

УДК 533.72

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

С.В. Гулакова, В.Н. Попов

*Северный (Арктический) федеральный университет (Архангельск)
163002, Архангельск, Набережная Северной Двины, 17*

Аннотация. В рамках кинетического подхода построено аналитическое решение задачи о течении Пуазейля. В качестве основного уравнения используется линеаризованное уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения. Построен профиль массовой скорости газа в канале и вычислена приходящаяся на единицу ширины канала величина потока массы газа. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением. Установлены границы их применимости.

Ключевые слова: течение Пуазейля, модельные кинетические уравнения, гидродинамика со скольжением.

ВВЕДЕНИЕ

Выбор математического аппарата, используемого для описания течений газа в каналах, существенным образом зависит от соотношения средней длины свободного пробега молекул газа l_g и расстояния D' между его стенками. При $D' \gg l_g$ можно использовать гидродинамический подход, основанный на решении системы уравнений механики сплошной среды с классическими граничными условиями прилипания. В случае же, когда $D' \approx l_g$, необходимо использовать кинетический подход, в основе которого лежит решение кинетического уравнения Больцмана с микроскопическими граничными условиями, которым должна удовлетворять функция распределения молекул газа по координатам и скоростям на стенках канала [1]. Трудности, связанные с использованием кинетического подхода, обусловлены сложностью самого уравнения Больцмана. Даже при его замене модельным кинетическим уравнением, описание течения газа в канале сводится к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений. В итоге, как сама функция распределения, так и макропараметры газа записываются в виде рядов Неймана, число учитываемых членов которых увеличивается по мере того, как уменьшается расстояние между стенками канала [2]. В силу этого интерес представляет получение на основе точных аналитических решений асимптотических выражений для макропараметров газа в канале и оценка диапазона их применения. Решению данной проблемы для плоского течения Пуазейля и посвящена данная статья. С использованием кинетического уравнения Вильямса построен профиль массовой скорости газа, вычислен поток массы газа, приходящийся на единицу ширины канала. На основе полученных аналитических выражений получены соответствующие асимптотические формулы. Проведенное сравнение полученных результатов позволило определить границы их применимости.

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ГАЗА

Рассмотрим канал, толщиной D' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления. Направим ось Oz' против градиента давления. Будем рассматривать установившееся течение газа в канале. Тогда, в выбранной системе координат уравнение Вильямса запишется в виде [3]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f). \quad (1)$$

Здесь $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, \mathbf{v} – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, \mathbf{r}' – размерный радиус-вектор, $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\gamma = 15\sqrt{\pi}/16$,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

Параметры n_* , T_* и \mathbf{u}_* выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений в (1) удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии. Будем считать, относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z) \beta^{3/2} \pi^{-3/2} [1 + C_z G_n Z(x; C_x)]. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура газа, $x = x'/\gamma l_g$ и $z = z'/\gamma l_g$ – безразмерные координаты, G_n – безразмерный градиент давления.

Подставляя (2) в (1), после линеаризации $f_*(n_*, T_*, \mathbf{u}_*)$ относительно абсолютного максвеллиана для нахождения $Z(x, C_x) = Z(x, \mu, C)$ приходим к уравнению

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu, C) + \frac{1}{C} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) d\mu' \int_0^{+\infty} \exp(-C'^2) C'^5 Z(x, \mu', C') dC'. \quad (3)$$

При записи (3) перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей $C_x = C \cos \theta$, $C_y = C \sin \theta \cos \chi$, $C_z = C \sin \theta \sin \chi$, выполнили в полученном

выражении интегрирование по азимутальному углу χ от 0 до 2π и ввели обозначение $\mu = \cos \theta$.

Условия для функции $Z(x, \mu, C)$ на стенках канала с учетом принятой в работе зеркально-диффузной модели граничного условия записываются в виде:

$$Z(-d, \mu, C) = Z(-d, -\mu, C), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (4)$$

$$Z(d, \mu, C) = Z(d, -\mu, C), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (5)$$

Решение (3) ищем в виде:

$$Z(x, \mu, C) = Z_1(x, \mu) + \left(\frac{1}{C} - \alpha \right) Z_2(x, \mu), \quad \alpha = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), приходим к системе уравнений для нахождения $Z_1(x, \mu)$ и $Z_2(x, \mu)$

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) + \gamma = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) Z_1(x, \mu') d\mu', \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x, \mu) + 1 = 0. \quad (8)$$

Граничные условия (4), (5) с учетом (6) перепишем в виде ($k = 1, 2$)

$$Z_k(-d, \mu) = Z_k(-d, -\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (9)$$

$$Z_k(d, \mu) = Z_k(d, -\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (10)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение уравнения (8) с граничными условиями (9), (10) имеет вид:

$$Z_2(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x+d}{\mu}\right) H_+(\mu) + \exp\left(-\frac{x-d}{\mu}\right) H_+(-\mu) - 1, \quad (11)$$

где $H_+(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 0 \\ 1, & \text{если } \mu > 0 \end{cases}$ – ступенчатая функция Хэвисайда.

Решение уравнения (7) ищем в виде [3]

$$Z_1(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta) F(\eta, \mu) d\eta + \gamma(x^2 - 2x\mu + 2\mu^2). \quad (12)$$

Здесь A_0 , A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению, $F(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu)$ – собственные векторы непре-

рывного спектра, $\lambda(z) = 1 + \frac{3}{4}z \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)d\tau}{\tau-z}$ – дисперсионная функция Вильямса, $\rho \frac{1}{\eta-\mu}$ и $\delta(\eta-\mu)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$ и дельта-функция Дирака. Подставляя (12) в граничные условия (9), (10), после преобразований, приведенных в [2], приходим к системе уравнений:

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(\eta; -d) + b(-\eta; d)]d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} [b(\mu; -d) + b(-\mu; d)] = 2[-A_0 - \gamma(d^2 + 2\mu d + 2\mu^2)] - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(-\eta; -d) + b(\eta; d)]d\eta}{\eta + \mu}, \quad (13)$$

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(\eta; -d) - b(-\eta; d)]d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} [b(\mu; -d) - b(-\mu; d)] = 2A_1(d + \mu) - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(-\eta; -d) - b(\eta; d)]d\eta}{\eta + \mu}, \quad (14)$$

$$b(\eta; x) = a(\eta) \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right). \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что (14) с учетом (15) при $a(-\eta) = a(\eta)$ и $A_1 = 0$ обращается в тождество. Уравнение (13) при этом можно переписать в виде

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta b(\eta; -d)d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} b(\mu; -d) = f(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (16)$$

$$f(\mu) = -A_0 - \gamma(d^2 + 2\mu d + 2\mu^2) - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta b(\eta; d)d\eta}{\eta + \mu}. \quad (17)$$

Решение (16) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши:

$$N(z) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta B(\eta; -d)d\eta}{\eta - z}. \quad (18)$$

Учитывая краевые значения функций $N(z)$ и $\lambda(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза и используя решение задачи факторизации, полученное в [3], сингулярное интегральное уравнение (16) сведем к краевой задаче Римана

$$N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) = \frac{3}{2} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \pi i \mu (1 - \mu^2) f(\mu). \quad (19)$$

Разрезы функций, входящих в (19), совпадают с контуром краевого условия, следовательно, получили задачу отыскания кусочно-аналитической функции по заданному скачку. Ее решение записываем на основании формулы Сохоцкого:

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu) \mu(1-\mu^2) f(\mu) d\mu}{\lambda^-(\mu) \mu - z}. \quad (20)$$

Раскладывая (20) в окрестности бесконечно удаленной точки, приходим к условию разрешимости краевой задачи (19):

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu) \mu(1-\mu^2) f(\mu) d\mu}{\lambda^-(\mu)} = 0. \quad (21)$$

Подставляя (17) в (21), находим коэффициент A_0

$$A_0 = -\gamma(d^2 + 2X_2d + 2X_3) + \frac{3}{4} \int_0^1 \eta X(-\eta) b(\eta; d) d\eta, \quad (22)$$

где $X_2 = 0,581946$, $X_3 = 0,383616$, а для нахождения коэффициентов $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$a(\mu) = h(\mu) \left[2\gamma b(\mu) + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta X(-\eta) b_2(-d, \eta) a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad (23)$$

$$h(\mu) = -\frac{(1-\mu^2)X(-\mu)}{5|\lambda^+(\mu)|^2 b_2(d, \mu)}, \quad b_2(x, \eta) = \exp\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad X(z) = \frac{1}{z} \exp[V(z)],$$

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{[\theta(\tau) - \pi] d\tau}{\tau - z}, \quad \theta(\tau) = \text{arccctg} \frac{4\lambda(\tau)}{3\pi\tau(1-\tau^2)}, \quad b(\mu) = d + \mu + X_2.$$

Решение (23) ищем в виде степенного ряда:

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \quad \lambda = \frac{3}{4}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим:

$$\begin{aligned}
 a_0(\mu) &= 2\gamma h(\mu)b(\mu), & a_1(\mu) &= 2\gamma h(\mu) \int_0^1 \frac{g(\eta_1)b(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1 + \mu}, \\
 a_2(\mu) &= 2\gamma h(\mu) \int_0^1 g(\eta_1)d\eta_1 \int_0^1 \frac{g(\eta_2)b(\eta_2)d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \dots \\
 a_k(\mu) &= 2\gamma h(\mu) \int_0^1 g(\eta_1)d\eta_1 \int_0^1 g(\eta_2)d\eta_2 \dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k)b(\eta_k)d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}, \\
 g(\mu) &= \mu h(\mu) X(-\mu) b_2(-d, \mu).
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения (3) с граничными условиями (4), (5) построено.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКРОПАРАМЕТРОВ ГАЗА В КАНАЛЕ

Профиль массовой скорости газа в канале построим, исходя из статистического смысла функции распределения:

$$\begin{aligned}
 u'_z(x') &= \frac{1}{n} \int v_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \beta^{-1/2} U_z(x) G_n, \\
 U_z(x) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 Z(x, C_x) d^3\mathbf{C}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь $U_z(x)$ – безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (6) в (25), получаем

$$\begin{aligned}
 U_z(x) &= \frac{\gamma}{2} \left[x^2 - \frac{D^2}{4} - X_2 D - 2X_3 + \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k [I_k + J_k(x)] \right] - \\
 &- \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{9\pi}{32} \right) \left[1 - \frac{3}{4} \int_0^1 (1 - \mu^2) \left[\exp\left(\frac{x-d}{\mu}\right) + \exp\left(-\frac{x+d}{\mu}\right) \right] d\mu \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

Перейдем теперь к вычислению безразмерного потока массы газа. Заметим, что в рамках кинетического подхода

$$\begin{aligned}
 J'_M &= \rho \int_{-D/2}^{D/2} u_z(x') dx' = \rho \int_{-D/2}^{D/2} \beta^{-1/2} U_z(x) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} l_g \gamma dx = \\
 &= \rho \beta^{-1/2} (l_g \gamma)^2 \frac{D^2}{2} \left(\frac{2}{D^2} \int_{-D/2}^{D/2} U_z(x) dx \right) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{\rho D^2}{2\eta} J_M \frac{dp}{dz},
 \end{aligned}$$

где

$$J_M = \frac{2}{D^2} \int_{-D/2}^{D/2} U_z(x) dx. \tag{27}$$

есть безразмерный поток массы газа, приходящийся на единицу ширины канала.

Подставляя (25) в (26), находим:

$$J_M = \gamma \left[\frac{D}{6} + X_2 + \frac{1}{D} \left[2X_3 - \frac{4}{5} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k I_k \right] \right] - \frac{1}{D^2} \left[\frac{3}{2} \gamma \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k K_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) \int_0^1 \mu (1 - \mu^2) \left[1 - \exp\left(-\frac{D}{\mu}\right) \right] d\mu \right]. \quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} I_0 \\ J_0(x) \\ K_0 \end{Bmatrix} &= \int_0^1 \begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \gamma(x, \tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix} [\tau + d + X_2] d\tau, \\ \begin{Bmatrix} I_k \\ J_k(x) \\ K_k \end{Bmatrix} &= \int_0^1 \begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \gamma(x, \tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \int_0^1 \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k) [\eta_k + d + X_2] d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}, \\ g(\mu) &= -\frac{\mu(1 - \mu^2) X^2 (-\mu) \exp(-2d/\mu)}{5 |\lambda^+(\mu)|^2}, \\ \gamma(x, \eta) &= -\frac{(1 - \eta^2) X(-\eta) \left[\exp\left(\frac{x-d}{\eta}\right) + \exp\left(-\frac{x+d}{\eta}\right) \right]}{5 |\lambda^+(\eta)|^2}, \\ \zeta(\eta) &= -\frac{2\eta(1 - \eta^2) X(-\eta) \left[1 - \exp\left(-\frac{2d}{\eta}\right) \right]}{5 |\lambda^+(\eta)|^2}. \end{aligned}$$

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим полученные выше выражения для безразмерной скорости газа в канале (26) и приходящегося на единицу ширины канала безразмерного потока массы газа (28). Аналогичные выражения, полученные в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением, имеют вид [4]:

$$U_z(x) = -\frac{\gamma}{2} \left(x^2 - \frac{D^2}{4} \right), \quad J_M = \frac{\gamma D}{6}, \quad (29)$$

$$U_z(x) = -\frac{\gamma}{2} \left(x^2 - \frac{D^2}{4} - X_2 D \right), \quad J_M = \gamma \left(\frac{D}{6} + X_2 \right). \quad (30)$$

Легко видеть, что, если в (26) оставить два первых слагаемых, а в (28) ограничиться только первым, то (26) и (28) переходят в соответствующие выражения (29), полученные в рамках классической гидродинамики. Если в (26) и (28) учесть еще одно слагаемое, то приходим к соответствующим выражениям (30), полученным в рамках

гидродинамики со скольжением. Если в (28) учесть слагаемые, пропорциональные D^{-1} и D^{-2} , то придем к так называемой формуле Вильямса:

$$J_M = \frac{\gamma D}{6} + \gamma X_2 + \frac{k_2}{\gamma D} + \frac{k_2}{(\gamma D)^2}. \quad (31)$$

Здесь:

$$k_1 = \gamma^2 \left[2X_2^2 - \frac{4}{5} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) \right] = 0.9112667,$$

$$k_2 = \gamma^3 \left[4(X_2 X_3 - X_4) + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{32}{9\pi} \right) \right] = -0.999374, \quad X_4 = 0.272757.$$

Значения J_M , вычисленные согласно (28) – (31) приведены в табл.1. Там же приведены результаты, полученные в [2], [5] в рамках БГК модели кинетического уравнения Больцмана и линеаризованного уравнения Больцмана для молекул твердых сфер (LBE)

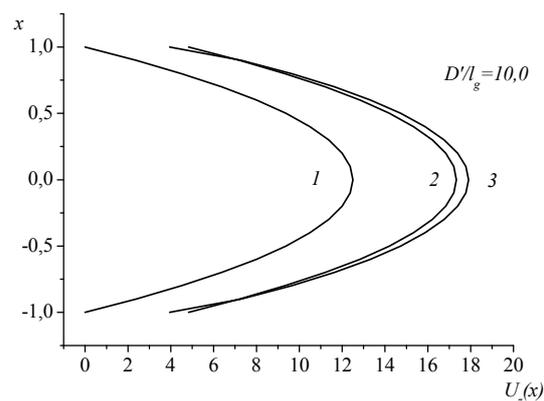
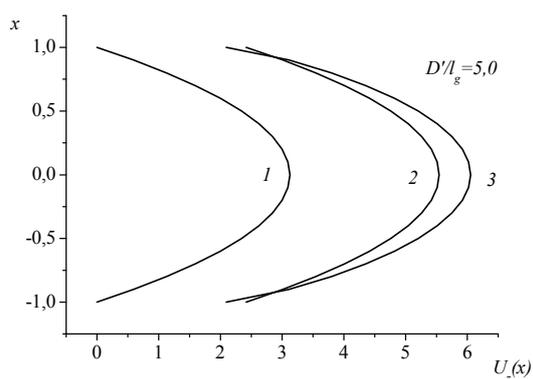
Таблица 1

Значения J_M от D'/l_g

D'/l_g	(28)	(29)	(30)	(31)	БГК [2]	LBE [5]
1.0	1.5446	0.1667	1.1337	1.0456	1.5371	
3.0	1.7106	0.5000	1.4670	1.6597	1.7106	
5.0	1.9445	0.8333	1.8003	1.9426	1.9908	1.9106
6.0	2.0918	1.0000	1.9670	2.0911	2.1411	
7.0	2.2438	1.1667	2.1337	2.2435	2.2949	
8.0	2.3988	1.3333	2.3003	2.3986	2.4512	
9.0	2.5560	1.5000	2.4670	2.5559	2.6093	
10.0	2.7148	1.6667	2.6337	2.7148	2.7687	2.7056
15.0	3.5233	2.5000	3.4670	3.5233	3.5778	
20.0	4.3434	3.3333	4.3003	4.3434	4.3975	4.3450
50.0	9.3182	8.3333	9.3003	9.3182	9.3700	9.3260
100.0	17.642	16.667	17.6337	17.643	17.693	17.693

Графики профиля скорости газа, построенные согласно (26), (29), (30) для различных значений D'/l_g , приведены на рис.1. Как видно из графиков, приведенных на рис.1, для каналов, толщиной более $10l_g$, профиль массовой скорости газа, построенный в рамках гидродинамики со скольжением, достаточно хорошо согласуется с аналогичными результатами, полученным в рамках кинетического подхода. В то же время отличие результатов, полученных в рамках классической гидродинамики, остается значительным даже для достаточно больших значений D' .

Тот факт, что учет эффекта скольжения на стенках канала позволяет расширить область применения гидродинамического подхода к исследованию процессов переноса в разреженных газах, подтверждается и данными, приведенными в табл.1. Сравнивая результаты, полученные на основе кинетического подхода по формуле (28), с расчетами, выполненными в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением согласно формулам (29) и (30), легко видеть, что погрешность, меньшая 1%, во втором случае достигается при толщине канала $D' > 20l_g$ (соответственно при значениях числа Кнудсена $Kn = l_g / D' < 0,05$). В то же время в первом случае погрешность остается более 5% и при $D' > 100l_g$. Погрешность расчетов при использовании формулы (31) по отношению к результатам, полученных с использованием (28) не превышает 1% при $D' > 5l_g$.



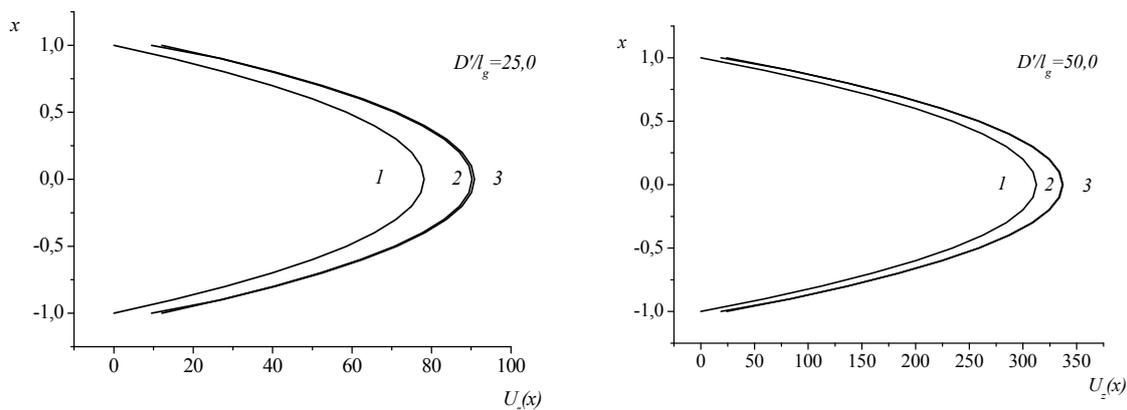


Рис.1. Графики зависимости $U_z(x)$ для различных значений D'/l_g :
 1 – рассчитанные по формуле (30), 2 – по формуле (29), 3 – по формуле (26).

Заключение. Итак, в работе в рамках кинетического подхода решена задача о течении Пуазейля. Построен профиль массовой скорости газа в канале, вычислен проходящий на единицу ширины канала поток массовой скорости газа. Проведено сравнение с аналогичными асимптотическими выражениями, полученными в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением. Показано, что при учете явления изотермического скольжения разреженного газа на стенках канала погрешность при вычислении потока массы газа менее 1% обеспечивается при толщине канала $D' > 20l_g$. Использование же формул, полученных на основе классической гидродинамики, остается неудовлетворительным и при $D' > 100l_g$. В то же время формула Вильямса обеспечивает погрешность при вычислении потока массы газа менее 1% при $D' > 5l_g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
2. Попов В., Тестова И., Юшканов А. Математическое моделирование течений газа в каналах: монография. Germany, Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic publishing, 2012. 116 с.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография. М.: МГОУ, 2004. 271 с.
4. Гулакова С.В., Попов В.Н. Математическое моделирование процессов переноса в задаче о плоском течении Пуазейля в рамках гидродинамики со скольжением // Междисциплинарные исследования в области математического моделирова-

ния и информатики. Материалы 3-й научно-практической интернет-конференции. 20-21 февраля 2014 г. Ульяновск: SIMJET, 2014. С. 158–166.

5. *Siewert C.E.* Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model linearized Boltzmann Equation // *European Journal of Mechanics B / Fluids*. 2002. V. 21. P. 579-497.

**ON THE BOUNDARIES OF APPLICABILITY
OF THE HYDRODYNAMIC APPROACH TO THE SOLUTION
OF THE POISEUILLE FLOW PROBLEM**

S. Gulakova, V. Popov

*Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk)
Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia*

Abstract. In the framework of the kinetic approach the analytical solution of the problem of the Poiseuille flow is obtained. As the basic equation it is used linearize Williams equation and as a boundary condition on walls of the channel – the model diffuse reflections. Structure of mass speed of gas and mass flux falling to the unit of channel width are calculated. Comparison with the analogous results obtained in the framework of classical hydrodynamics and hydrodynamics with slip is done. Set the limits of obtained expression.

Keywords: Poiseuille flow, model kinetic equations; hydrodynamics with slip.