналитической геометрии на примерах 2-х и 3-х мерных арифметического и геометрического пространств и обобщаются в курсе линейной алгебры на  $n$ -мерный случай. Чтобы освоить каждое из этих фундаментальных понятий, студенту необходимо овладеть определенным набором других взаимосвязанных понятий. Например, для усвоения понятия линейного пространства необходимо знать понятия линейно зависимой и линейно независимой систем векторов, базиса

и размерности линейного пространства, подпространства, изоморфизма конечномерных линейных пространств и другие в их взаимосвязях, а также овладеть способами описания линейных пространств, их подпространств и операциями над ними.

Понятия курсов аналитической геометрии и линейной алгебры интенсивно используются именно как взаимосвязанные системы знаний во многих областях математики, в том числе в учебных курсах математического анализа, дифференциальных уравнений и других. Поэтому в качестве основных учебных задач курсов аналитической геометрии и линейной алгебры целесообразно рассматривать понимание общей структуры этих курсов студентами, ее иерархической системы понятий и формирование навыков оперирования ими. Такой подход способствует системности и целостности усвоения студентами большого объема математических сведений. Поэтому первоочередными задачами курса аналитической геометрии является формирование общей структуры курсов аналитической геометрии и линейной алгебры на доступном материале – указанных выше фундаментальных понятиях в 2-х и 3-х мерных пространствах, а также освоение терминологии, постановок задач и методов линейной алгебры. Решению этих учебных задач может способствовать структурная организация знаний на основе системы УПОВМ. Эффективное решение этих задач предполагает их осознание студентами в процессе освоения учебных курсов.

Изучение курса аналитической геометрии в предлагаемой системе начинается с алгоритмических техник: действий с матрицами, вычисления определителя матрицы, решений систем линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса (размерности 2 и 3). Это позволяет на ранних этапах предъявить студентам структуру учебных понятийных образований высшей математики на уровне общего представления, сориентировать учащихся на построение и использование систем знаний в изучении алгоритмических техник. В дальнейшем выделенная структура уточняется и развивается при изучении понятий и активно используется как ориентировочная основа учебной математической деятельности.

Рассмотрим изучение фундаментального понятия линейного пространства при обучении аналитической геометрии и линейной алгебре.

Понятие линейного пространства предполагает раскрытие системы понятий в их взаимосвязи (см. «например» выше). В обучении на основе предлагаемой обобщенной ориентировочной основы определение каждого понятия изучается в соответствии со структурой УПОВМ типа понятие-определение.

Рассмотрим, например, понятие базиса в двух- или трехмерном пространстве в курсе аналитической геометрии. *Базисом называется такая упорядоченная система линейно независимых векторов, в которой любой вектор линейного пространства разлагается в их линейную комбинацию.* Раскрытие этого понятия в мышлении и деятельности студентов осуществляется через примеры, системы теоретических и алгоритмических задач, наглядные образы. Так, система теоретических задач курса аналитической геометрии может включать следующие задачи:

- определить, верно ли, что любая линейно независимая система векторов является базисом трехмерного пространства;
- выяснить, может ли базис включать нулевой вектор;
- выяснить, может ли базис двух- или трехмерного пространства включать коллинеарные векторы;
- определить, почему требуется упорядоченность векторов базиса;
- проверить, является ли базисом упорядоченная система векторов, через линейную комбинацию которых выражается любой вектор;
- проверить, является ли базисом упорядоченная система векторов, через линейную комбинацию которых любой вектор выражается единственным образом.

Работа с примерами способствует раскрытию конкретного содержания изучаемых понятий, а также на продвинутых этапах позволяет организовать самостоятельный поиск методов решений задач в допонятийной форме и их последующее обобщение, что способствует осознанию студентами взаимосвязи теории и практики. Например, идея построения ортонормированного базиса может быть сформу-

лирована студентами на примере 2- и 3-мерно-го пространства, а во втором семестре на этой основе обобщена на многомерные пространства.

При освоении системы алгоритмических задач студенты ориентируются не только на получение ответа. Важно усвоение системы формулировок, различных методов их решения, например: проверить, является ли система векторов базисом, найти разложение вектора по базису, найти матрицу перехода от базиса к базису и связь между координатами одного вектора в разных базисах и т. д.

В системе учебных понятийных образований студенты ориентируются на единство логической, словесной, символьной, образной и практической форм представления и использования математической информации. Поэтому им важно научиться словесным и символьным выражениям постановки и решений задачи в частных и общих случаях. Например, проверка, является ли система векторов базисом в двумерном пространстве, может проводиться проверкой их неколлинеарности (непропорциональности координат) или проверкой равен ли нулю определитель матрицы из столбцов координат. Важно также, чтобы они поняли, какой из этих методов и как может быть обобщен на 3-мерное пространство и в курсе линейной алгебры – на  $n$ -мерные пространства.

Особенностью курса аналитической геометрии является его геометрическая наглядность. Поэтому для развития мышления студентов осуществляется целенаправленное обучение взаимосвязанному использованию и «взаимопереводам» [4] между естественными для этих математических курсов формами информации: геометрической наглядностью и символьными образами. Большое внимание уделяется овладению символьной формой записи и символьным формулировкам задач и их решений, например описанию алгоритма нахождения системы линейных уравнений, задающей линейное пространство, заданное как линейная оболочка системы столбцов с помощью использования сопряженной системы.

Формирование каждого из понятий, раскрывающих понятие линейного пространства, продолжается включением их в горизонтальную понятийную систему, направленную на

раскрытие их взаимосвязей. Горизонтальные понятийные системы реализуются несколькими схемами различного «масштаба» – степени подробности представления сведений и связей – чем шире представлены связи понятия, тем менее подробно отражается их внутреннее содержание.

Так, понятие базиса линейного пространства раскрывается через его связи с другими понятиями, в частности с понятием системы координат. Вопросы выражения вектора в координатной форме позволяют обсудить со студентами использование систем линейных уравнений, правила Крамера и метода Гаусса при постановке, решении и обосновании соответствующих задач. В курсе аналитической геометрии при обсуждении понятия системы координат и базиса также может формироваться представление об изоморфизме конечномерных линейных пространств одинаковой размерности.

Взаимосвязанность курсов аналитической геометрии и линейной алгебры позволяет показать студентам идею развития знаний через формирование вертикальных понятийных систем на основе понятий-определений и горизонтальных понятийных систем. Это может способствовать обучению системному усвоению материала, а также реализации идеи включения и развития допонятийного знания – алгоритмической техники решения линейных уравнений до теоретических знаний – теории систем линейных уравнений, что целесообразно использовать для осознания студентами различия между допонятийным и понятийно организованным знанием и дальнейшего обучения обоснованию и доказательству.

Это важно, в том числе для развития общей математической культуры студентов, так как осознание тенденции математического знания и учебной математической деятельности к постепенному развитию и углублению способствует мотивации к учебной математической деятельности и тем самым повышению качества обучения студентов, в том числе аналитической геометрии и линейной алгебре.

Одной из основных проблем в обучении аналитической геометрии является мотивация студентов к освоению методов линейной алгебры, так как, по мнению учащихся, боль-

шинство задач курса аналитической геометрии может быть решено методами элементарной математики. Для этого целесообразно использовать два направления мотивации изучения новых методов: демонстрация краткости и красоты этих методов и использование примеров на уровне общего представления, изучение которых предполагается в следующем семестре. Например, студентам вполне доступно понимание примера линейного пространства квадратных матриц 2-го порядка, базиса в нем, линейного преобразования умножения на фиксированную матрицу и т. д. Такие примеры, кроме мотивационной функции, целесообразно использовать для пропедевтики материала курса линейной алгебры, что, как правило, способствует облегчению восприятия студентами идеи конечномерных линейных пространств и других понятий во 2-ом семестре.

В завершении курсов аналитической геометрии и линейной алгебры формируются горизонтальные понятийные системы, объединяющие все изученные фундаментальные понятия и в краткой форме отражающие их суть и взаимосвязи. С помощью обобщенной схемы облегчается конкретизация и детализация, возможность объединить в мышлении единые постановки и методы решения задач. Поэтому можно говорить о формировании категориального понятийного образования на достигнутом студентами уровне усвоения курсов аналитической геометрии и линейной алгебры.

Продолжение изучения понятия линейного пространства осуществляется в других учебных курсах. Например, в курсе дифференциальных уравнений рассматриваются линейные пространства решений линейных дифференциальных уравнений, в курсе математического анализа понятие линейного пространства и связанные понятия используются в теме «Ряды Фурье», в курсах математического и функционального анализа линейные пространства служат одной из основ понятия полного пространства.

При изучении этих и других тем строятся сложные системы математических знаний, реализующие вертикальные понятийные системы на основе понятия линейного пространства и других фундаментальных понятий. Развитие, перенос и конкретизация ранее сформированных систем знаний способствует более качественному усвоению ранее изученного, а также проявлению осознанной активности студентов в изучении нового материала на основе используемой структуры. Конкретизация линейных пространств и формирование взаимосвязей с другими понятиями влечет развитие первоначально сформированного в курсе линейной алгебры категориального понятийного образования.

Таким образом, структурная организация учебного материала и учебной математической деятельности студентов на основе учебных понятийных образований высшей математики позволяет обучать самостоятельной учебной математической деятельности студентов и способствует целостному и системному усвоению ими учебных курсов. Предлагаемая система учебных понятийных образований высшей математики может способствовать интенсификации обучения аналитической геометрии и линейной алгебре, так как удовлетворяет основным требованиям интенсификации обучения высшей математике [3].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванова С.В. Структура и функционирование методической системы учебных понятийных образований высшей математики // Вестник МГОУ. 2010. № 3. С. 126-133.
2. Иванова С.В. Учебные понятийные образования высшей математики как системный инструмент обучения студентов // Вестник МГУ. 2010. № 1. С. 99-105.
3. Петрова В.Т. Научно-методические основы интенсификации обучения математическим дисциплинам в высших учебных заведениях: дис. ... докт. пед. наук. М., 1998. 410 с.
4. Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. Томск – М., 1997. 392 с.