

УДК 533.72

## К ТЕОРИИ ПОВЕДЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА НАД КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.А. Акимова, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Пусть разреженный газ занимает полупространство  $x > 0$  над твердой плоской пластиной. Предполагается, что эта пластина совершает в своей плоскости гармонические колебания вдоль оси  $y$ . Вторая задача Стокса состоит в решении кинетического уравнения Больцмана, описывающего поведение разреженного газа. В работе строится аналитическое решение модельного кинетического уравнения в предположении диффузного отражения молекул от пластины. Находится функция распределения газовых молекул и строится массовая скорость газа в полупространстве. Находится значение массовой скорости непосредственно у стенки.

*Ключевые слова:* постановка задачи Стокса, разделение переменных, собственные решения, непрерывный и дискретный спектр, точное решение, скорость газа.

Задача о поведении газа над стенкой, колеблющейся в своей плоскости, была рассмотрена Дж. Г. Стоксом [24]. Задача решалась гидродинамическим методом без учета эффекта скольжения. Обычно такую задачу называют второй задачей Стокса [1], [11], [12], [15], [19]. В последние годы на тему этой задачи появился ряд публикаций. В работе [25] задача рассматривается для любых частот колебания поверхности. Из кинетического БГК получено уравнение типа гидродинамического. Рассматриваются гидродинамические граничные условия. Вводится коэффициент, связывающий скорость газа на поверхности со скоростью поверхности. Показано, что в случае высокочастотных колебаний сила трения, действующая на поверхность, не зависит от частоты.

В работе [22] получены коэффициенты вязкостного и теплового скольжения с использованием различных модельных уравнений. Используются как максвелловские граничные условия, так и граничные условия Черчиньяни — Лэмпис.

В статье [18] рассматривается газовый поток над бесконечной пластиной, совершающей гармонические колебания в собственной плоскости. Найдена скорость газа над поверхностью и сила, действующая на поверхность со стороны газа. Для случая низких частот задача решена на основе уравнения Навье — Стокса. Для произвольных скоростей колебаний поверхности задача решена численными методами на основе кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук).

Работа [16] является экспериментальным исследованием. Изучается поток газа, создаваемый механическим резонатором при различных частотах колебания резонатора. Эксперименты показывают, что при низких частотах колебаний резонатора, действующая на него со стороны газа сила трения прямо пропорциональна частоте колебания резонатора. При высоких частотах колебания резонатора ( $10^8$  Гц) действующая на него сила трения от частоты колебаний не зависит.

В последнее время задача о колебаниях плоской поверхности в собственной плоскости изучается и для случая неньютоновских жидкостей [12] и [15].

В статье [23] рассматривается пример практического применения колебательной системы, подобной рассматриваемой во второй задаче Стокса, в области нанотехнологий.

В диссертации [5] были предложены два решения второй задачи Стокса, учитывающие весь возможный диапазон коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Эти решения отвечают соответственно гидродинамическому и кинетическому описанию поведения газа над колеблющейся поверхностью в режиме со скольжением.

В наших работах [13] и [14] для второй задачи Стокса отыскиваются собственные функции и соответствующие собственные значения, отвечающие как дискретному, так и непрерывному спектрам. Исследована структура дискретного и непрерывного спектров. Развивается математический аппарат, необходимый для аналитического решения задачи и приложений.

1. Линеаризованное кинетическое уравнение для задачи о колебаниях газа. Задача о колебаниях газа решается в линеаризованной постановке. Линеаризация задачи проведена при условии, что скорость газа много меньше тепловой:  $|u_y(t_1, x_1)| \ll v_T$ , где  $v_T = 1/\sqrt{\beta}$  - тепловая скорость молекул ( $\beta = m/(2kT)$ ), имеющая порядок скорости звука. Пусть разреженный одноатомный газ занимает полупространство  $x > 0$  над плоской твердой поверхностью, лежащей в плоскости  $x = 0$ . Поверхность ( $y, z$ ) совершает гармонические колебания вдоль оси  $y$  по закону  $u_s(t) = u_0 e^{-i\omega t}$ . Требуется построить функцию распределения газовых молекул  $f(t, x, \mathbf{v})$  и найти скорость газа  $u_y(t, x)$ . Функция распределения ищется в виде  $f = f_0(1 + \varphi)$ , где  $f_0$  - абсолютный максвеллиан,  $f_0 = n(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-\beta v^2)$ .

Рассмотрим линеаризованное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \varphi(t, x, \mathbf{v}) = \frac{vm}{kT} v_y u_y(t, x), \quad (1.1)$$

где  $u_y(t, x)$  - скорость газа,

$$u_y(t, x) = \frac{1}{n} \int v_y f(t, x, \mathbf{v}) d^3 v.$$

Здесь  $\nu = 1/\tau$  - частота столкновений газовых молекул,  $\tau$  - время между двумя последовательными столкновениями молекул,  $m$  - масса молекулы,  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - температура газа,  $n$  - числовая плотность (концентрация) газа. Концентрация газа и его температура считаются постоянными в линеаризованной постановке задачи.

Введем безразмерные скорости и параметры: безразмерную скорость молекул:  $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$ , безразмерную массовую скорость  $U_y(t, x) = \sqrt{\beta} u_y(t, x)$ , безразмерное время  $t_1 = \nu t$  и безразмерную скорость колебаний пластины  $U_s(t) = U_0 e^{-i\omega t}$ , где  $U_0 = \sqrt{\beta} u_0$  -

безразмерная амплитуда скорости колебаний границы полупространства. Тогда уравнение (1.1) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}) = 2C_y U_y(t_1, x_1), \quad (1.2)$$

где

$$U_y(t_1, x_1) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_y \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}) d^3 C. \quad (1.3)$$

Заметим, что для безразмерного времени  $U_s(t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1}$ .

С помощью (1.3) кинетическое линейризованное уравнение (1.2) записывается в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}) = \frac{2C_y}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C'^2) C'_y \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}') d^3 C'. \quad (1.4)$$

Сформулируем диффузные граничные условия, записанные относительно  $\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C})$ :

$$\varphi(0, t_1, \mathbf{C}) = 2C_y U_s(t_1), \quad C_x > 0, \quad (1.5)$$

и

$$\varphi(x_1 \rightarrow +\infty, t_1, \mathbf{C}) = 0. \quad (1.6)$$

Итак, граничная задача о колебаниях газа сформулирована полностью и состоит в решении уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) и (1.6).

2. Собственные решения. Учитывая, что колебания пластины рассматриваются вдоль оси  $y$ , будем искать, следуя Черчиньяни [10], функцию  $\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C})$  в виде

$$\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) = C_y H(x_1, t_1, C_x), \quad (2.1)$$

а затем выделим временную переменную, положив далее:

$$H(x_1, t_1, C_x) = e^{-i\omega_1 t_1} h(x_1, C_x). \quad (2.2)$$

Теперь мы получаем уравнение граничную задачу:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) h(x_1, \mu') d\mu', \quad (2.3)$$

где  $z_0 = 1 - i\omega_1$ , и

$$h(0, \mu) = 2U_0, \quad \mu > 0, \quad (2.4)$$

$$h(+\infty, \mu) = 0. \quad (2.5)$$

Разделение переменных в уравнении (2.3) осуществляется следующей подстановкой

$$h_{\eta}(x_1, \mu) = \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad (2.6)$$

где  $\eta$  - параметр разделения, или спектральный параметр.

Подставляя (2.6) в уравнение (2.3) получим характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi z_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu'. \quad (2.7)$$

Если принять нормировку

$$\frac{1}{z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu' \equiv 1, \quad (2.8)$$

то уравнение (2.7) имеет решение

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + e^{\eta^2} \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (2.9)$$

где  $-\infty < \eta, \mu < +\infty$ .

Здесь  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака, символ  $Px^{-1}$  означает главное значение интеграла при интегрировании  $x^{-1}$ ,  $\lambda(z)$  - дисперсионная функция, введенная равенством

$$\lambda(z) = 1 - i\omega_1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\tau^2) d\tau}{\tau - z}.$$

Эту функцию можно преобразовать к виду:  $\lambda(z) = -i\omega_1 + \lambda_0(z)$ , где  $\lambda_0(z)$  - известная функция по теории плазмы,

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - z}.$$

Собственные функции (2.9) называются собственными функциями непрерывного спектра, ибо спектральный параметр  $\eta$  непрерывным образом заполняет всю действительную прямую.

Таким образом, собственные решения уравнения (2.3) имеют вид

$$h_{\eta, \mu} = \exp\left(-\frac{x_1}{\eta} z_0\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu) \right]. \quad (2.10)$$

Собственные решения (2.10) отвечают непрерывному спектру характеристического уравнения, ибо спектральный параметр непрерывным образом пробегает всю числовую прямую. По условию задачи мы ищем решение, невозрастающее вдаль от стенки. В связи с этим, спектром граничной задачи будем называть положительную действительную полуось параметра  $\eta$ :  $\sigma_c = (0, +\infty)$ .

Приведем формулы Сохоцкого для дисперсионной функции:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \pm i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2} - i\omega_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - \mu}.$$

Разность граничных значений дисперсионной функции отсюда равна:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2} i,$$

полусумма граничных значений равна:

$$\frac{\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu)}{2} = -i\omega_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - \mu}.$$

Разложим дисперсионную функцию в ряд Лорана по отрицательным степеням переменного  $z$  в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 - \frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z^4} - \frac{15}{8z^6} - \dots, z \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Из разложения (2.11) видно, что при малых значениях  $\omega_1$  дисперсионная функция имеет два отличающихся лишь знаками комплекснозначных нуля:

$$\pm \eta_0^{(0)}(\omega_1) = \frac{1+i}{2\sqrt{\omega_1}}.$$

Отсюда видно, что при  $\omega_1 \rightarrow 0$  оба нуля дисперсионной функции имеют пределом одну бесконечно удаленную точку  $\eta_i = \infty$  кратности (порядка) два.

Введем выделенную частоту колебаний пластины, ограничивающей газ:

$$\omega_1^* = \max_{0 < \mu < +\infty} \sqrt{-\lambda_0^2(\mu) + s^2(\mu)} \approx 0.733.$$

Эту частоту колебаний будем называть критической.

В [14] показано, что в случае, когда частота колебаний пластины меньше критической, т.е. при  $0 \leq \omega < \omega_1^*$ , индекс функции  $G(t)$  равен 1. Это означает, что число комплексных нулей дисперсионной функции в плоскости с разрезом вдоль действительной оси, равно двум.

В случае, когда частота колебаний пластины превышает критическую ( $\omega > \omega_1^*$ ) индекс функции  $G(t)$  равен нулю:  $\chi(G) = 0$ . Это означает, что дисперсионная функция не имеет нулей в верхней и нижней полуплоскостях. В этом случае дискретных (частных) решений исходное уравнение (2.3) не имеет.

Таким образом, дискретный спектр характеристического уравнения, состоящий из нулей дисперсионной функции, в случае  $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*$  есть множество точек  $\sigma_d = \{\eta_0, -\eta_0\}$ . При  $\omega_1 < \omega_1^*$  дискретный спектр – это пустое множество. При  $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*$  собственными функциями характеристического уравнения являются следующие два решения характеристического уравнения:

$$\Phi(\pm\eta_0, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pm\eta_0}{\pm\eta_0 - \mu}.$$

Под  $\eta_0$  будем понимать тот из нулей дисперсионной функции, который обладает свойством:  $\text{Re}[(1 - i\omega_1)/\eta_0] > 0$ . Для этого нуля убывающее собственное решение уравнения (2.3) имеет вид

$$h_{\eta_0}(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) \frac{\eta_0}{\eta_0 - \mu}.$$

Это означает, что дискретный спектр рассматриваемой граничной задачи состоит из одной точки  $\sigma_d = \{\eta_0\}$  в случае  $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*$ . При  $\omega_1 \rightarrow 0$  оба нуля, как уже указывалось ниже, перемещаются в одну и ту же бесконечно удаленную точку. Это означает, что в этом случае дискретный спектр характеристического уравнения состоит из одной бесконечно удаленной точки кратности два:  $\sigma_d(0) = \eta_i = \infty$  и является присоединенным к непрерывному спектру. Этот спектр является также и спектром рассматриваемой граничной задачи. Однако, в этом случае дискретных (частных) решения ровно два:  $h_1(x_1, \mu) = 1$  и  $h_2(x_1, \mu) = x_1 - \mu$ .

3. Аналитическое решение граничной задачи. Составим общее решение уравнения (2.3) в виде суммы частного (дискретного) решения, убывающего вдали от стенки, и интеграла по непрерывному спектру от собственных решений, отвечающих непрерывному спектру:

$$h(x_1, \mu) = \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) a(\eta) d\eta. \quad (3.1)$$

Здесь  $a_0$  - неизвестный постоянный коэффициент, называемый коэффициентом дискретного спектра, причем при  $\chi = 0$  этот коэффициент равен нулю:  $a_0 = 0$ ,  $a_\eta$  - известная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра,  $\Phi(\eta, \mu)$  - собственные функции характеристического уравнения, отвечающие непрерывному спектру и нормировке (2.8).

Разложение (3.1) можно представить в явном виде:

$$h(x_1, \mu) = \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1}{\eta} z_0\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu) \right] a(\eta) d\eta. \quad (3.2)$$

Функция  $a(\eta)$  подлежит нахождению из граничных условий (2.4) и (2.5).

Разложение (3.2) можно представить в классическом виде:

$$h(x_1, \mu) = \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\mu} + \mu^2\right) \lambda(\mu) a(\mu) \theta_+(\mu), \quad (3.3)$$

где  $\theta_+(\mu)$  - функция Хэвисайда,

$$\theta_+(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 0, \\ 0, & \mu < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что разложение (3.3) автоматически удовлетворяет граничному условию (2.5) вдали от стенки. Подставим разложение (3.3) в граничное условие (2.4). Получаем одностороннее сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2) \lambda(\mu) a(\mu) \theta_+(\mu) = 2U_0, \quad \mu > 0. \quad (3.4)$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - z}. \quad (3.5)$$

$$\lambda^+(\mu) \left[ N^+(\mu) - 2U_0 + \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] = \lambda^-(\mu) \left[ N^-(\mu) - 2U_0 + \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] = 0, \quad \mu > 0. \quad (3.6)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$X^+(\mu) = G(\mu) X^-(\mu), \quad G(\mu) = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0.$$

Решение задачи Римана было рассмотрено в [14] и дается интегралом типа Коши:

$$X(z) = \frac{1}{z^\lambda} \exp V(z), \quad (3.7)$$

где  $V(z)$  понимается как интеграл типа Коши

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{[\ln G(\tau) - 2\pi i \chi] d\tau}{\tau - z}. \quad (3.8)$$

Вернемся к решению неоднородной задачи (3.6), предварительно преобразовав с помощью (3.7) и (3.8) ее к виду:

$$X^+(\mu) \left[ N^+(\mu) - 2U_0 + \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] - X^-(\mu) \left[ N^-(\mu) - 2U_0 + \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] = 0, \quad \mu > 0. \quad (3.9)$$

Учитывая поведение всех входящих в краевое условие (3.9) функций в комплексной плоскости и в бесконечно удаленной точке получаем общее решение, из которого находим

$$N(z) = 2U_0 + \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(z - \eta_0)} + \frac{1}{X(z)} \left[ C_0 + \frac{C_1}{z - \eta_0} \right], \quad (3.10)$$

где  $C_0, C_1$  – произвольные постоянные, причем при  $\chi = 0$   $C_1 = 0$ , а при  $\chi = 1$   $C_0 = 0$ .

Потребуем, чтобы общее решение (3.10) имело те же аналитические свойства, что и вспомогательная функция (3.5). На этом пути получаем, что в случае  $\chi = 0$

$$N(z) = 2U_0 \left[ 1 - \frac{1}{X(z)} \right], \quad (3.11)$$

а в случае  $\chi = 1$   $a_0 = 2U_0 \sqrt{\pi} / (\eta_0 X(\eta_0))$  и, следовательно,

$$N(z) = 2U_0 + \frac{2U_0}{X(\eta_0)(z - \eta_0)} - \frac{2U_0}{X(z)(z - \eta_0)}. \quad (3.12)$$

Искомый неизвестный коэффициент непрерывного спектра с помощью (3.11) и (3.12) находится из формулы Сохоцкого для вспомогательной функции (3.5). В случае

$\chi = 0$  получаем:

$$a_\eta = \frac{2U_0 \sin q(\eta)}{\sqrt{\pi} \eta X(\eta)}, \quad (3.13)$$

где

$$q(\eta) = -i(\ln G(\eta) - 2\pi i) / 2.$$

На этом этапе доказательство разложения (3.1) (или (3.2)) закончено.

4. Функция распределения. Рассмотрим функцию  $h(x_1, \mu)$  для летящих к стенке молекул непосредственно у стенки, т.е. при  $x_l = 0$ ,  $\mu < 0$ .

С помощью формул (3.13) и (3.14) представим разложение (3.1) в явном виде. При



$\chi = 0$

$$\frac{h(0, \mu)}{2U_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin q(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta - \mu)}, \quad (4.1)$$

а при  $\chi = 1$ :

$$\frac{h(0, \mu)}{2U_0} = \frac{1}{X(\eta_0)(\eta_0 - \mu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin q(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta - \eta_0)(\eta - \mu)}. \quad (4.2)$$

Интегралы из (4.1) и (4.2) вычисляются аналитически с помощью интегральных представлений из [14]. В результате получаем, что при  $\chi = 0$ :

$$\frac{h(0, \mu)}{2U_0} = 1 - \frac{1}{X(\mu)}, \quad \mu < 0, \quad (4.3)$$

а при  $\chi = 1$ :

$$\frac{h(0, \mu)}{2U_0} = 1 - \frac{1}{(\mu - \eta_0)X(\mu)}, \quad \mu < 0. \quad (4.4)$$

Равенства (4.3) и (4.4) означают, что функция распределения на границе полупространства построена в явном виде полностью.

5. Скорость разреженного газа в полупространстве и непосредственно у колеблющейся плоскости. Согласно (2.1) и (2.2) выражение для скорости упрощается:

$$U_y(x_1, t_1) = \frac{e^{-i\omega_1 t_1}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} h(x_1, \mu') d\mu'. \quad (5.1)$$

Начнем со случая, когда индекс задачи равен нулю. В этом случае частота колебаний пластины  $\omega_1 \in (\omega_1^*; +\infty)$ .

Воспользуемся разложением (3.1). Подставим (3.1) в (5.1) и поменяем порядок интегрирования. Затем, используя нормировочное соотношение (2.8), приходим к равенству:

$$U_y(x_1, t_1) = \frac{e^{-i\omega_1 t_1}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1}{\eta} z_0\right) a(\eta) d\eta. \quad (5.2)$$

Теперь воспользуемся формулой (3.13) для коэффициента непрерывного спектра. С учетом (5.2) получим, что массовая скорость газа в полупространстве равна:

$$U_y(x_1, t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} \frac{z_0}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1}{\eta} z_0\right) \frac{\sin q(\eta)}{\eta X(\eta)} d\eta. \quad (5.3)$$

Вычислим значение массовой скорости непосредственно вблизи у стенки. Из фор-

мулы (5.3) получаем, что

$$U_y(0, t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} \frac{z_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin q(\eta)}{\eta X(\eta)} d\eta. \quad (5.4)$$

Для вычисления интеграла из (5.4) воспользуемся интегральным представлением из [14]. С использованием (3.8) получаем, что массовая скорость в полупространстве вычисляется по формуле

$$U_y(0, t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} z_0 \left( 1 - \frac{1}{X(0)} \right). \quad (5.5)$$

Для нахождения величины факторизующей функции в нуле воспользуемся теперь формулой факторизации дисперсионной функции [14]:  $\lambda(z) = \lambda_{\infty} X(z) X(-z)$ , где  $\lambda_{\infty} = \lambda(\infty) = -i\omega_1$ .

Замечая, что  $\lambda(0) = 1 - i\omega_1$ , находим:  $X^2(0) = \lambda(0) / \lambda_{\infty} = 1 + i\nu / \omega$ . Согласно (5.5) значение амплитуды скорости газа у стенки равно:

$$U_y(0, t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} W,$$

где

$$W = (1 - i\omega_1) \frac{\sqrt{\omega_1 + i} - \sqrt{\omega_1}}{\sqrt{\omega_1 + i}}.$$

Значение размерной скорости непосредственно у стенки дается выражением:

$$u_y(0, t) = \nu_T U_0 e^{-i\omega t} W.$$

Полагая, что  $W = |W| e^{i\varphi}$ , запишем

$$U_y(0, t_1) = U_0 |W| e^{-i(\omega_1 t_1 - \varphi)},$$

где  $|W|$  - безразмерная амплитуда скорости газа (см. рис.1), а  $\varphi = \arg W$  - сдвиг фазы скорости (см. рис.2).

Теперь рассмотрим случай, когда индекс задачи равен единице, т.е. когда параметр  $\omega_1 \in [0; \omega_1^*)$ . Опуская длительные вычисления, приведем выражение скорости газа в полупространстве:

$$U_y(x_1, t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} z_0 \left[ \frac{e^{-x_1 z_0 / \eta_0}}{\eta_0 X(\eta_0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x_1 z_0 / \eta} \sin q(\eta) d\eta}{\eta X(\eta)(\eta - \eta_0)} \right], \quad (5.6)$$

и непосредственно у стенки:

$$U_y(0, t_1) = U_0 e^{i\omega_1 t_1} z_0 \left( 1 + \frac{1}{\eta_0 X(0)} \right). \quad (5.7)$$

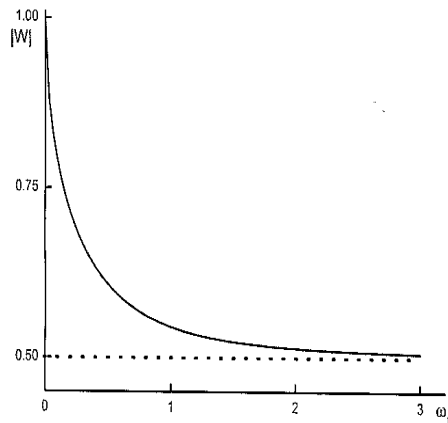


Рис.1. Зависимость величины амплитуды скорости газа непосредственно у стенки от частоты колебаний ограничивающей газ плоскости

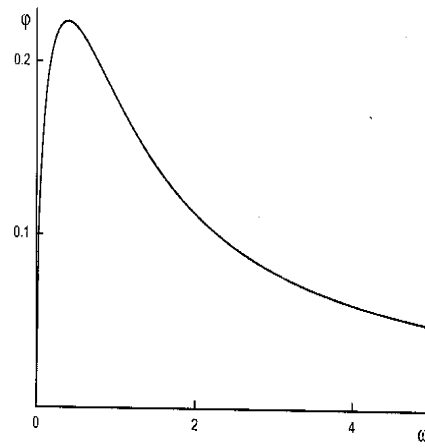


Рис.2. Зависимость величины сдвига фазы скорости газа непосредственно у стенки от частоты колебаний ограничивающей газ плоскости

Для вычисления величины  $X(0)$  из (5.7) воспользуемся формулой факторизации:  $\lambda(z) = i\omega_1(z^2 - \eta_0^2)X(z)X(-z)$ , которая доказана в [14]. Из этой формулы при  $z = 0$  находим, что  $\lambda(0) = -i\omega_1\eta_0^2 X^2(0)$ , откуда, учитывая, что  $\lambda(0) = z_0$ , получаем:  $X(0) = \sqrt{iz_0 / \omega_1\eta_0^2}$ . Следовательно, согласно (5.7) для безразмерной скорости газа получаем

$$U_y(0, t_1) = U_0 |W| e^{-i(\omega_1 t_1 - \varphi)}, \quad \text{где } W = z_0 + (1-i)\sqrt{\frac{\omega_1 z_0}{2}}, \quad (5.8)$$

$|W|$  - амплитуда скорости, а  $\varphi = \arg W$  - сдвиг фазы скорости.

Согласно (5.8) выражение для размерной скорости при малых частотах непосредственно у стенки таково:

$$u_y(0, t_1) = \nu_T U_0 \operatorname{Re} \left[ e^{-i\omega_1 t_1} \left( z_0 + \sqrt{z_0 \omega_1} \cdot e^{-i\pi/4} \right) \right]$$

или

$$u_y(0, t_1) = \nu_T U_0 \operatorname{Re} \left[ e^{-i\omega_1 t_1} \left( z_0 + (1-i)\sqrt{\frac{\omega_1 z_0}{2}} \right) \right].$$

Заключение. В настоящей работе сформулирована и решена аналитически вторая

задача Стокса — задача о поведении разреженного газа, занимающего полупространство над стенкой, совершающей гармонические колебания. Рассматриваются диффузные граничные условия. Используется уравнение, полученное в результате линеаризации модельного кинетического уравнения Больцмана. На основе аналитического решения найдена скорость разреженного газа в полупространстве и непосредственно у стенки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрашкин, А.А., Якубович Е.И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 175 с.
2. *Гахов, Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука. 1987. 677 с.
3. *Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн// ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып.4. С. 134-135.
4. *Дудко, В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе// ТВТ. 2009. Т. 47. №. 2. Р. 262-268.
5. *Дудко, В.В.* Скольжение разреженного газа вдоль неподвижных и колеблющихся поверхностей: Дисс... канд. физ-матем. наук. М. 2010. 108 с.
6. *Жаринов, В.В., Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Физмалит. 1999. 399 с.
7. *Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. VIII. М. Физматлит (2003). 656 с.
8. *Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М. Физматлит (1987). 735 с.
9. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Аналитические методы в кинетической теории. Монография. Изд-во МГОУ. М. 2008. 280 с.
10. *Черчиньяни, К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир. 1978. 495 с.
11. *Шлихтинг, Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.
12. *Ai L., Vafai K.* An Investigation of Stokes' Second Problem for Non Newtonian Fluids // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, V. 47. 2005. P. 955 - 980.
13. *Akimova, V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part I: eigenvalues and eigensolutions//ArXiv: 1111.3429v1 [math-ph] 15 Nov 2011. 27 pp.
14. *Akimova, V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part II: mathematical apparatus of solving of problem//ArXiv: 1111.5182v1 [math-ph] 22 Nov 2011. 26 pp.
15. *Asghar, S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T.* Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid, Math. Probl. Eng. V. 2006, Article ID 72468. 8 p.
16. *Cleland, A.N., Roukes M.L.* Ananometre-scale mechanical electrometer // Nature. Vol. 392. 1998. P. 160-162.
17. *Graebel, W.P.* Engineering Fluid Mechanics. New York. Taylor & Francis. 2001. 752 p.
18. *Karabacak, D.M., Yakhot V., and Ekinici K.L.* High-Frequency Nanofluidics: An Experimental Study using Nanomechanical Resonators, Phys. Rev. Lett. 98. 2007. PP 254505.
19. *Khan M., Anjum Asia, Fetecau C.* On exact solutions of Stokes second problem for a Burgers' fluid, I. The case  $\gamma < \lambda^2/4$ . // J.Appl. Math. and Phys. (ZAMP). Published online: 26 August 2009.

20. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Skin effect with arbitrary specularly in Maxwellian Plasma// J. of Math. Phys. 2010. V. 51. P. 113505-1-113505-10
21. *Latyshev, A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose - Einstein condensate // Theor. and Mathem. Physics, 165(1): 1359 - 1371 (2010).
22. *Sharipov, F. and Kalempa D.* Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency// Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium, edited by M.S.Ivanov and A.K.Rebrov. Novosibirsk, 2007. P. 1140-1145.
23. *Steinhell, E., Scherber W., Seide M., Rieger H.* Investigation on the interaction of gases and well defined solid surfaces with respect to possibilities for reduction of aerodynamic friction and aerothermal heating // Rarefied gas dynamics. Ed. J.L. Potter. N.Y.: Acad. press. 1977. P. 589-602.
24. *Stokes, G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851. Math. and Phys. Papers III. Cambridge. 1901. P. 1–141.
25. *Yakhot, V., Colosqui C.* Viscoelastic–Elastic Transition in the "Stokes' Second Problem" in a High Frequency Limit. // arXiv:nlin.CD/0609061.

## **TO THE THEORY OF BEHAVIOUR RAREFIED GAS OVER THE FLUCTUATING SURFACE**

**V. Akimova, A. Latyshev, A. Yushkanov**

*Moscow Region State University  
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* Let the rarefied gas occupies half-space  $x > 0$  over a firm flat plate. It is supposed, that this plate makes in the plane harmonious fluctuations along an axis  $y$ . Second problem Crocca consists in the decision of the kinetic Boltzmann equation describing behavior of rarefied gas. In work the analytical decision of the modeling kinetic equation in the assumption diffusive reflexions of molecules from a plate is under construction. There is a function of distribution of gas molecules and mass speed of gas in half-space is under construction. There is a value of mass speed directly at a wall.

*Keywords:* statement of second Stokes problem, separation of variables, eigen solutions, continuous and discrete spectrum, exact decision, velocity of gas.