

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:533.72

**НУЛИ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
ИЗ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА О ПОВЕДЕНИИ ГАЗА
НАД КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

В.А. Акимова, А.Л. Бугримов, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. В настоящей работе исследуются нули дисперсионной функции из второй задачи Стокса. Вторая задача Стокса — задача о поведении разреженного газа, заполняющего полупространство. Плоскость, ограничивающая полупространство, совершает гармонические колебания в своей плоскости. Используется линеаризованное кинетическое уравнение. Доказывается формула факторизации дисперсионной функции. С помощью формулы факторизации в явном виде находятся нули дисперсионной функции и проводится их исследование в зависимости от величины безразмерной частоты ограничивающей газ плоскости.

Ключевые слова: вторая задача Стокса, кинетическое уравнение, разделение переменных, дисперсионная функция, нули дисперсионной функции, факторизация дисперсионной функции, краевая задача Римана.

1. Введение

Вторая задача Стокса для сплошной среды была сформулирована в середине XIX века [20]. Затем, после введения Максвеллом и Больцманом кинетических уравнений, вторая задача Стокса стала изучаться для разреженного газа. Подробная история этой проблемы изложена в наших работах [7]–[10]. Кроме того, эта задача решалась численными [16] и приближенными методами [2]–[4].

Методы вычисления нулей дисперсионных функций для уравнений переноса нейтронов были заложены в работе [13]. Затем эти методы применялись и развивались для различных задач в работах [14], [15], [17]–[19].

В настоящей работе в явной форме представлены собственные решения кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Для этого в явной форме находятся нули дисперсионного уравнения. Для нахождения нулей используется факторизация дисперсионной функции, доказываемая с помощью краевой задачи Римана из теории функций комплексного переменного. Коэффициентом задачи Римана является отношение граничных значений дисперсионной функции сверху и снизу на действительной полуоси. При малых значениях частоты колебаний ограничивающей разреженный газ плоскости найдена простая асимптотическая формула для вычисления нулей дисперсионной функции. Проводится графическое исследование действительной и мнимой частей нулей дисперсионной функции, вычисляемых по явной и асимптотической формулам. Вводится функция ошибок, представляющая собой относительное отклонение модуля асимптотического представления нуля от модуля его точного представления.

Выяснен интервал значений частоты колебаний плоскости, в котором величина функции ошибок не превышает одного процента.

В п. 2 настоящей работы изучаются свойства дисперсионной функции в комплексной плоскости, а в п. 3 выводятся точные формулы для вычисления нулей дисперсионной функции и исследуются свойства этих нулей, как функции безразмерной частоты колебаний плоскости, ограничивающей разреженный газ стенки.

В работах [7]–[9] был развит математический аппарат для решения граничных задач для уравнения:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) h(x_1, \mu') d\mu', \quad (1.1)$$

где

$$z_0 = 1 - i\omega_1,$$

x_1 – безразмерная координата, $x_1 = x/l$, l – средняя длина свободного пробега газовых молекул, $\omega_1 = \omega\tau = \omega/\nu$, $\tau = 1/\nu$, ν – частота столкновений газовых молекул, ω – частота колебаний пластины, ограничивающей полупространство, заполненное разреженным газом.

Именно к уравнению (1.1) и сводится основное уравнение из второй задачи Стокса [7].

2. Разделение переменных и дисперсионная функция

Разделение переменных в уравнении (1.1) осуществляется следующей подстановкой:

$$h_\eta(x_1, \mu) = \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad (2.1)$$

где η – параметр разделения, или спектральный параметр.

Подставляя (2.1) в уравнение (1.1) получим характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi} z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu'. \quad (2.2)$$

Если ввести обозначение:

$$n(\eta) = \frac{1}{z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu', \quad (2.3)$$

то уравнение (2.2) можно переписать с помощью (2.3) в виде

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta n(\eta). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) является конечным (недифференциальным) уравнением. Условие (2.4) называется нормировочным условием, нормировочным интегралом, или просто нормировкой.

Решение характеристического уравнения будем искать в пространстве обобщенных функций [5]. Обобщенное решение уравнения (2.4) имеет вид:

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta n(\eta) P \frac{1}{\eta - \mu} + g(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (2.5)$$

где $-\infty < \eta, \mu < +\infty$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, символ Px^{-1} означает главное значение интеграла при интегрировании x^{-1} , $\lambda(z)$ – дисперсионная функция, введенная равенством:

$$\lambda(z) = 1 - i\omega_1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\tau^2) d\tau}{\tau - z}.$$

Эту функцию можно преобразовать к виду: $\lambda(z) = -i\omega_1 + \lambda_0(z)$, где $\lambda_0(z)$ – известная функция по теории плазмы,

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - z}.$$

Собственные функции (2.5) называются собственными функциями непрерывного спектра, ибо спектральный параметр η непрерывным образом заполняет всю действительную прямую.

Таким образом, собственные решения уравнения (1.1) имеют вид:

$$h_{\eta, \mu} = \exp\left(-\frac{x_1}{\eta} z_0\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu) \right]. \quad (2.6)$$

Собственные решения (2.6) отвечают непрерывному спектру характеристического уравнения, ибо спектральный параметр непрерывным образом пробегает всю числовую прямую, т.е. непрерывный спектр σ_c есть вся конечная часть числовой прямой: $\sigma_c = (-\infty, +\infty)$.

Приведем формулы Сохоцкого для дисперсионной функции:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \pm i s(\mu) - i\omega_1 + \lambda_0(\mu), \quad s(\mu) = \sqrt{\pi} \mu e^{-\mu^2}.$$

Разность граничных значений дисперсионной функции отсюда равна:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2s(\mu) i,$$

полусумма граничных значений равна:

$$\frac{\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu)}{2} = \lambda(\mu) = -i\omega_1 + \lambda_0(\mu).$$

Заметим, что на действительной оси действительная часть дисперсионной функции $\lambda_0(\mu)$ имеет два нуля $\pm \mu_0$, $\mu_0 = 0,924\dots$. Эти два нуля в силу четности функции $\lambda_0(\mu)$ различаются лишь знаками.

В монографии [6] показано, что в комплексной плоскости дисперсионная функция $\lambda_0(z)$ вычисляется по формуле:

$$\lambda_0(z) = 1 - 2ze^{-z^2} \int_0^z s^{u^2} du \pm i\sqrt{\pi}ze^{-z^2},$$

если $\pm \text{Im } z > 0$. Отметим, что на действительной оси дисперсионную функцию удобнее использовать в численных расчетах в виде:

$$\lambda_0(\mu) = 1 - 2\mu^2 \int_0^1 \exp(-\mu^2(1-t^2)) dt, \quad \mu \in (-\infty; +\infty).$$

Разложим дисперсионную функцию в ряд Лорана по отрицательным степеням переменного z в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 - \frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z^4} - \frac{15}{8z^6} - \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Из разложения (2.7) видно, что при малых значениях ω_1 дисперсионная функция имеет два отличающихся лишь знаками комплекснозначных нуля:

$$\pm \eta_0^{(0)}(\omega_1) = \frac{1+i}{2\sqrt{\omega_1}}. \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что при $\omega_1 \rightarrow 0$ оба нуля дисперсионной функции имеют пределом одну бесконечно удаленную точку $\eta_i = \infty$ кратности (порядка) два.

Из разложения (2.7) видно так же, что значение дисперсионной функции в бесконечно удаленной точке равно:

$$\lambda(\infty) = -i\omega_1.$$

В [8] показано, что число нулей дисперсионной функции равно индексу коэффициента задачи:

$$N = 2\chi(G),$$

где $\chi = \chi(G)$ – индекс функции $G(t)$ – число оборотов кривой $\Gamma(\omega_1)$ относительно начала координат, совершаемых в положительном направлении,

$$G(\mu) = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}.$$

Введем угол $\theta(\mu) = \arg G(\mu)$ – главное значение аргумента функции $G(\mu)$, фиксированное в нуле условием $\theta(0) = 0$.

Введем выделенную частоту колебаний пластины, ограничивающей газ:

$$\omega_1^* = \max_{0 < \mu < +\infty} \sqrt{-\lambda_0^2(\mu) + s^2(\mu)} \approx 0.733.$$

Эту частоту колебаний называют [2] критической.

Показано [7], что в случае, когда частота колебаний пластины меньше критической, т.е. при $0 \leq \omega < \omega_1^*$, индекс функции $G(t)$ равен 1. Это означает, что число комплексно-значных нулей дисперсионной функции в разрезанной комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси, равно двум.

В случае, когда частота колебаний пластины превышает критическую ($\omega > \omega_1^*$) индекс функции $G(t)$ равен нулю: $\chi(G) = 0$. Это означает, что дисперсионная функция не имеет нулей в верхней и нижней полуплоскостях. В этом случае дискретных (частных) решений исходное уравнение (1.1) не имеет.

При $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*$ нули дисперсионной функции обозначим через $\eta_0(\omega_1)$ и $-\eta_0(\omega_1)$. В силу четности дисперсионной функции ее конечные нули различаются только знаками, имея одинаковые модули. Таким образом, дискретный спектр характеристического уравнения, состоящий из нулей дисперсионной функции, в случае $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*$ есть множество точек $\sigma_d(\omega_1) = \{\eta_0(\omega_1), -\eta_0(\omega_1)\}$. При $\omega_1 > \omega_1^*$ дискретный спектр – это пустое множество. При $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*$ собственными функциями характеристического уравнения являются следующие два решения характеристического уравнения:

$$\Phi(\pm\eta_0(\omega_1), \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pm\eta_0(\omega_1)}{\pm\eta_0(\omega_1) - \mu}$$

и два соответствующих собственных решения характеристического уравнения:

$$h_{\pm\eta_0(\omega_1)}(x_1, \mu) = \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\pm\eta_0(\omega_1)}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pm\eta_0(\omega_1)}{\pm\eta_0(\omega_1) - \mu}.$$

Под η_0 будем понимать тот из нулей дисперсионной функции, который обладает свойством:

$$\operatorname{Re} \frac{1 - i\omega_1}{\eta_0(\omega_1)} > 0.$$

Для этого нуля убывающее собственное решение кинетического уравнения (1.1) имеет вид:

$$h_{\eta_0(\omega_1)}(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0(\omega_1)}\right) \frac{\eta_0(\omega_1)}{\eta_0(\omega_1) - \mu}.$$

При $\omega_1 \rightarrow 0$ оба нуля, как уже указывалось выше, перемещаются в одну и ту же бесконечно удаленную точку. Это означает, что в этом случае дискретный спектр характеристического уравнения состоит из одной бесконечно удаленной точки кратности два: $\sigma_d(0) = \eta_i = \infty$ и является присоединенным к непрерывному спектру. В этом случае дискретных (частных) решения ровно два: $h_1(x_1, \mu) = 1$, $h_2(x_1, \mu) = x_1 - \mu$.

3. Факторизация дисперсионной функции

Здесь устанавливается формула, представляющая факторизацию дисперсионной функции в верхней и нижней полуплоскостях, а также выводится формула для факторизации граничных значений дисперсионной функции сверху и снизу на действительной оси. Такая факторизация дается в терминах функции $X(z)$.

В основе аналитического решения граничных задач кинетической теории лежит решение однородной краевой задачи Римана (см. [1]) с коэффициентом $G(\mu) = \lambda^+(\mu) / \lambda^-(\mu)$:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = G(\mu), \quad \mu > 0.$$

Однородная краевая задача Римана называется также (см. [1]) задачей факторизации коэффициента $G(\mu)$.

Задача Римана означает, что отношение $\lambda^+(\mu) / \lambda^-(\mu)$ можно заменить отношением функций $X^+(\mu) / X^-(\mu)$, являющихся граничными значениями функции $X(z)$, аналитической в комплексной плоскости \square и имеющей в качестве линии скачков положительную действительную полуось. Дисперсионная функция имеет в качестве линии скачков всю действительную ось. В [8] показано, что решение задачи Римана дается равенствами:

$$X(z) = \frac{1}{z^\chi} \exp V_\chi(z), \quad V_\chi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(\tau) - \pi\chi}{\tau - z} d\tau,$$

где $\theta(\tau) = \ln G(\tau) / 2i$, χ - индекса коэффициента $G(\tau)$.

Пусть сначала $\chi(G) = 1$, т.е. $\omega_1 \in [0; +\infty)$. Покажем, что для дисперсионной функции $\lambda(z)$ везде в комплексной плоскости \mathbb{C} , исключая действительную ось \mathbb{R} , справедлива формула:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X^{\pm}(\mu)X(-\mu), \quad \mu \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\lambda^{\mp}(\mu) = i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^{\mp}(-\mu), \quad \mu \leq 0. \quad (3.3)$$

Для доказательства формулы (3.1) введем вспомогательную функцию:

$$R(z) = \frac{\lambda(z)}{i\omega_1(z^2 - \eta_0^2)X(z)X(-z)}. \quad (3.4)$$

Эта функция аналитична везде в комплексной плоскости, кроме точек разрезов \mathbb{C}_+ и \mathbb{C}_- . Точки $z = \pm\eta_0$ являются устранимыми, т.к. в этих точках $\lambda(\pm\eta_0) = 0$.

Каждая точка разрезов \mathbb{C}_+ и \mathbb{C}_- является устранимой. В самом деле, если $\mu > 0$, то на основании равенства (3.1) и (3.4) имеем:

$$\frac{\lambda^+(\mu)}{i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X^+(\mu)X(-\mu)} = \frac{\lambda^-(\mu)}{i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X^-(\mu)X(-\mu)},$$

откуда $R^+(\mu) = R^-(\mu)$, $\mu > 0$. Если $\mu < 0$, то на основании равенства (3.1), в котором μ заменим на $-\mu$, имеем:

$$\frac{X^+(-\mu)}{X^-(-\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu < 0.$$

Нетрудно видеть, что $\lambda^+(-\mu) = \lambda^-(\mu)$, $\lambda^-(-\mu) = \lambda^+(\mu)$. Поэтому

$$\frac{X^+(-\mu)}{X^-(-\mu)} = \frac{\lambda^-(\mu)}{\lambda^+(\mu)}, \quad \mu < 0,$$

отсюда

$$\frac{\lambda^+(\mu)}{i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^-(\mu)} = \frac{\lambda^-(\mu)}{i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^+(\mu)}, \quad \mu < 0,$$

или

$$R^+(\mu) = \frac{\lambda^+(\mu)}{i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^*(-\mu)}$$

и

$$R^-(\mu) = \frac{\lambda^-(\mu)}{i\omega_1(\mu^2 - \eta_0^2)X(\mu)X^+(\mu)}$$

заметим, что если точка z стремится к точке μ ($\mu < 0$) из верхней или нижней полуплоскости, то функции $R^+(\mu)$ или $R^-(\mu)$ вычисляются согласно предыдущим равенствам. Следовательно, эту функцию можно считать аналитической функцией везде в \square , в том числе и в точках разреза, доопределив ее на разрезе по непрерывности. Осталось заметить, что функция $R(z)$ аналитична везде в $\bar{\square}$ и $R(\infty) = 1$. По теореме Лиувилля эта функция является тождественно постоянной: $R(z) \equiv 1$, откуда и вытекает формула (3.1). Формулы (3.2) и (3.3) очевидно вытекают из формулы (3.1).

Из формулы (3.1) найдем в явном виде формулу для вычисления нулей дисперсионной функции:

$$\eta_0(\omega_1, z) = \sqrt{z^2 - \frac{\lambda(z)}{i\omega_1 X(z)X(-z)}}.$$

В этой формуле в качестве точки z удобно взять точку на мнимой оси: $z = Ni$, $N=1,2,\dots$. Тогда получим формулу:

$$\eta_0(\omega_1) = \sqrt{-N^2 - \frac{\lambda(Ni)}{i\omega_1 X(Ni)X(-Ni)}}.$$

Мы вычислим обе части равенства (3.1) в точке $z = i$. В результате для нулей дисперсионной функции получаем следующую формулу:

$$\eta_0(\omega_1) = \sqrt{-1 + \frac{i\lambda(i)}{\omega_1} \exp[-V(i) - V(-i)]}. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. С помощью формулы (3.1) можно упростить интегральное представление из работы [8]:

$$X(z) = \frac{1}{i\omega_1\pi} \int_0^\infty \frac{s(\mu)d\mu}{(\mu^2 - \eta_0^2)X(-\mu)(\mu - z)}. \quad (3.6)$$

Интегральное представление (3.6) является нелинейным. Оно выражает значение функции $X(z)$ в точке $z \in \square \setminus \square_+$ через ее значения на отрицательной части действительной оси \square_- .

Аналог этого представления в теории переноса излучения используется для построения функции $X(z)$ численными методами.

Рассмотрим случай нулевого индекса: $\chi(G) = 0$, т.е. $\omega_1 \in [0, \omega_1^*)$. Аналогично предыдущему доказываются формулы

$$\lambda(z) = -i\omega_1 X(z)X(-z), \quad \text{Im } z \neq 0.$$

$$\lambda^\pm(\mu) = -i\omega_1 X^\pm(\mu)X(-\mu), \quad \mu \leq 0.$$

$$\lambda^\pm(\mu) = -i\omega_1 X(\mu)X\mp(-\mu), \quad \mu < 0.$$

Графическое исследование свойств нулей дисперсионной функции проведем по формуле (3.5) (см. рис.1 – 4).

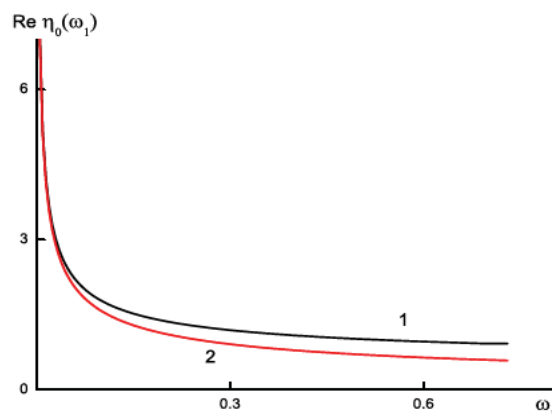


Рис. 1. Зависимость действительной части нуля дисперсионной функции от параметра ω_1 .

Кривая 1 отвечает действительной части точного значения нуля,
кривая 2 – действительной части асимптотики этого нуля.

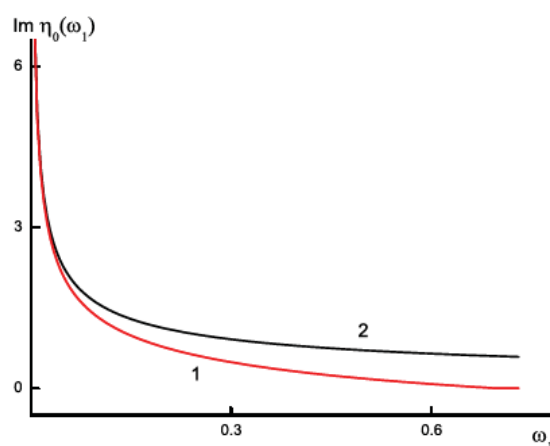


Рис. 2. Зависимость мнимой части нуля дисперсионной функции от параметра ω_1 .

Кривая 1 отвечает мнимой части точного значения нуля,
кривая 2 – мнимой части асимптотики этого нуля.

На рис. 1 и рис. 2 проводится сравнение действительных (рис. 1) и мнимых (рис. 2) частей точного значения нуля $\eta_0(\omega_1)$ согласно (3.5) и асимптотического представления нуля $\eta_0^{(0)} = (1+i)/2\sqrt{\omega_1}$.

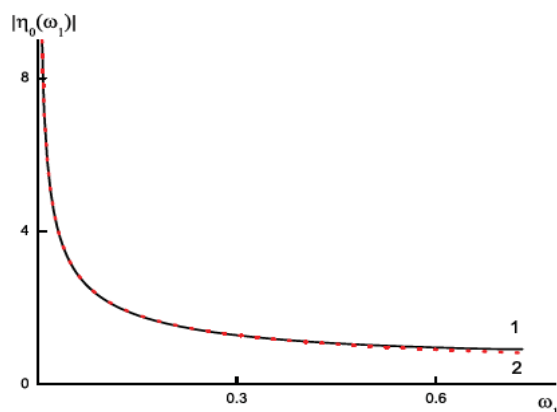


Рис. 3. Зависимость модуля нуля дисперсионной функции от параметра ω_1 .

Сплошная кривая 1 отвечает модулю точного значения нуля, точечная кривая 2 отвечает асимптотическому представлению нуля.

На рис.3 проводится сравнение модулей точного и асимптотического представлений нулей. Введем функцию ошибок – функцию относительно отклонения асимптотического представления модуля нуля от модуля его точного представления:

$$O(\omega_1) = \frac{|\eta_0(\omega_1)| - |\eta_0^{(0)}(\omega_1)|}{|\eta_0(\omega_1)|}.$$

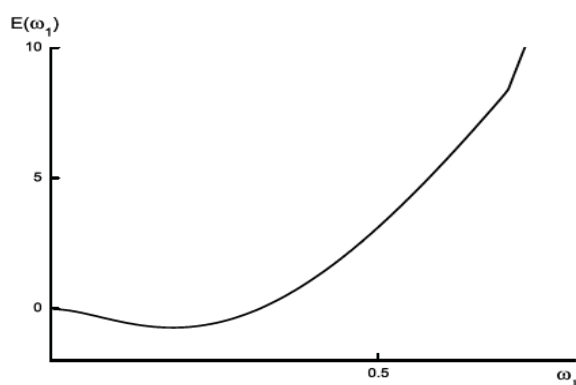


Рис.4. Функция ошибок – относительное отклонение модуля асимптотического представления нуля от модуля его точного значения.

На рис.4 представлено поведение функции ошибок как функции безразмерной частоты колебаний плоскости, ограничивающей разреженный газ во второй задачи Стокса. Из рис.4 видно, что в интервале $0 \leq \omega_1 \leq 0.392$ величина функции ошибок не пре-

вышает одного процента. Этот факт позволяет в прикладных вопросах использовать асимптотическое представление нуля дисперсионной функции.

4. Заключение

В настоящей работе исследуются нули дисперсионной функции из второй задачи Стокса. Вторая задача Стокса – задача о поведении разреженного газа, заполняющего полупространство. Плоскость, ограничивающая полупространство, совершает гармонические колебания в своей плоскости. Используется линеаризованное кинетическое уравнение. С помощью факторизирующей функции доказывается формула факторизации дисперсионной функции. С помощью формулы факторизации в явном виде находятся нули дисперсионной функции и проводится их исследование в зависимости от величины безразмерной частоты колебаний плоскости, $0 \leq \omega_1 \leq 0.392$, в котором величина функции ошибок не превышает одного процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1987, 677 с.
2. *Дудко В.В.* Скольжение разреженного газа вдоль неподвижных и колеблющихся поверхностей, дисс., Москва, 2010. 108 стр.
3. *Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн// ЖТФ. 2005. Т. 75, вып.4, 134-135.
4. *Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе// ТВТ. 2009. Т. 47. No. 2, 262-268.
5. *Жаринов В.В., Владимиров В.С.* Уравнения математической физики, М.: Физмалит, 1999.
6. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитические методы в кинетической теории, Монография. Изд-во МГОУ, М., 2008, 280 с.
7. *Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part I: eigenvalues and eigensolutions//ArXiv: 1111.3429v1 [math-ph] 15 Nov 2011. 27 pp.
8. *Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part II: mathematical apparatus of solving of problem//ArXiv: 1111.5182v1 [math-ph] 22 Nov 2011. 26 pp.
9. *Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical Solution of Second Stokes Problem on Behavior of Gas over Oscillation Surface. Part III: Solving of Problem and Applications// arXiv: 1112.1283v1 [math-ph] 6 Dec 2011, 40 pp.
10. *Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* The Second Stokes Problem with Specular - Diffusive Boundary Conditions in Kinetic Theory// arXiv: 1201.2624v1 [math-ph] 12 Jan 2012. 20 pp.
11. *Anastasselou E.G. and Ioakamidis N.I.* A generation of the Siewert — Burniston method for the determination of zeros of analytic functions// J. Math. Phys. Vol. 25, №8, 1984. 2422.
12. *Anastasselou E.G. and Ioakamidis N.I.* Application of the Cauchy theorem to the location of zeros of sectionally analytic functions// J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). Vol. 35, №5, 1984. Pp. 705-711.

13. *Burniston E.E. and Siewert C.E.* The Use of Riemann — Hilbert Problem in Solving a Class of Transcendental Equations// Proc. of the Cambridge Phil. Soc.,73 (1973).Pp. 111-118.
14. *Ioakamidis N.I.* A unified Riemann — Hilbert problem to the analytical determination of zeros of sectionally analytic functions// J. Math. Anal. and Appl. Vol. 129, №1, 1988. Pp. 134-141.
15. *Ioakamidis N.I.* Application of the generalized Siewert — Burniston method to locating zeros and poles of meromorphic functions// J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). Vol. 36, №5, 1984. Pp. 733-742.
16. *Sharipov F. and Kalempa D.* Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency// Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium, edited by M.S.Ivanov and A.K.Rebrov. Novosibirsk, 2007. P. 1140-1145.
17. *Siewert C.E. and Thomas J. R., Jr.* Half-Space Problems in the Kinetic Theory of Gases// The Physics of Fluids, 16 (1973). Pp.1557-1559.
18. *Siewert C.E.* Explicit Results for the Quantum-Mechanical Energy States Basic to a Finite Square-Well Potential// Journal of Mathematical Physics, 19 (1978) 434-435.
19. *Siewert C.E.* On Computing Eigenvalues in Radiative Transfer// Journal of Mathematical Physics, 21 (1980). Pp. 2468-2470.
20. *Stokes G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil. IX, 1851, 8–106.

ZERO OF THE DISPERSION EQUATIONS FROM THE SECOND STOKES PROBLEM ABOUT BEHAVIOUR OF GAS OVER THE FLUCTUATING SURFACE

V. Akimova, A. Bugrimov, A. Latyshev, A. Yushkanov

*Moscow state regional university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. In the present work zero of dispersion function from the second Stokes problem are investigated. The second Stokes problem is the problem about behaviour of the rarefied gas filling half-space. A plane, limiting half-space, makes harmonious fluctuations in the plane. We use the linear kinetic equation. The formula of factorization of dispersion function is proved with the help of solution of boundary value Riemann problem the theory of functions of the complex variable. By means of the factorization formula in an explicit form there are zero of dispersion function and their research depending on quantity of dimensionless frequency of a plane limiting gas is carried out.

Keywords: second Stokes problem, the kinetic equation, separation on of variables, dispersion function, zero of dispersive function, factorization of dispersion function, boundary value Riemann problem.