

ФИЗИКА

УДК 533.9.02

**ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ
КВАНТОВОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЫ**

Ю.Ф. Алабина¹, А.Л. Бугримов¹, А.В. Латышев^{1,2}, А.А. Юшканов¹

¹Московский государственный областной университет (МГОУ),
105005, Москва, ул. Радио 10 а

²Московский государственный гуманитарный университет им. М.А. Шолохова
109444, Москва, ул. Ташкентская д18 к4

Аннотация. Проводится исследование диэлектрической функции для столкновительной плазмы с произвольной степенью вырожденности электронного газа. Путем специального предельного перехода получена диэлектрическая функция максвелловской плазмы. Приводится исследование и сравнение продольных диэлектрических функций квантовой и классической максвелловской столкновительной плазмы.

Ключевые слова: квантовая плазма, максвелловская плазма, распределение Ферми–Дирака, электрическая проводимость.

Введение

Формула для продольной диэлектрической функции квантовой бесстолкновительной плазмы была выведена в [1] с помощью уравнения Власова–Вигнера. Эта формула затем была получена в [2] с помощью уравнения Шредингера.

В работе [3] фактически без вывода было анонсировано общее выражение продольной диэлектрической функции квантовой столкновительной плазмы с постоянной частотой столкновений. При этом использовалось уравнение Шредингера–Больцмана с интегралом столкновений релаксационного типа.

В [4] была выведена формула для продольной диэлектрической функции квантовой столкновительной плазмы с использованием кинетического уравнения Власова–Вигнера–Больцмана. В этой работе, в частности, выявлено размывание и расщепление коновских особенностей.

В работе [5] выведена формула для поперечной электрической проводимости квантовой столкновительной плазмы с использованием кинетического уравнения Власова–Вигнера–Больцмана.

В работе [6] выведена формула для поперечной электрической проводимости квантовой столкновительной плазмы с использованием уравнения Шредингера–Больцмана с интегралом столкновений релаксационного типа с постоянной частотой столкновений частиц плазмы.

В работах [7] было выведено общее выражение продольной диэлектрической функции квантовой столкновительной плазмы с переменной частотой столкновений, зависящей от волнового вектора.

Затем в работе [8] был дан подробный вывод продольной диэлектрической функции квантовой плазмы с постоянной частотой столкновений.

В настоящей работе рассматривается случай квантовой столкновительной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа (случай произвольной температуры) с постоянной частотой столкновений частиц плазмы. Исследуется общая формула диэлектрической функции из [3] и [8].

Эта формула упрощается и приводится к удобному для вычислений виду и содержит одну квадратуру. Затем из полученной формулы путем специального предельного перехода выводится соответствующая формула для максвелловской плазмы.

Квантовая плазма изучается чрезвычайно интенсивно. Среди большого числа работ отметим лишь некоторые из них [9]–[11]. Продольная диэлектрическая функция необходима, в частности, для изучения колебаний как в квантовой, так и в классической плазме.

1. Исследование диэлектрической функции

Возьмем формулу для продольной диэлектрической функции квантовой невырожденной столкновительной плазмы [3], [7], [8]:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{(\omega + i\nu)B(\mathbf{k}, \omega + i\nu)B(\mathbf{k}, 0)}{\omega B(\mathbf{k}, 0) + i\nu B(\mathbf{k}, \omega + i\nu)}. \quad (1)$$

В формуле (1) приняты следующие обозначения:

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{4\pi} \frac{f_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} - f_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2}}{E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} + \hbar(\omega + i\nu)}, \quad (2)$$

$$B(\mathbf{k}, 0) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{4\pi} \frac{f_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} - f_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2}}{E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2}},$$

$$f_{\mathbf{k}'\pm\mathbf{k}/2} = \left[1 + \exp\left(\frac{E_{\mathbf{k}'\pm\mathbf{k}/2}}{k_B T} - \alpha\right) \right]^{-1},$$

\mathbf{k} – волновой вектор, $\alpha = \mu / (k_B T)$ – приведенный (безразмерный) химический потенциал, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $f_{\mathbf{k}'\pm\mathbf{k}/2}$ – функция распределения Ферми–Дирака, e – заряд электрона, ν – эффективная частота столкновений электронов с частицами плазмы, ω – частота колебаний электромагнитного поля.

Приведем формулу (1) к виду, удобному для исследования. Введем тепловую скорость электронов $v_T = 1/\sqrt{\beta}$, $k_T = m/(2k_B T)$. Ясно, что $k_B T = mv_T^2/2 = E_T$ – тепловая энергия электронов.

Введем безразмерный вектор $\mathbf{p} = \mathbf{p}/k_T$, где $k_T = p_T/\hbar = m v_T/\hbar$ – тепловое волновое число, \mathbf{p}_T – тепловой импульс электронов.

Заметим, что

$$E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} = -2E_T P_x q,$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}/k_T$, $\mathbf{q} = q(1,0,0)$, q – безразмерное волновое число.

Знаменатель из выражения (2) равен:

$$E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} + \hbar(\omega + i\nu) = -\frac{\hbar^2 k_T^2}{m} q \left(P_x - \frac{z}{q} \right) = -2E_T q \left(P_x - \frac{z}{q} \right).$$

Здесь введены безразмерные частоты

$$z = x + iy = \frac{\omega + i\nu}{k_T v_T}, \quad x = \frac{\omega}{k_T v_T}, \quad y = \frac{\nu}{k_T v_T}.$$

Теперь интеграл (2) равен:

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = -\frac{k_T^3}{2E_T q} \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{P}+\mathbf{q}/2} - f_{\mathbf{P}-\mathbf{q}/2}}{P_x - z/q}. \quad (3)$$

Здесь

$$f_{\mathbf{P}\pm\mathbf{q}/2} = \left[1 + \exp \left(\left(\mathbf{P} \pm \frac{\mathbf{q}}{2} \right)^2 - \alpha \right) \right]^{-1}.$$

Обозначим

$$B(\mathbf{q}, z) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{P}+\mathbf{q}/2} - f_{\mathbf{P}-\mathbf{q}/2}}{P_x - z/q}. \quad (4)$$

Тогда выражение (3) переписывается в виде

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = -\frac{k_T^3}{2E_T q} B(\mathbf{q}, z),$$

причем

$$B(\mathbf{q}, 0) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{P}+\mathbf{q}/2} - f_{\mathbf{P}-\mathbf{q}/2}}{P_x}.$$

Рассмотрим интеграл (4). Представим этот интеграл в виде разности интегралов. В каждом из интегралов осуществим очевидную линейную замену переменных. В результате получаем:

$$B(\mathbf{q}, z) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{P_x - z/q - q/2} - \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{P_x - z/q + q/2}, \quad (5)$$

где

$$f_0(P, \alpha) = [1 + e^{P^2 - \alpha}]^{-1}.$$

Согласно (5) получаем:

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = -\frac{k_T^3}{2E_T} b(q, z), \quad (6)$$

где

$$b(q, z) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{(P_x - z)^2 - (q/2)^2},$$

причем

$$b(q, 0) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{(P_x)^2 - (q/2)^2}.$$

Теперь выражение (1) для диэлектрической функции с помощью (6) преобразуется к виду:

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2 k_{2T}^2} \frac{k_T^3}{2E_T} \frac{(x + iy)b(q, z)b(q, 0)}{xb(q, 0) + iyb(q, z)}. \quad (7)$$

Нетрудно найти, что числовая плотность частиц плазмы (ее концентрация) в равновесном состоянии равна:

$$N = \int f_0(P, \alpha) \frac{2m^3 d^3 v}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2m^3 v_T^3}{8\pi^3 \hbar^3} \int f_0(P, \alpha) d^3 P = \frac{k_T^3}{\pi^2} f_2(\alpha), \quad (8)$$

где

$$f_2(\alpha) = \int_0^\infty f_0(P, \alpha) P^2 dP.$$

Вычислим внутренний двойной интеграл в выражении для $b(q, z)$, тогда:

$$b(q, z) = \frac{1}{4\pi^2} l(q, z), \quad (9)$$

где

$$l(q, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \mu^2}) d\mu}{(\mu - z/q)^2 - (q/2)^2},$$

или

$$l(q, z) = \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1 + e^{\alpha - (\mu + q/2)^2}}{1 + e^{\alpha - (\mu - q/2)^2}} \frac{d\mu}{\mu - z/q}.$$

Продольная диэлектрическая функция (7) согласно (8) и (9) записывается в виде:

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{x_p^2}{4q^2 f_2(\alpha)} \frac{(x + iy)l(q, z)l(q, 0)}{xl(q, 0) + iyl(q, z)}. \quad (10)$$

В (10) x_p – безразмерная плазменная (ленгмюровская) частота, $x_p = \omega_p / k_T v_T$, ω_p – плазменная (ленгмюровская) частота, $\omega_p = 4\pi e^2 N / m$.

Для сравнения приведем выражение для электрической проводимости классической невырожденной плазмы:

$$\frac{\sigma_l}{\sigma_0} = -i \frac{xy f_0(\alpha)}{q^2 f_2(\alpha)} \frac{1 + (z/q)b(z/q)}{1 + (iy/q)b(z/q)}. \quad (11)$$

Здесь

$$b(z/q) = \frac{1}{2f_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(\mu, \alpha) d\mu}{\mu - z/q}, \quad \sigma_0 = \frac{e^2 N}{m\nu}.$$

На основании (11) получаем выражение для продольной диэлектрической функции классической невырожденной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{x_p^2}{q^2} \frac{f_0(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{1 + (z/q)b(z/q)}{1 + (iy/q)b(z/q)}. \quad (12)$$

Подробный вывод формул (11) и (12) см., например, в [8].

Отметим, что при $\alpha \rightarrow -\infty$ невырожденная плазма переходит в максвелловскую.

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow -\infty$ в формуле (10), получим выражение для продольной диэлектрической функции квантовой максвелловской столкновительной плазмы:

$$\varepsilon_l(q, x, y) = 1 - \frac{x_p^2}{q^2} \frac{(x + iy)l_0(q, z)l_0(q, 0)}{xl_0(q, 0) + iyl_0(q, z)}, \quad (13)$$

где

$$l_0(q, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{(\mu - z/q)^2 - (q/2)^2}.$$

Отметим, что формулу (13) можно получить из формулы (1), если вместо абсолютного распределения Ферми–Дирака

$$f_k = [1 + \exp(E_k / E_T - \alpha)]^{-1}$$

взять абсолютное распределение Максвелла–Больцмана

$$f_k = 4\pi^{3/2} k_T^{-3} N \exp(-E_k / E_T).$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow -\infty$ в формуле (12), получим выражение для продольной диэлектрической функции классической максвелловской столкновительной плазмы:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{2x_p^2}{q^2} \cdot \frac{1 + (z/q)t(z/q)}{1 + (iy/q)t(z/q)},$$

где

$$t(z/q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\mu - z/q}.$$

2. Свойства диэлектрической функции

Проведем графическое исследование действительной и мнимой частей диэлектрической функции максвелловской квантовой плазмы.

На рисунках 1–8 проведем сравнение действительной и мнимой частей диэлектрической функции максвелловской квантовой и классической плазмы.

Кривые 1 и 2 на рисунках 1–8 отвечают максвелловской соответственно квантовой и классической плазме. Безразмерная частота колебаний электромагнитного поля взята равной плазменной частоте $\omega = \omega_p$, т.е. $x = x_p = 1$, безразмерная частота столкновений частиц плазмы $y = 0.01$, т.е. $\nu = 0.01\omega_p$.

На рис. 1–4 представлены соответственно действительная и мнимая части диэлектрической функции как функции волнового числа. Из рисунков 1 и 2 видно, что при $q \rightarrow 0$ значения как действительной, так и мнимой частей диэлектрической функции и квантовой, и классической плазмы совпадают. Более того, эти рисунки показывают, что уже при $q \leq 0.5$ значения действительной и мнимой частей диэлектрической функции квантовой плазмы практически неразличимы со значениями действительной и мнимой частей диэлектрической функции классической плазмы.

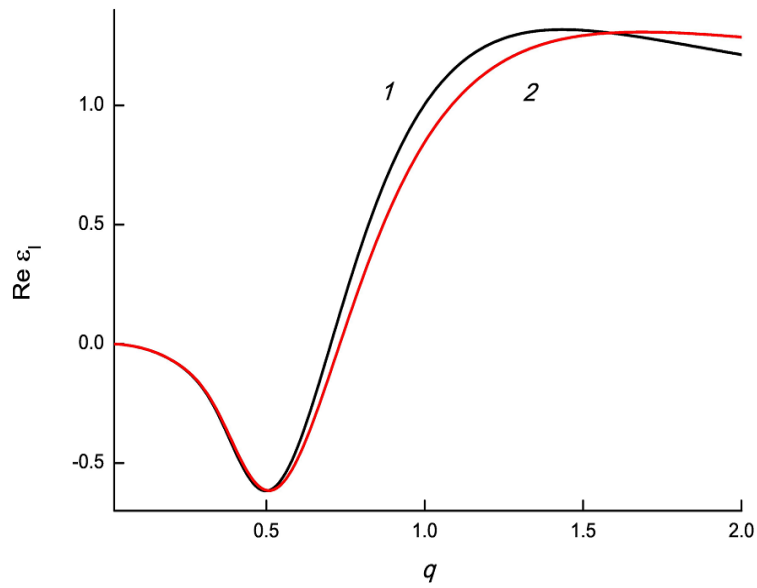


Рис. 1. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x = x_p = 1$, $y = 0.01$.

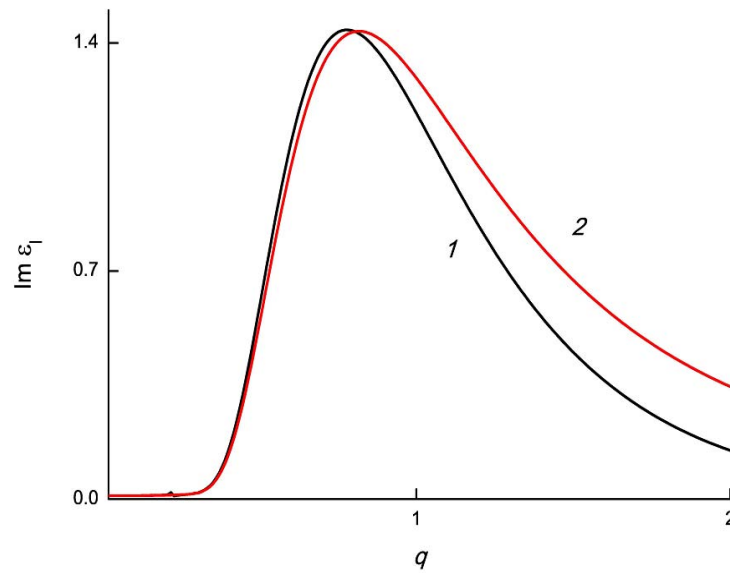


Рис. 2. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x = x_p = 1$, $y = 0.01$.

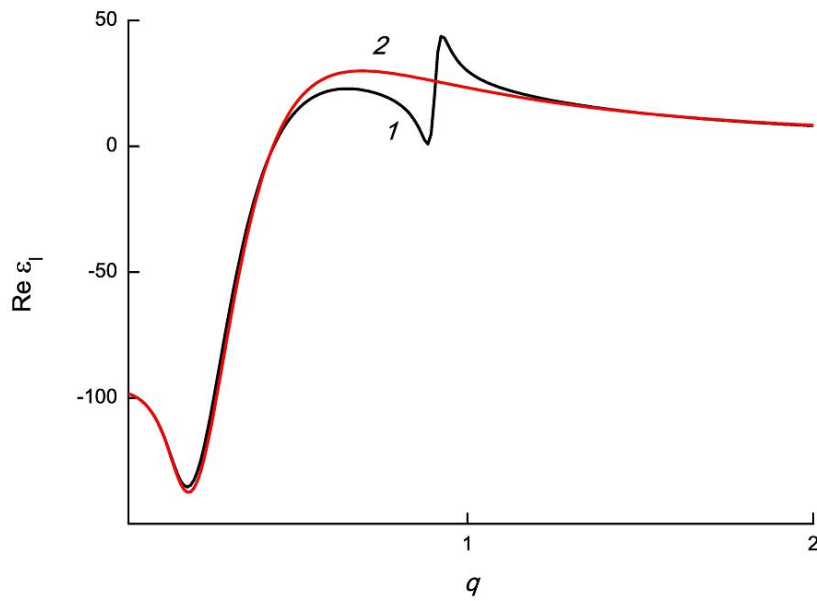


Рис. 3. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x = 0.1$, $x_p = 1$, $y = 0.01$.

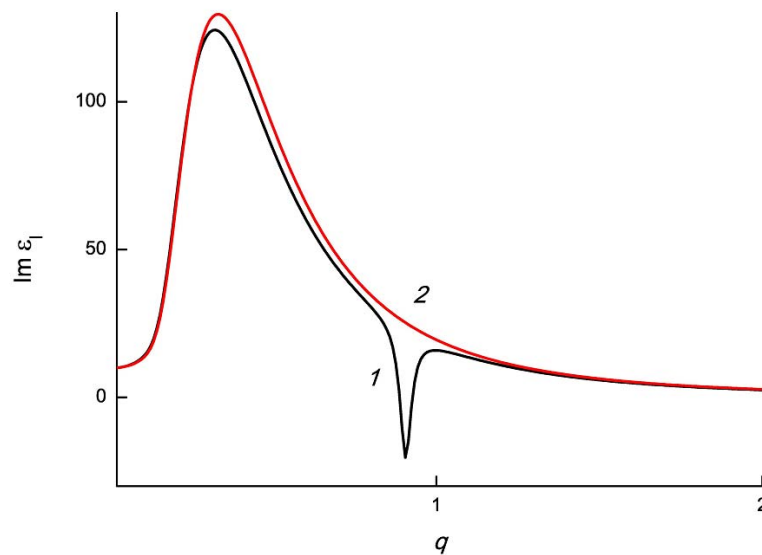


Рис. 4. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x = 0.1$, $x_p = 1$, $y = 0.01$.

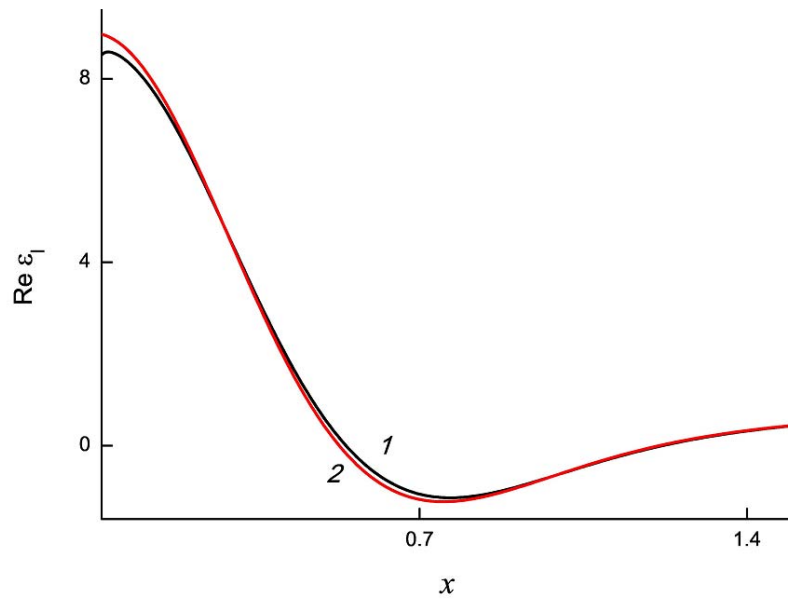


Рис. 5. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $q = 0.5$, $x_p = 1$, $y = 0.01$.

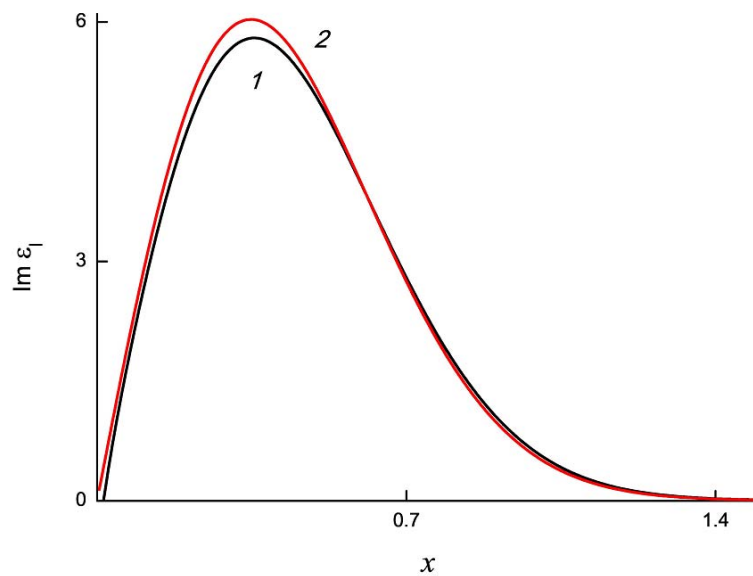


Рис. 6. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $q = 0.5$, $x_p = 1$, $y = 0.01$.

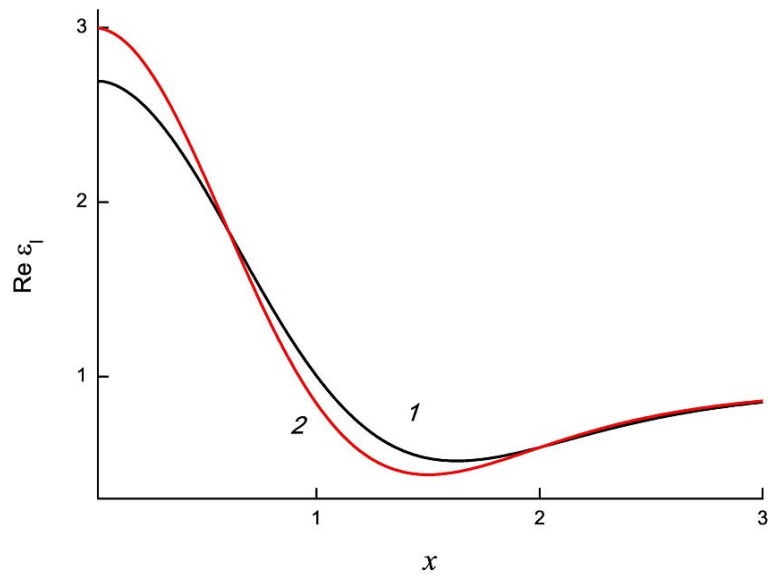


Рис. 7. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $q=1$, $x_p=1$, $y=0.01$.

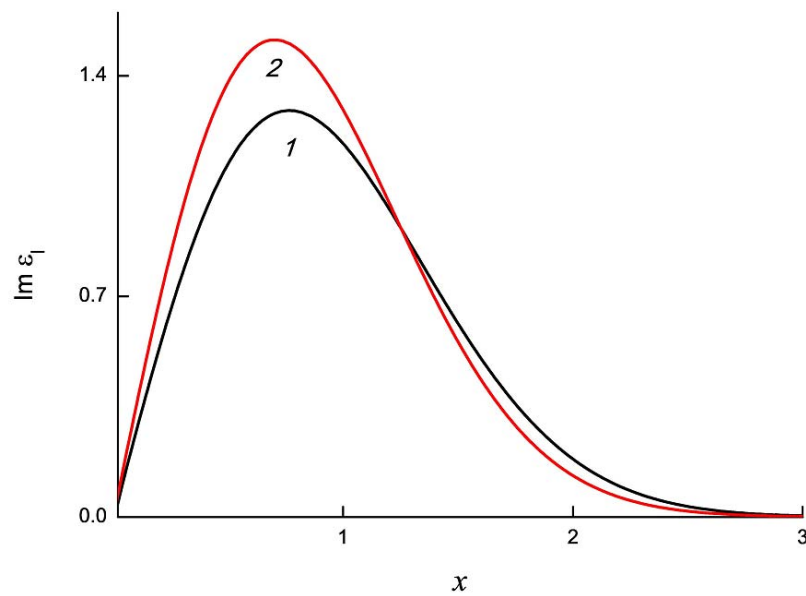


Рис. 8. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $q=1$, $x_p=1$, $y=0.01$.

Из рисунков 1 и 2 видно, что действительная часть диэлектрической функции имеет сначала минимум, а затем – максимум. Мнимая часть имеет только один максимум. Кроме того, имеют место предельные соотношения

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \varepsilon_l(q) = 1, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \varepsilon_l(q) = 0,$$

т.е. действительная часть диэлектрической функции и квантовой и классической плазмы с ростом q стремится к единице, а мнимая часть стремится к нулю. При этом при больших q для действительных и мнимых частей выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \varepsilon_l^Q(q) < \operatorname{Re} \varepsilon_l^C(q), \quad \operatorname{Im} \varepsilon_l^Q(q) < \operatorname{Im} \varepsilon_l^C(q).$$

Здесь введены обозначения: $\varepsilon_l^Q(q)$ для диэлектрической функции квантовой плазмы, а $\varepsilon_l^C(q)$ – для диэлектрической функции классической плазмы.

Перейдем к анализу графиков на рис. 3 и 4, где представлено поведение действительной и мнимой частей диэлектрической функции при $x = 1$, т.е. когда частота колебаний электрического поля равна: $\omega = 0.1\omega_p$. Поведение действительной и мнимой частей диэлектрической функции классической плазмы остается при этом прежним. Но поведение действительной и мнимой частей диэлектрической функции квантовой плазмы обнаруживает аномальное поведение. Так, теперь действительная часть диэлектрической функции имеет два минимума и два максимума. Мнимая часть теперь имеет два максимума и один минимум.

На рис. 4–8 проведем графическое исследование действительной и мнимой частей диэлектрической функции как функции безразмерной частоты колебаний электрического поля. В этом случае действительная часть диэлектрической функции имеет один минимум, а мнимая часть – один максимум. Заметим, что при возрастании волнового числа различие значений и действительной, и мнимой частей для квантовой и классической плазмы начинает возрастать.

На рис. 9 и 10 проводится изучение действительной (рис. 9) и мнимой (рис. 10) частей диэлектрической функции квантовой плазмы как функции безразмерной частоты колебаний электрического поля.

Из этих рисунков видно, что с ростом величины волнового числа диапазон значений и действительной части, и мнимой части диэлектрической функции начинает уменьшаться. При этом значения максимума и минимума действительной части начинают сближаться и уже при $q = 1$ действительная часть диэлектрической функции преобразуется в монотонно убывающую функцию. Максимум мнимой части действительной функции начинает сдвигаться вправо, значения максимума начинают уменьшаться и максимум нивелируется.

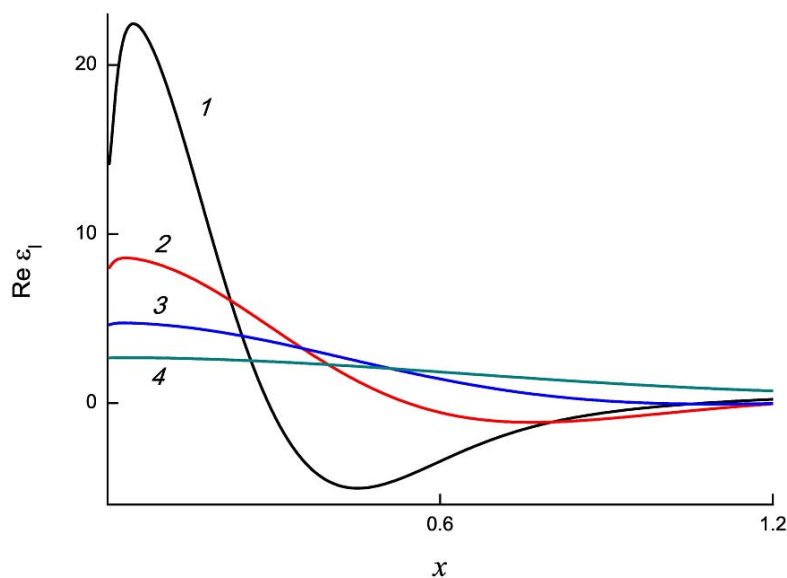


Рис. 9. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x_p = 1$, $y = 0.01$. Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа $q = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$.

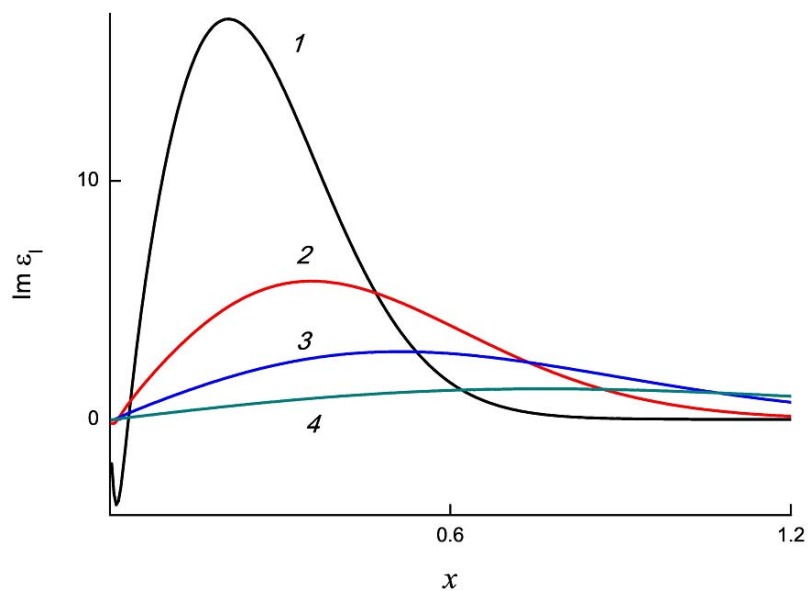


Рис. 10. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x_p = 1$, $y = 0.01$. Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа $q = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$.

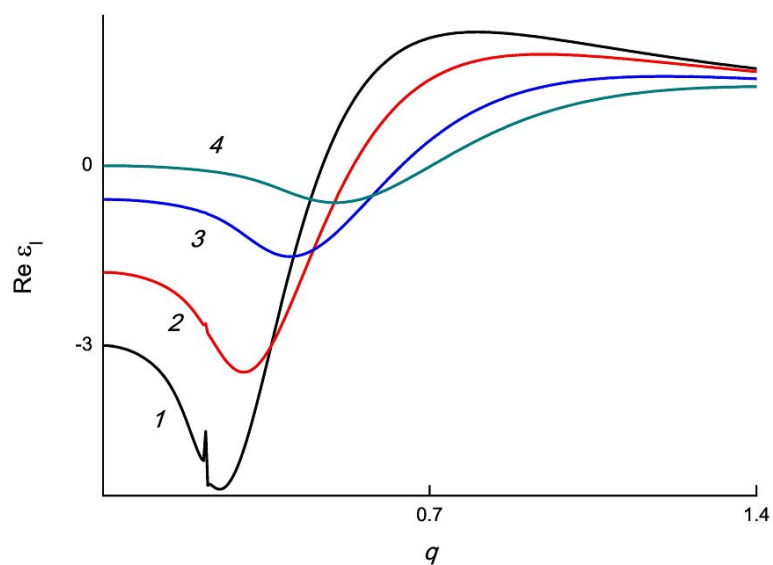


Рис. 11. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x_p = 1$, $y = 0.01$. Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа $x = 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$.

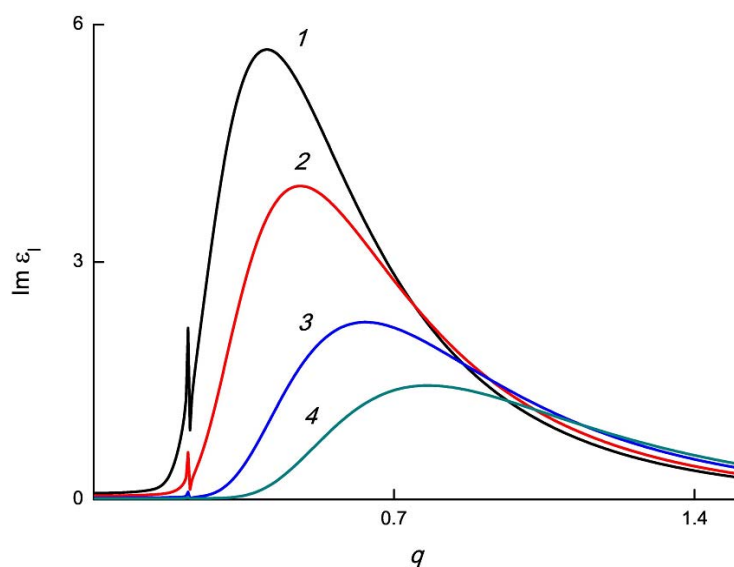


Рис. 12. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы, $x_p = 1$, $y = 0.01$. Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа $x = 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$.

Заключение

В настоящей работе приводится вывод формул для вычисления продольной диэлектрической функции столкновительной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа. Как частный случай выписывается диэлектрическая функция максвелловской плазмы. Дается графическое сравнение действительной и мнимой частей диэлектрической функции квантовой и классической плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю., Силин В.П. О спектрах систем взаимодействующих частиц // Ж. эксп. и теор. физ. 1952. Т. 23. С. 151–286.
2. Lindhard J. On the properties of a gas of charged particles // Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 1954. V. 28, №8. P. 1–57.
3. Mermin N.D. Lindhard Dielectric Functions in the Relaxation-Time Approximation // Phys. Rev. B. 1970. V. 1, №5. P. 2362–2363.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Продольная проницаемость квантовой вырожденной столкновительной плазмы // Теор. и матем. Физика. 2011. Т. 169, №3. С. 431–443.
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме // Физика плазмы. 2012. Т. 38, №11. С. 977–986.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме в подходе Мермина // Теор. и матем. физика. 2013. Т. 175, №1. С. 134–144.
7. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Longitudinal electric conductivity and electric permeability in quantum plasma with variable frequency of collisions in Mermin approach // arXiv: 1212.5659v1 [physics.plasma-ph] 22 Dec 2012, 26 p.
8. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Longitudinal electric conductivity and electric permeability in quantum plasma with constant collision frequency in Mermin approach // arXiv: 1212.6260v1 [physics.plasma-ph] 26 Dec 2012, 27 p.
9. Dressel M. Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter / Dressel M., Grüner G. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
10. Shukla P.K., Eliasson B. Nonlinear aspects of quantum plasma physics // Uspekhy Fiz. Nauk, 53(1) 2010; [V. 180. №1, 55–82 (2010) (in Russian)].
11. Wierling A. Interpolation between local field corrections and Drude model by a generalized Mermin approach // arXiv: 0812.3835v1 [physics.plasma-ph] 19 Dec 2008.

LONGITUDINAL DIELECTRIC PERMEABILITY OF THE QUANTUM MAXWELL COLLISIONAL PLASMA

Y. Alabina¹, A. Bugrimov¹, A. Latyshev^{1,2}, A. Yushkanov¹

¹Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

²*Sholokhov Moscow State University for the Humanities
18, Tashkentskaya st., Moscow, 109444, Russia*

Abstract. Research dielectric function for collisional plasmas with any degree of degeneracy of electronic gas is carried out. By special limiting transition the dielectric function of Maxwell plasmas is received. Research and comparison of longitudinal dielectric functions of quantum and classical Maxwell collisional plasmas is resulted.

Keywords: quantum plasma, Maxwell plasma, Fermi–Dirac distribution, electric conductivity.

УДК 533.72

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФУЗИОФЕРЕЗА

В.Е. Ефремов

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Автор продолжает построение теории нестационарного диффузиофореа крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение диффузионной задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарной части этой задачи получена окончательная формула для определения стационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве лапласовых изображений.

Ключевые слова: нестационарный диффузиофореа, крупная сферическая частица, диффузионная задача.

В работе [1] была решена гидродинамическая задача в теории нестационарного диффузиофореа крупной твердой нелетучей частицы сферической формы радиуса R , взвешенной в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси. В данной работе приведем решение диффузионной задачи.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси, имеет вид:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_{12} \Delta_{r\theta} C_1 + \frac{\partial [\nabla C_1(t)]_{\infty}}{\partial t} r \cos \theta. \quad (1)$$