

УДК 533.6

**СТРУКТУРА ПУЛЬСАЦИЙ ПОТОКА ГАЗА
В РАЗВИТОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ.
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

В.А. Жаров

*ФГУП Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ)
140180, ул. Жуковского-1, г. Жуковский, Московская обл., РФ,*

Анотация. Рассмотрен слабонелинейный вариант волновой модели развитого турбулентного пограничного слоя. Определены дисперсионные характеристики волн наименее затухающей моды, проанализированы условия множественного трехволнового резонанса этой моды волн Толлмина-Шлихтинга. На основе метода многих масштабов получены уравнения для когерентной и стохастической части пульсаций.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, турбулентный пограничный слой, когерентные структуры

Ранние прецизионные экспериментальные исследования [1] показали, что развитый турбулентный пограничный слой содержит организованные вихревые структуры, определяющие многие физические свойства этого течения. Последние экспериментальные [3] и численные исследования [5] подтверждают наличие когерентных структур. Представляет интерес построение упрощенной математической модели этого явления, основываясь на уравнениях Навье-Стокса. Одним из содержательных подходов решения этой задачи является волноводная модель развитого турбулентного пограничного слоя [6]. По аналогии с этой моделью из уравнений Навье-Стокса получено нелинейное уравнение для фурье-компонент вертикальной скорости волн Толлмина-Шлихтинга, описывающих пульсации в пограничном слое, до третьего порядка по амплитуде в одномодовом приближении. Уравнение содержит малый параметр

$$\varepsilon^2 \sim \delta^{**}/L,$$

где δ^{**} – толщина потери импульса, L – характерный продольный масштаб длины. Для согласования членов уравнения вводится соотношение (закон подобия)

$$\delta^{**}/L \sim \delta^{**} |\text{Im}[\omega^{**}(\mathbf{k}, \delta^{**})]|/U_\infty,$$

где $|\text{Im}[\omega^{**}(\mathbf{k}, \delta^{**})]|$ – минимальный по \mathbf{k} инкремент основной моды волн Толлмина-Шлихтинга, U_∞ – скорость набегающего потока. Амплитуды волн, в соответствии с принципом тройной декомпозиции [1], представляются в виде суммы когерентной и некогерентной частей, для которых получается система уравнений, содержащих малый параметр ε . Для решения этой системы использован метод многих масштабов [4] в соответствии с определением величин этих масштабов:

$$\tau_0 = \delta^{**}/U_\infty, \tau_1 = \tau_0/\varepsilon, \tau_2 = \tau_0/\varepsilon^2.$$

(Отметим, что масштаб τ_1 имеет величину, сравнимую со средним периодом бёрта.) В результате для амплитуд волн когерентной структуры в масштабе τ_1 получено уравнение множественного 3-х волнового резонанса.

$$\frac{da_1}{dt_1} = \sum_{l=1}^n \Lambda_1^l a_2^l a_3^l, \quad \frac{da_2}{dt_1} = \Lambda_2^l a_1 a_3^{l*}, \quad \frac{da_3}{dt_1} = \Lambda_3^l a_1 a_2^{l*}, \quad l=1,2,\dots,n$$

В этом уравнении величины Λ_m^l , $m=1,2,3$, определяются через спектральные характеристики (собственные числа и собственные функции) профиля продольной средней скорости турбулентного пограничного слоя.

На основе известного из эксперимента профиля (профиль Мускера) средней продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоя проведен численный анализ уравнений для когерентной структуры. Получены дисперсионные характеристики волн Толлмина –Шлихтинга и матричные элементы в виде функций от компонентов волнового вектора. Кривая 3-х волнового резонанса представлена на рис.1(a) и показывает, что в турбулентном пограничном слое вследствие наличия когерентной структуры появляются продольные вихри. Для некогерентной части в масштабе τ_2 получено замкнутое интегродифференциальное уравнение для двухточечной корреляционной функции. Замыкание цепочки уравнений для моментов определено наличием малого параметра ε [4]. Это уравнение содержит источник член, определяемый когерентной структурой.

Кроме того, показано, что динамика множественного 3-х волнового резонанса в представлении дискретного набора n триплетов удовлетворяет инварианту, который представляется квадратичной формой для комплексных амплитуд с действительными весовыми множителями.

$$q_1 |a_1|^2 + \sum (q_2 |a_2|^2 + q_3 |a_3|^2) = const$$

Здесь сумма берется по всем резонансным триплетам.

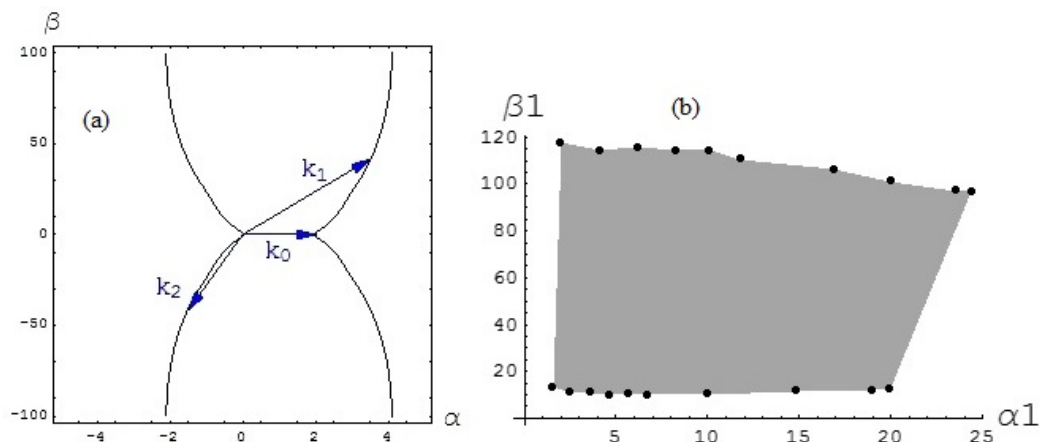


Рис. 1. (а) Кривая 3-х волнового резонанса, $\mathbf{k}_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $i = 0, 1, 2$. (б) Область волновых векторов \mathbf{k}_1 , в которой весовые множители положительны (при различных α_0)

Если весовые множители q_m , $m = 1, 2, 3$, положительны, то система совершает финитное движение, при надлежащей нормировке амплитуд, по поверхности единичной сферы размерности $2(1+4n)$, n – число резонансных триплетов. Нормировка квадратичной формы на единицу возможна, так как существует преобразование амплитуд и времени, оставляющее исходное уравнение неизменным. Множитель этого преобразования удовлетворяет уравнению в масштабе τ_2 . Численный анализ на профиле Мускера показал наличие области волновых чисел (α_1, β_1) , в которой весовые множители квадратичной формы положительны. На рис. 1(б) показана область волновых чисел с положительными весовыми множителями. Поэтому эту область волновых чисел можно сопоставить когерентной структуре. Сопоставление закона подобия с экспериментальными данными [2] в диапазоне чисел Рейнольдса $R_\delta = 10^4 - 10^5$, δ – толщина пограничного слоя по скорости, показало хорошее соответствие (рис.2). Определены также средние по $t_1 = t / \tau_1$ величины

$$\langle uv \rangle_{t_1}, \langle uu \rangle_{t_1}, \langle vv \rangle_{t_1}, \langle ww \rangle_{t_1}$$

для когерентной структуры, u, v, w – компоненты скорости пульсаций, определяемые когерентной структурой. Результаты приведены на рис.3.

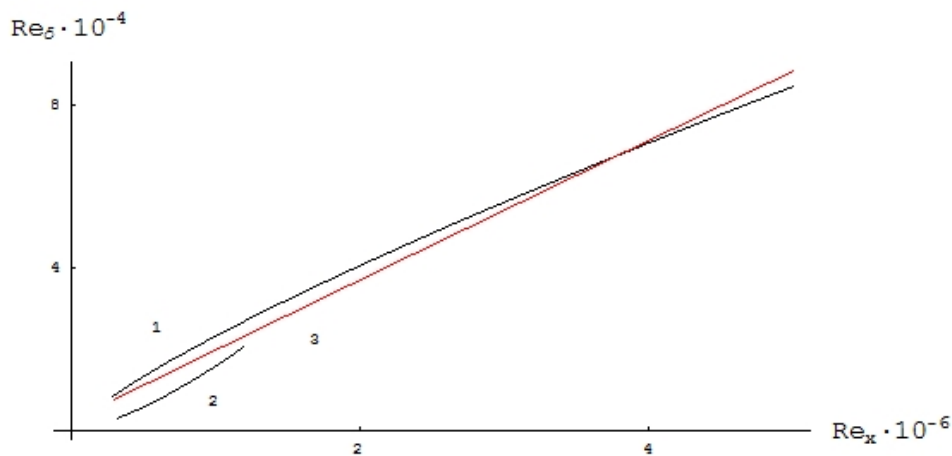


Рис. 2. Сравнение закона подобия с экспериментальными данными: 1,2 – [7], 3 – настоящая теория

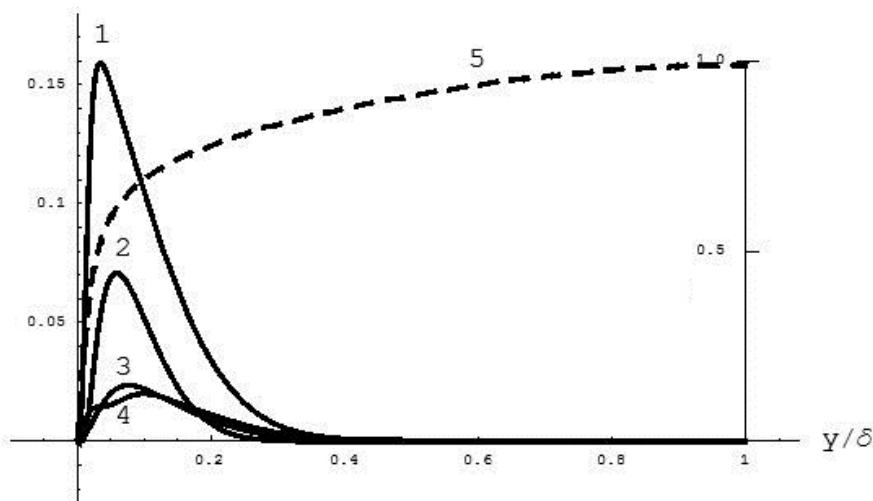


Рис. 3. Среднеквадратичные величины компонентов пульсационной скорости (относительные единицы):

$$1 - \sqrt{\langle uu \rangle}, 2 - 20\langle uv \rangle, 3 - \sqrt{\langle vv \rangle}, 4 - \sqrt{\langle ww \rangle}, 5 - U(y), \text{Re}_\delta = 10^4.$$

Полученные средние значения качественно отражают поведение этих величин в вязком подслое турбулентного пограничного слоя. Отличие от известных экспериментальных результатов [2] на масштабе толщины пограничного слоя по скорости, по-видимому, обусловлено потерей точности использованного в работе численного метода при больших числах Рейнольдса в области малых волновых чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский, О.М. Организованные структуры в турбулентных течениях. Анализ экспериментальных работ по турбулентному пограничному слою / О.М. Белоцерковский и др. – М.: МФТИ, 2009. – 302 с.
2. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
3. Borodulin, V.I. Experimental detection of deterministic turbulence / V.I. Borodulin, Y.S. Kachanov, A.P. Roschektayev // Journal of Turbulence. – 2011. V. 12. N 23. – С.1–34.
4. Davidson, R.C. Methods in nonlinear plasma theory / R.C. Davidson. N.Y.; L.:Acad. Press, 1972. – 356 с.
5. Khujadze, G. Coherent vorticity extraction in turbulent boundary layers using orthogonal wavelets / G. Khujadze. R. Nguyen van yen, K. Schneider, M. Oberlack, Farge M. // 13th European Turbulence Conference (ETC-13). Warsaw, Poland, 2011.
6. Landahl, M.T. A wave-guide model for turbulent shear flow / M.T. Landahl // J.Fluid Mech. – 1967. V. 29. Pt. 3. – С.441–459.

THE PULSATION STRUCTURE OF GAS FLOW IN THE DEVELOPED TURBULENT BOUNDARY LAYER. THEORETICAL ANALYSIS

V. Zharov

*Zukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI),
140180, Zukovski str-1, Zukovski, Moscow Region, Russian Federation*

Abstract. The weakly nonlinear variant of the wave model of the developed turbulent boundary layer is considered. Dispersion properties of the least damping Tollmien-Schlichting waves are defined and conditions of 3-wave resonance existence are given. Equations for the coherent and the stochastic part of the pulsations are received by the multiscale method.

Keywords: Navier-Stokes equations, turbulent boundary layer, coherent structures