УДК 338

Захаров В.Н.
Московский государственный областной университет,

Судариков Г.В.
Московская академия рынка труда и информационных технологий (МАРТИТ)

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ

Аннотация. Рассмотрено решение экономических задач оптимизации по математическим моделям. В качестве математических моделей выбраны нелинейные зависимости. Сформулированы четыре вида постановки задач оптимизации. Рассмотрены задачи поиска экстремальных и заданных значений функции цели в области определения в виде гиперкуба при наличии и без функциональных ограничений. Разработан основной алгоритм и программа решения задач на компьютере. Предусмотрена возможность вставки дополнительных программных модулей при изменении постановки задачи и исследовании алгоритма. Решены тестовые задачи.
Ключевые слова: количественные методы прогнозирования, математическая модель, математическое программирование, нелинейные функции, оптимизация, программирование на VBA, программные модули.

V. Zakharov
Moscow State Regional University

G. Sudarikov
Moscow Academy of Market Labor and information Technologies (MAML&IT)

TOWARDS THE ISSUE OF OPTIMIZATION ON MATHEMATICAL MODELS

Abstract. The article discusses the solution of economic optimization problems through mathematical modeling. Nonlinear dependences are chosen as mathematical models. Four types of optimization problems are formulated. The authors consider the tasks of search for extreme and preset values of the function of purpose in the range of definition in the form of a hyper cube with and without functional restrictions. The main task-implementing algorithm and a computer program are developed and tested. The possibility of inserting some additional program modules is provided in case of task changing.
Keywords: qualitative methods of forecasting, mathematical model, mathematical programming, nonlinear functions, optimization, VBA programming, program modules.

Количественные методы прогнозирования постоянно используются при решении экономических задач. В этом случае на практике часто прибегают к эконометрическому моделированию экономических процессов, при котором модели представлены в виде «тысячи уравнений», решаемых только с применением компьютеров [2, с. 82; 3, с. 58; 5, с. 242]. Если при построении моделей используются методы экстремального планирования эксперимента [3, с. 59; 6], то вначале проводится статистическая обработка опытных данных и оценка статистических характеристик изучаемого процесса, затем выполняется математическое моделирование, в результате которого получают модели в виде уравнений регрессии или систем таких уравнений. Эти уравнения могут быть представлены в линейном виде [3, с. 60] относительно коэффициентов регрессии:

$\hat{y}=F(x_1, x_2,\ldots,x_n;b_0,b_1,\ldots b_m)=f_0(x_1, x_2,\ldots,x_n;b_0,b_1,\ldots b_m)$ +

$\mathbf{f_1(x_1, x_2,\ldots,x_n;b_0,b_1,\ldots bm) +\ldots+ fk(x1, x2,\ldots,xn;b0,b1,\ldots bm)},$ (1)

где f0, f1, … , fk - некоторые функции заданного вида от независимых переменных и коэффициентов регрессии. Независимые переменные изменяются в заданных пределах:

$\mathbf{ximin \le xi \le ximax\ ;\ i=1,2,\ldots,n}$ (2)

По уравнениям вида (1), являющимся экономическими моделями, может быть решен ряд практических задач. Рассмотрим четыре варианта постановки задач.

1. Задачи о нахождении стационарных значений без функциональных ограничений: в гиперкубе $\mathbf{x_{imin} \le x_i \le x_{max}}$; **i=1,2,…,n** определить такие значения $\mathbf{x_{i0}}$, которые обеспечивают требуемое значение целевой функции

$F1_{треб}(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m)=Const1.$

2. Задачи о нахождении экстремальных значений без функциональных ограничений: в гиперкубе $\mathbf{x_{imin} \le x_i \le x_{max}}$; **i=1,2,…,n** определить такие значения $\mathbf{x_{i0}}$, которые обеспечивают экстремальное (min/max) **значение** целевой функции $\mathbf{F2_{треб}(x_{10}, x_{20},\ldots x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m) \to}$ **min/max.**

3. Задачи о нахождении стационарных значений с функциональными ограничениями: в гиперкубе $\mathbf{x_{imin} \le x_i \le x_{imax}}$; **i=1,2,…,n** определить такие значения $\mathbf{x_{i0}}$, которые обеспечивают требуемое значение целевой функции

$\mathbf{F3_{треб}(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m)=Const3}$ при наличии функциональных ограничений $\mathbf{F4j(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m)}$ {**j**-ый знак отношения} **=Const4j,** где {**j**-ый знак отношения} выбирается из списка: =, <>, <=, >=, <=, <, > .

4. Задачи о нахождении экстремальных значений с функциональными ограничениями: в гиперкубе $\mathbf{x_{imin} \le x_i \le x_{imax}}$; **i=1,2,…,n** определить такие значения $\mathbf{x_{i0}}$, которые обеспечивают экстремальное (min/max) значение целевой функции $\mathbf{F5_{треб}(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m) \to}$ **min/max** при наличии функциональных ограничений $\mathbf{F6j(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m)}$ {**j**-ый знак отношения} **=Const6j** , где {**j**-ый знак отношения} выбирается из списка: =, <>, <=, >=, <=, <, > .

Решение задач представленных типов зависит от установленных значений **Const1**, **Const4j, Const6j** и видов функциональных ограничений:

$\mathbf{F4j(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m)}$, $\mathbf{F6j(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0};b_0,b_1,\ldots b_m)}$. Нелинейные функции **F1, F2, F3, F4j, F5, F6j** от **n** переменных, записанные в виде нелинейных уравнений регрессии, могут иметь локальные экстремумы и, поэтому, «простые» методы поиска решения методами итераций, градиента, наискорейшего спуска и рядом других [1; 6] могут не привести к наилучшему глобальному решению. Рассмотрим, например, одномерную функцию

$Y=x^3-11.1x^2+13.76x+65.56$, (3)

график которой показан на рисунке. Поиск минимального значения **Y(x)** из «неудачной» начальной точки с координатами x=10; y=93.16 по программе «Поиск решения» в MS Excel [8] методом итераций при -6<x<10 приводит к решению: x=6.7172; y=-39.7667. Это решение, очевидно, является локальным экстремумом. Также очевидно, что ненайденный глобальный экстремум находится в точке: x=-10; y=-2182.04 .

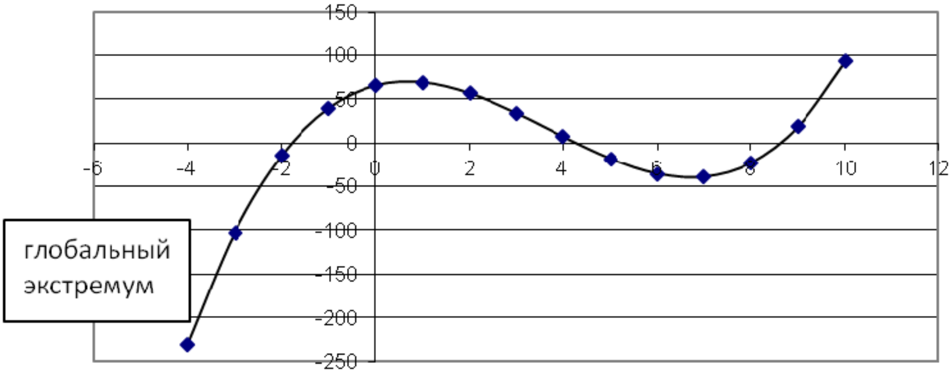

Рис.1. График функции $Y=x^3-11.1x^2+13.76x+65.56$

Для функций **n** переменных, записанных в виде нелинейных уравнений регрессии вида (1), задача нахождения глобального экстремума может быть более сложной и требует применения специальных алгоритмов. Для проведения исследования был разработан алгоритм «Многократного случайного поиска в стягивающихся окрестностях» и написана программа «Поиск» на VBA [4; 7] для нахождения глобальных экстремумов в задачах с описанными выше четырьмя постановками задачи. Применение программы для решения задач вариантов 1 и 2 (см. выше постановку задачи) приводит к уверенному нахождению глобального экстремума. Например, для рассмотренной выше функции **Y(x)** по уравнению (3) при -6<x<10 определяется глобальный экстремум в точке: x=-10; y=-2182.04 .

Для решения задач вариантов 3 и 4 применение программы предполагает включение в состав основного алгоритма дополнительных модулей (подпрограмм), вычисляющих значения нелинейных функций и нелинейных ограничений, а также модулей, позволяющих изменять алгоритм с исследовательскими целями. Написание и включение в состав основной программы новых модулей возможно благодаря наличию исходного текста основной программы. Проведенные исследования показали возможность применения алгоритма для решения задач всех четырех вариантов постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982. – 583 с.

2. Захаров В.Н., Судариков Г.В. Инструменты решения задачи планирования производства // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Экономика». 2012. №3. – С. 82–85.
3. Захаров В.Н., Судариков Г.В. Принятие управляющих решений на основе математических моделей // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Экономика». 2010. № 3. – С. 58–61.
4. Лукин С.Н. Visual Basic. – М.: Диалог-МИФИ, 2009. – 448 с.
5. Мескон М.Х., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. – М.: Дело, 1992. – 702 с.
6. Нинул А.С. Оптимизация целевых функций: аналитика, численные методы, планирование эксперимента. – М.: Физматлит, 2009. – 336 с.
7. Слепцова Л. Программирование на VBA в Excel 2010. – М.: Диалектика, 2010. – 432 с.
8. Уокенбах Дж. MS Excel: библия пользователя. – М.: Диалектика, 2014. – 368 с.