

# РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

---

УДК 517.9/98+533.72

**А.В. Латышев**

*Московский государственный областной университет (МГОУ),*

## **ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ МОДУЛЮ СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ**

*Аннотация.* Для одномерного линеаризованного кинетического уравнения с частотой столкновений молекул, пропорциональной модулю скорости молекул, получены аналитические решения задач о температурном скачке и слабом испарении (конденсации). Рассматриваются диффузные граничные условия. Найдены величины скачков температуры и концентрации. Построены распределения концентрации, массовой скорости и температуры. Проведены необходимые численные расчеты и графические исследования.

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение, частота столкновений, граничные задачи, скачок температуры, скачок числовой плотности, аналитическое решение, распределение макропараметров..

**A. Latyshev**

*Moscow State Regional University*

## **BOUNDARY PROBLEMS FOR THE ONE-DIMENSIONAL KINETIC EQUATION WITH THE FREQUENCY OF COLLISIONS PROPORTIONAL TO THE MODULE OF VELOCITY OF MOLECULES**

*Abstract.* For the one-dimensional linear kinetic equation with collision frequency proportional to the module of molecular velocity, analytical solutions of problems on temperature jump and weak evaporation (condensation) are received. Diffusively boundary conditions are considered. Quantities of jumps of temperature and concentration are found. Distributions of concentration, mass velocity and temperature are constructed. Necessary numerical calculations and graphic researches are done.

*Keywords:* kinetic equation, frequency of collisions, boundary problems, temperature jump, jump of numerical density, analytical solution, distribution of macroparameters.

### Введение

Настоящая работа является продолжением работ [1-3], посвященным исследованию граничных задач для одномерного кинетического уравнения с частотой столкновений молекул, аффинно зависящей от модуля их скорости.

В работе [1] было введено линейное одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) и частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул. При этом были использованы законы сохранения числовой плотности (концентрации) молекул, импульса молекул и энергии.

В [1] была доказана теорема о структуре общего решения введенного уравнения.

В работе [2], являющейся продолжением [1], получены точные решения задачи о температурном скачке и слабом испарении (конденсации) в разреженном газе. Эти две задачи следуя [4] будем называть обобщенной задачей Смолуховского.

В работе [3] была решена обобщенная задача Смолуховского для частного случая аффинной зависимости частоты столкновений от модуля скорости молекул. А именно, был рассмотрен случай, когда частота столкновений постоянная.

В настоящей работе рассматривается другой предельный случай аффинной зависимости, когда частота столкновений пропорциональна модулю скорости молекул. На основе аналитического решения граничной задачи Смолуховского построена функция распределения газовых молекул. Найдены числовые значения коэффициентов скачка температуры и слабого испарения (конденсации). Построены распределения концентрации, массовой скорости и температуры в «полупространстве».

Остановимся на истории исключительно аналитических решений обобщенной задачи Смолуховского.

Для простого (одноатомного) разреженного газа с постоянной частотой столкновений молекул аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского получено в [5].

В [6] обобщенная задача Смолуховского была аналитически решена для простого разреженного газа с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул.

В [7] была аналитически решена задача о сильном испарении (конденсации) с постоянной частотой столкновений.

Отметим, что впервые задача о температурном скачке с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул, была аналитически решена Кесселем и Вильямсом в работе [8] в 1972 году.

Затем в работах [9, 10, 11] задача Смолуховского была обобщена на случай многоатомных (молекулярных) газов и получено аналитическое решение.

В работах [12, 13, 14] рассмотрена проблема, близкая к задаче о температурном скачке для электронов, о поведении квантового боза-газа при низких температурах. При этом было использовано кинетическое уравнение с возбуждением фононов согласно Н.Н. Боголюбову.

В работах [15, 16] была решена задача о температурном скачке для электронной вырожденной плазмы в металле.

В работе [17] аналитическое решение задачи Смолуховского было получено и для квантовых газов.

В работах Черчиньяни и Фрезотти [18] задача Смолуховского рассматривалась с использованием одномерного кинетического уравнения. Полное аналитическое решение задачи Смолуховского с использованием уравнения Черчиньяни—Фрезотти было получено в работе [19].

### 1. Постановка задачи и основные уравнения

Приступим к постановке задачи Смолуховского для одномерного кинетического уравнения с частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул.

Начнем с общей постановки. Пусть газ занимает полупространство  $x > 0$ . Задана температура поверхности  $T_s$  и концентрация насыщенного пара поверхности  $n_s$ . Вдали от поверхности газ движется с некоторой скоростью  $u$ , являющейся скоростью испарения (или конденсации), и имеет градиент температуры

$$g_T = \left( \frac{d \ln T}{dx} \right)_{x=+\infty}.$$

Необходимо определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости и градиента температуры.

В задаче о слабом испарении требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости, считая градиент температуры равным нулю, а скорость испарения (конденсации) достаточно малой. Последнее означает, что  $u \ll v_T$ ,  $v_T$  – тепловая скорость молекул, имеющая порядок скорости звука,

$$v_T = \frac{1}{\sqrt{\beta_s}}, \quad \beta_s = \frac{m}{2k_B T_s},$$

$m$  – масса молекулы,  $k_B$  – постоянная Больцмана.

В задаче о скачке температуры требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от градиента температуры,

при этом скорость испарения (конденсации) считается равной нулю, а градиент температуры считается малым. Это означает, что

$$lg_T \ll 1, \quad l = \tau v_T, \quad \tau = \frac{1}{v_0},$$

где  $l$  – средняя длина свободного пробега газовых молекул,  $\tau$  – среднее время релаксации, т.е. время между двумя последовательными столкновениями молекул.

Объединим обе задачи – о слабом испарении (конденсации) и скачке температуры – в одну. Будем предполагать малость градиента температуры (т.е. малость относительного перепада температуры на длине свободного пробега) и малость скорости газа по сравнению со скоростью звука. В этом случае задача допускает линеаризацию и функцию распределения можно искать в виде

$$f(x, v) = f_0(v)(1 + h(x, v)),$$

где

$$f_0(v) = n_s \left( \frac{m}{2\pi k_B T_s} \right)^{1/2} \exp\left[ -\frac{mv^2}{2k_B T_s} \right]$$

есть абсолютный максвеллиан.

Перейдем к безразмерной скорости  $\mu = \sqrt{\beta}v = v/v_T$  и безразмерной координате

$$x' = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k_B T_s}} x = \frac{x}{l}$$

Переменную  $x'$  будем снова обозначать через  $x$ .

Возьмем кинетическое уравнение [1]

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial h}{\partial x} + (1 + \sqrt{\pi}a|\mu|)h(x, \mu) = \\ & = (1 + \sqrt{\pi}a|\mu|) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} (1 + \sqrt{\pi}a|\mu'|) q(\mu, \mu', a) h(x, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $q(\mu, \mu', a)$  – ядро уравнения,

$$\begin{aligned} q(\mu, \mu', a) &= r_0(a) + r_1(a)\mu\mu' + r_2(a)(\mu^2 - \beta(a))(\mu'^2 - \beta(a)), \\ r_0(a) &= \frac{1}{a+1}, \quad r_1(a) = \frac{2}{2a+1}, \quad r_2(a) = \frac{4(a+1)}{4a^2+7a+2}, \\ \beta &= \beta(a) = \frac{2a+1}{2(a+1)}. \end{aligned}$$

Выведем кинетическое уравнение в предельном случае, когда частота столкновений пропорциональна модулю молекулярной скорости. Вернемся к выражению частоты столкновений и перепишем его в виде:

$$v(\mu) = v_0(1 + \sqrt{\pi}a|\mu|) = v_0 + v_1|\mu|,$$

где  $v_1 = \sqrt{\pi}v_0a$ . Устремим  $v_0$  к нулю. В этом пределе величина  $a$  стремится к  $+\infty$ , ибо  $a = v_1/\sqrt{\pi}v_0$ . Нетрудно видеть, что в этом пределе

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{\pi}a|\mu'|)q(\mu, \mu', a) = \sqrt{\pi}|\mu'|q_1(\mu, \mu'),$$

где

$$q_1(\mu, \mu') = 1 + \mu\mu' + (\mu^2 - 1)(\mu'^2 - 1).$$

Уравнение (1.1) при этом перепишется в виде:

$$\frac{\mu}{|\mu|} \frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x_1, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} |\mu'| q_1(\mu, \mu') h(x_1, \mu) d\mu'. \quad (1.2)$$

В этом уравнении

$$x_1 = v_1 \sqrt{\beta_s} x = \frac{x}{l_1}, \quad l_1 = v_T \tau_1, \quad \tau_1 = \frac{1}{v_1}.$$

Это уравнение является одномерным кинетическим уравнением с частотой столкновений, пропорциональной модулю молекулярной скорости.

Далее будем решать обобщенную задачу Смолуховского для уравнения (1.2). Сначала требуется корректно сформулировать обобщенную задачу Смолуховского как граничную задачу математической физики.

## 2. Кинетическое уравнение с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул, и постановка задачи

Прямолинейной подстановкой можно проверить, что кинетическое уравнение (1.2) имеет следующие четыре частных решения:

$$\begin{aligned} h_0(x, \mu) &= 1, \quad h_1(x, \mu) = \mu, \quad h_2(x, \mu) = \mu^2, \quad h_3(x, \mu) \\ &= (\mu^2 - \frac{3}{2})(x - \text{sign } \mu). \end{aligned}$$

Будем считать, что молекулы отражаются от стенки чисто диффузно, т.е. отражаются от стенки с максвелловским распределением по скоростям, т.е.

$$f(x, v) = f_0(v), \quad v_x > 0.$$

Отсюда для функции  $h(x, \mu)$  получаем:

$$h(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (2.1)$$

Условие (2.1) — это первое граничное условие к уравнению (1.2).

Асимптотическое распределение Чепмена—Энскога будем искать в виде линейной комбинации ее частных решений с неизвестными коэффициентами:

$$h_{as}(x, \mu) = A_0 + A_1\mu + A_2\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + A_3\left[\left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right)(x - \text{sign } \mu) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mu\right]. \quad (2.2)$$

Заметим, что в (2.2) скоростная мода ортогональна тепловой моде, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \mu \left[ \left( \mu^2 - \frac{3}{2} \right) (x - \text{sign } \mu) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu \right] d\mu = 0.$$

Кроме того, постоянная мода ортогональна температурной моде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \left( \mu^2 - \frac{1}{2} \right) d\mu = 0.$$

Для определения четырех постоянных  $A_0, A_1, A_2, A_3$  воспользуемся определениями макропараметров газа: концентрации, массовой скорости, температуры и скачков температуры и концентрации (числовой плотности).

Рассмотрим распределение числовой плотности:

$$n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) (1 + h(x, v)) dv = n_0 + \delta n(x).$$

Здесь

$$n_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) dv, \quad \delta n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) h(x, v) dv.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\delta n(x)}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) d\mu.$$

Обозначим:

$$n_e = n_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} (1 + h_{as}(x=0, \mu)) d\mu.$$

Отсюда получаем, что

$$\varepsilon_n \equiv \frac{n_e - n_0}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h_{as}(x=0, \mu) d\mu. \quad (2.3)$$

Величина  $\varepsilon_n$  – есть искомая величина скачка концентрации.

Подставляя (2.2) в (2.3), находим, что

$$\varepsilon_n = A_0. \quad (2.4)$$

Из определения размерной скорости газа:

$$u(x) = \frac{1}{n(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) v dv$$

получаем, что в линейном приближении безразмерная массовая скорость равна:

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) \mu d\mu.$$

Задавая «вдали от стенки» скорость испарения (конденсации), напомним

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h_{as}(x, \mu) \mu d\mu. \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.5) распределение (2.2), получаем, что

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_1. \quad (2.6)$$

Рассмотрим распределение температуры:

$$T(x) = \frac{2}{kn(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} (v - u_0(x))^2 f(x, v) dv.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned}\frac{\delta T(x)}{T_0} &= -\frac{\delta n(x)}{n_0} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) \mu^2 d\mu = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) d\mu.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $x \rightarrow +\infty$  асимптотическое распределение равно:

$$\frac{\delta T_{as}(x)}{T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h_{as}(x, \mu) \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) d\mu. \quad (2.7)$$

Задание градиента температуры вдали от стенки означает, что распределение температуры имеет вид:

$$T(x) = T_e + \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=+\infty} \cdot x = T_e + G_T x,$$

где

$$G_T = \left(\frac{dT}{dx}\right)_{+\infty}.$$

Это распределение представим в виде:

$$T(x) = T_s \left(\frac{T_e}{T_s} + g_T x\right) = T_s \left(1 + \frac{T_e - T_s}{T_s} + g_T x\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$g_T = \left(\frac{d \ln T}{dx}\right)_{x=+\infty},$$

или

$$T(x) = T_s (1 + \varepsilon_T + g_T x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.8)$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{T_e - T_s}{T_s}$$

– искомая величина скачка температуры.

Из выражения (2.8) видно, что относительное изменение температуры вдали от стенки описывается линейной функцией

$$\frac{\delta T_{as}(x)}{T_s} = \frac{T(x) - T_s}{T_s} = \varepsilon_T + g_T x, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.9)$$



Подставляя (2.2) в (2.7), получаем, что

$$\frac{\delta T_{as}(x)}{T_s} = A_2 + A_3 x. \quad (2.10)$$

Сравнивая (2.9) и (2.10), находим:

$$A_2 = \varepsilon_T, \quad A_3 = g_T.$$

Итак, асимптотическая функция распределения Чепмена—Энскога построена:

$$h_{as}(x, \mu) = \varepsilon_n + (2U - g_T) \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \varepsilon_T \left( \mu^2 - \frac{1}{2} \right) + g_T \left( \mu^2 - \frac{3}{2} \right) (x - \text{sign } \mu). \quad (2.11)$$

Теперь сформулируем второе граничное условие к уравнению (1.2):

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.12)$$

Теперь сформулируем основную граничную задачу — обобщенную задачу Смолуховского. Эта задача состоит в нахождении такого решения кинетического уравнения (1.2), которое удовлетворяет граничным условиям (2.1) и (2.12), причем в (2.12) асимптотическая функция распределения Чепмена—Энскога  $h_{as}(x, \mu)$  определяется равенством (2.11).

### 3. Общее решение одномерного кинетического уравнения

Заметим, что непрерывный спектр характеристического уравнения, отвечающего исходному уравнению (1.2), представляет собой пустое множество (см. [2] и [4]). Этот факт объясняется тем, что исходное уравнение (1.2) не содержит конвективной производной.

Поэтому решение исходного уравнения (1.2) будем искать в виде, полиномиальном по скоростной переменной. Мы ищем решение в виде линейной комбинации его инвариантов столкновений с неизвестными коэффициентами, зависящими от «пространственной» переменной:

$$h(x, \mu) = a_0(x) + a_1(x)\mu + a_2(x)(\mu^2 - 1) + \text{sign } \mu [b_0(x) + b_1(x)\mu + b_2(x)(\mu^2 - 1)]. \quad (3.1)$$

Подставим (3.1) в уравнение (1.2). Получим систему, состоящую из шести уравнений:

$$\begin{aligned} a_{0'} + b_{0'} + b_0 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} b_1, \\ a_{0'} - b_{0'} + b_0 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} b_1, \\ a_{1'} + b_{1'} + b_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} b_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} b_2, \\ -a_{1'} + b_{1'} - b_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} b_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} b_2, \\ a_{2'} + b_{2'} + b_2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} b_1, \\ -a_{2'} + b_{2'} - b_2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} b_1. \end{aligned}$$

Складывая первое уравнение со вторым, третье с четвертым, пятое с шестым, а затем вычитая, упростим эту систему:

$$a_{0'}(x) + b_{0'}(x) = 0, \quad (3.2)$$

$$b_{0'}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} b_1(x), \quad (3.3)$$

$$b_{1'}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} b_0(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} b_2(x), \quad (3.4)$$

$$a_{1'}(x) + b_{1'}(x) = 0, \quad (3.5)$$

$$b_{2'}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} b_1(x), \quad (3.6)$$

$$a_{2'}(x) + b_{2'}(x) = 0. \quad (3.7)$$

Продифференцируем уравнение (3.4) и воспользуемся уравнениями (3.3) и (3.6). Получаем уравнение

$$b_{1''}(x) = \frac{5\pi}{16} b_1(x),$$

откуда находим:

$$b_1(x) = B_1 e^{-\gamma_0 x}, \quad (3.8)$$

где  $B_1$  – произвольная постоянная, и

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{5\pi}}{4} \approx 0.9908.$$

Из уравнений (3.6) и (3.3) с помощью (3.8) получаем:

$$b_2(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}B_1e^{-\gamma_0x} + B_2, \quad (3.9)$$

$$b_0(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}B_1e^{-\gamma_0x} + B_0, \quad (3.10)$$

где  $B_0$  и  $B_2$  – произвольные постоянные.

Из уравнения (3.5) с помощью (3.8) находим:

$$a_1(x) = -\frac{1}{\gamma_0}B_1e^{-\gamma_0x} + A_1, \quad (3.11)$$

где  $A_1$  – произвольная постоянная.

Из уравнения (3.2) с помощью (3.11) находим:

$$a_0(x) = -\frac{8}{5\sqrt{\pi}}B_1e^{-\gamma_0x} - B_0x + A_0, \quad (3.12)$$

где  $A_0$  – произвольная постоянная.

Наконец, из уравнения (3.7) с помощью (3.9) находим:

$$a_2(x) = -\frac{8}{5\sqrt{\pi}}B_1e^{-\gamma_0x} - B_2x + A_2, \quad (3.13)$$

где  $A_2$  – произвольная постоянная.

Выпишем на основании равенств (3.8)–(3.13) общее решение уравнения (1.2) в явном виде:

$$\begin{aligned} h(x, \mu) = & -\frac{2}{\sqrt{5}}B_1e^{-\gamma_0x} - B_0x + A_0 + \mu\left[-\frac{1}{\gamma_0}B_1e^{-\gamma_0x} + A_1\right] + \\ & + (\mu^2 - 1)\left[-\frac{8}{5\sqrt{\pi}}B_1e^{-\gamma_0x} - B_2x + A_2\right] + \text{sign } \mu\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}B_1e^{-\gamma_0x} \right. \\ & \left. + B_0 + \right. \\ & \left. + \mu B_1e^{-\gamma_0x} + (\mu^2 - 1)\left[-\frac{2}{\sqrt{5}}B_1e^{-\gamma_0x} + B_2\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Выделим в этом решении (3.14) экспоненциально убывающее и полиномиальное решения:

$$\begin{aligned} h(x, \mu) = & B_1e^{-\gamma_0x}\left(\mu - \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma_0}\mu^2\right)\left(\frac{1}{\gamma_0} + \text{sign } \mu\right) + \\ & + A_0 + A_1\mu + A_2(\mu^2 - 1) + (\text{sign } \mu - x)[B_0 + B_2(\mu^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

#### 4. Решение обобщенной задачи Смолуховского

В этом п. докажем теорему об аналитическом решении основной граничной задачи (1.2), (2.1) и (2.11).

**ТЕОРЕМА.** *Граничная задача (1.2), (2.1) и (2.11) имеет единственное решение, представимое в виде суммы экспоненциально убывающего и полиномиального решений*

$$h(x, \mu) = -(2U - g_T) \frac{e^{-\gamma_0 x} 1 + \gamma_0 \operatorname{sign} \mu}{\sqrt{\pi} (1 + \gamma_0)} \left( \mu - \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma_0} \mu^2 \right) + \varepsilon_n + \varepsilon_T + (2U - g_T) \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \left( \mu^2 - \frac{3}{2} \right) [\varepsilon_T + g_T (x - \operatorname{sign} \mu)], \quad (4.1)$$

причем величины скачка температуры  $\varepsilon_T$  и скачка концентрации  $\varepsilon_n$  даются равенствами:

$$\varepsilon_T = \left( 1 + \frac{1}{2\gamma_0} \right) g_T - \frac{1}{2\gamma_0} (2U), \quad (4.2)$$

и

$$\varepsilon_n = -\left( 1 - \frac{1}{4\gamma_0} \right) g_T - \frac{1}{4\gamma_0} (2U). \quad (4.3)$$

Решение (4.1) содержит решения двух задач — задачи о температурном скачке (когда  $U = 0$ ) (см. рис. 1)

$$\frac{h^T(x, \mu)}{g_T} = \frac{e^{-\gamma_0 x} 1 + \gamma_0 \operatorname{sign} \mu}{\sqrt{\pi} (1 + \gamma_0)} \left( \mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}} \right) - \left( 1 - \frac{1}{4\gamma_0} \right) - \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \left( 1 + \frac{1}{\gamma_0} \right) \left( \mu^2 - \frac{1}{2} \right) + (x - \operatorname{sign} \mu) \left( \mu^2 - \frac{3}{2} \right),$$

и задачи о слабом испарении (когда  $g_T = 0$ ) (см. рис. 2)

$$\frac{h^U(x, \mu)}{2U} = -\frac{e^{-\gamma_0 x} 1 + \gamma_0 \operatorname{sign} \mu}{\sqrt{\pi} (1 + \gamma_0)} \left( \mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{4\gamma_0} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} - \frac{\mu^2}{2\gamma_0}.$$

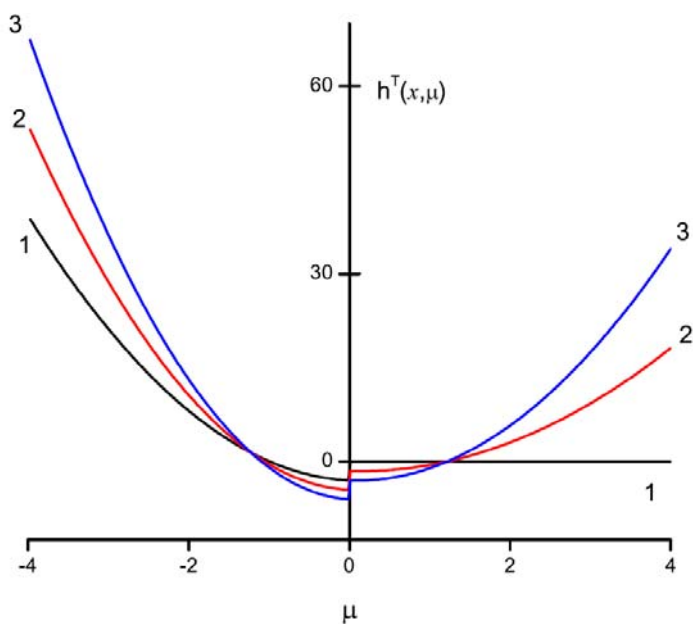


Рис.1. Функция распределения в задаче о температурном скачке.  
Кривые 1, 2, 3, отвечают значениям  $x = 0, 1, 2$ .

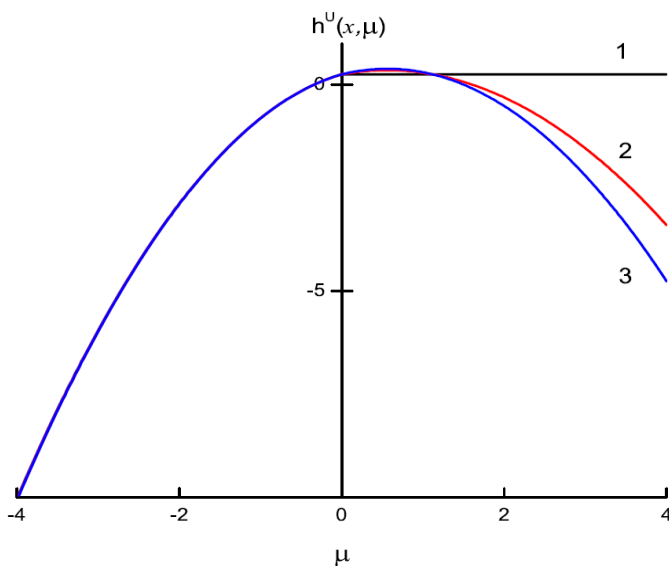


Рис. 2. Функция распределения в задаче о слабом испарении.  
Кривые 1,2,3 отвечают значениям  $x = 0, 1, 2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся граничным условием «вдали от стенки» (2.12). Подставим в условие (2.12) разложение (3.15). Получаем следующее уравнение

$$A_0 + A_1\mu + A_2(\mu^2 - 1) - (x - \text{sign } \mu)[B_0 + B_2(\mu^2 - 1)] = \\ = \varepsilon_n + (2U - g_T)\frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \varepsilon_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) + g_T(\mu^2 - \frac{3}{2})(x - \text{sign } \mu).$$

Отсюда сразу находим:

$$A_1 = \frac{2U}{\sqrt{\pi}} - \frac{g_T}{\sqrt{\pi}}, \quad B_2 = -g_T, \quad B_0 = \frac{g_T}{2}, \quad A_2 = \varepsilon_T, \quad A_0 = \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_T}{2}.$$

Воспользуемся граничным условием отражением молекул от стенки. Подставим разложение (3.15) в граничное условие (2.1). Получаем алгебраическое уравнение

$$B_1(\mu - \frac{2}{\sqrt{5}}\mu^2)(\frac{1}{\gamma_0} + 1) + \varepsilon_n + \\ + \frac{2U - g_T}{\sqrt{\pi}}\mu + \varepsilon_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) - g_T(\mu^2 - \frac{3}{2}) = 0.$$

Отсюда получаем систему из трех уравнений

$$\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_T}{2} + \frac{3}{2}g_T = 0, \\ B_1(1 + \frac{1}{\gamma_0}) + (2U - g_T)\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0, \\ -B_1\frac{2}{\sqrt{5}}(1 + \frac{1}{\gamma_0}) + \varepsilon_T - g_T = 0.$$

Из этих уравнений находим постоянную  $B_1$

$$B_1 = -\frac{2U - g_T}{\sqrt{\pi}(1 + 1/\gamma_0)},$$

а также величины скачков температуры и концентрации:

$$\varepsilon_T = (1 + \frac{1}{2\gamma_0})g_T - \frac{1}{2\gamma_0}(2U), \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_n = -(1 - \frac{1}{4\gamma_0})g_T - \frac{1}{4\gamma_0}(2U). \quad (4.5)$$

Формулы (4.4) и (4.5) в точности совпадают с формулами скачков температуры и концентрации (4.2) и (4.3).

Таким образом, решение граничной задачи построено и имеет следующий вид:

$$h(x, \mu) = -\frac{(2U - g_T)e^{-\gamma_0 x}}{\sqrt{\pi}(1 + \frac{1}{\gamma_0})} \left(\mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}}\right) \left(\text{sign } \mu + \frac{1}{\gamma_0}\right) + \varepsilon_n + (2U - g_T) \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \varepsilon_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + (x - \text{sign } \mu) \left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right) g_T. \quad (4.6)$$

Разложение (4.6) в точности совпадает с разложением (4.1), если учесть выражения (4.2) и (4.3) для величины скачков температуры и концентрации. Теорема доказана.

Заметим, что полиномиальный «хвост» решения (4.1) является асимптотическим разложением Чепмена—Энскога. Это значит, что решение (4.1) можно представить в виде:

$$h(x, \mu) = -\frac{(2U - g_T)e^{-\gamma_0 x}}{\sqrt{\pi}(1 + \frac{1}{\gamma_0})} h^*(\mu) + h_{as}(x, \mu),$$

где

$$h^*(\mu) = \left(\mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}}\right) \left(\text{sign } \mu + \frac{1}{\gamma_0}\right).$$

Преобразуем разложение Чепмена—Энскога:

$$h_{as}(x, \mu) = \varepsilon_n + (2U - g_T) \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \varepsilon_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + g_T \left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right) (x - \text{sign } \mu)$$

с помощью равенств для скачка температуры и скачка концентрации. В результате получаем, что

$$h_{as}(x, \mu) = g_T \left[ -\left(1 - \frac{1}{4\gamma_0}\right) - \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\gamma_0}\right) \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + (x - \text{sign } \mu) \left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right) \right] + (2U) \left[ \frac{1}{4\gamma_0} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} - \frac{\mu^2}{2\gamma_0} \right] \quad (4.7)$$

Таким образом, окончательно функция распределения в обобщенной задаче Смолуховского равна:

$$h(x, \mu) = -\frac{e^{-\gamma_0 x}}{\sqrt{\pi}} (2U - g_T) \left(\mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}}\right) \frac{1 + \gamma_0 \text{sign } \mu}{1 + \gamma_0} + h_{as}(x, \mu), \quad (4.8)$$

причем разложение Чепмен—Энскога  $h_{as}(x, \mu)$  определяется равенством (4.7). Разложение (4.8) в точности совпадает с разложением (4.1).

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.** Выражение (4.8) содержит функцию распределения отраженных от стенки молекул:

$$h^+(x, \mu) = -\frac{e^{-\gamma_0 x}}{\sqrt{\pi}} (2U - g_T) \left( \mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}} \right) + \varepsilon_n + \varepsilon_T + \frac{2U - g_T}{\sqrt{\pi}} \mu + \left( \mu^2 - \frac{3}{2} \right) [\varepsilon_T + g_T(x - 1)],$$

а также функцию распределения летящих к стенке молекул, которая выражается распределением Чепмена—Энскога:

$$h^-(x, \mu) = -\frac{e^{-\gamma_0 x}}{\sqrt{\pi}} (2U - g_T) \frac{1 - \gamma_0}{1 + \gamma_0} \left( \mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}} \right) + \varepsilon_n + \varepsilon_T + \frac{2U - g_T}{\sqrt{\pi}} \mu + \left( \mu^2 - \frac{3}{2} \right) [\varepsilon_T + g_T(x + 1)].$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.** Разложение (4.1) содержит решения двух задач — задачи о температурном скачке

$$\frac{h^T(x, \mu)}{g_T} = e^{-\gamma_0 x} h^*(\mu) + h_{as}^T(x, \mu)$$

и решение задачи о слабом испарении

$$\frac{h^U(x, \mu)}{g_T} = -e^{-\gamma_0 x} h^*(\mu) + h_{as}^U(x, \mu).$$

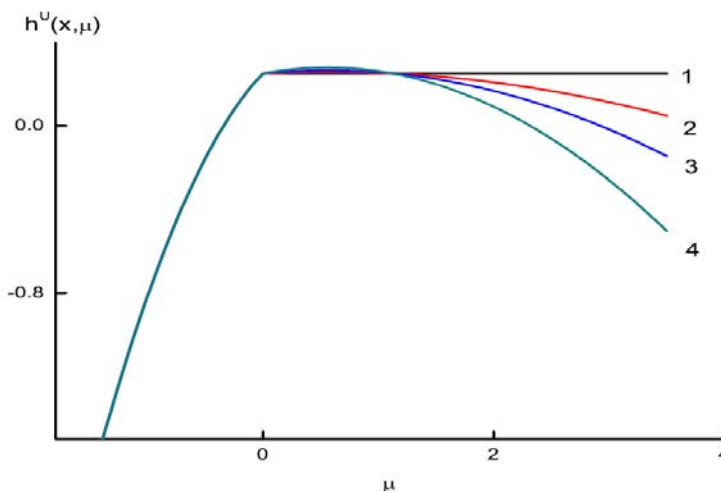


Рис.3. Функция распределения в задаче о слабом испарении. Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям  $x = 0; 0,05; 0,1; 0,2$ .



В этих равенствах введены обозначения

$$h^*(\mu) = \left(\mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}}\right) \frac{1 + \gamma_0 \operatorname{sign} \mu}{\sqrt{\pi}(1 + \gamma_0)},$$

$$h_{as}^T(x, \mu) = -\left(1 - \frac{1}{4\gamma_0}\right) - \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\gamma_0}\right)\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + (x - \operatorname{sign} \mu)\left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right),$$

$$h_{as}^U(x, \mu) = \frac{1}{4\gamma_0} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} - \frac{\mu^2}{2\gamma_0}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.** Из приведенных выше равенств видно, что функция распределения в задаче о температурном скачке является разрывной в точке  $\mu = 0$ , а функция распределения в задаче о слабом испарении является непрерывной на всей действительной оси, в том числе и в точке  $\mu = 0$ .

Величина скачка функции распределения отраженных от стенки и летящих к стенке молекул в точке  $\mu = 0$  равна:

$$h_+^T(x, +0) - h_-^T(x, -0) = 3g_T.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.** Заметим, что в задаче о слабом испарении функцию распределения можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{h^U(x, \mu)}{2U} = \frac{1}{4\gamma_0} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\mu - \frac{2\mu^2}{\sqrt{5}}\right) \left[1 - \frac{1 + \gamma_0 \operatorname{sign} \mu}{1 + \gamma_0} e^{-\gamma_0 x}\right].$$

Из этой формулы, в частности, вытекает, что на границе  $x = 0$  функция распределения отраженных молекул постоянна (см. рис. 2):

$$\frac{h_+^U(0, \mu)}{2U} = \frac{1}{4\gamma_0}, \quad \mu > 0.$$

## 5. Температурный скачок и слабое испарение (конденсация). Распределение макропараметров газа

Численные расчеты коэффициентов скачка температуры и концентрации приводят к следующим результатам:

$$\varepsilon_T = 1.5046g_T - 0.5046(2U), \quad \varepsilon_n = -0.7477g_T - 0.2523(2U).$$

Для сравнения приведем коэффициенты скачка температуры и скачка концентрации, найденные с помощью одномерного кинетического уравнения с постоянной частотой столкновений [4]:

$$\varepsilon_T = 1.3068g_T - 0.4443(2U), \quad \varepsilon_n = -3.3207g_T - 0.8958(2U).$$

Рассмотрим распределение концентрации, массовой скорости и температуры в зависимости от координаты  $x$ .

Начнем с распределения концентрации (числовой плотности). По определению получаем:

$$\frac{\delta n(x)}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) d\mu = -g_T N_T(x) - (2U) N_U(x),$$

где

$$N_T(x) = 0.7477 + x - 0.0317e^{-\gamma_0 x}, \quad N_U(x) = 0.2523 + 0.0317e^{-\gamma_0 x}.$$

Распределение массовой скорости при  $x > 0$  тривиально:  $U(x) \equiv U$ . В самом деле, воспользовавшись решением (4.1), нетрудно проверить, что

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \mu h(x, \mu) d\mu \equiv U.$$

Рассмотрим распределение температуры. По определению получаем:

$$\frac{\delta T(x)}{T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) h(x, \mu) d\mu = T_T(x) g_T - T_U(x) (2U),$$

где

$$T_T(x) = 1.5046 + x + 0.0639e^{-\gamma_0 x}, \quad T_U(x) = 0.5046 + 0.0639e^{-\gamma_0 x}.$$

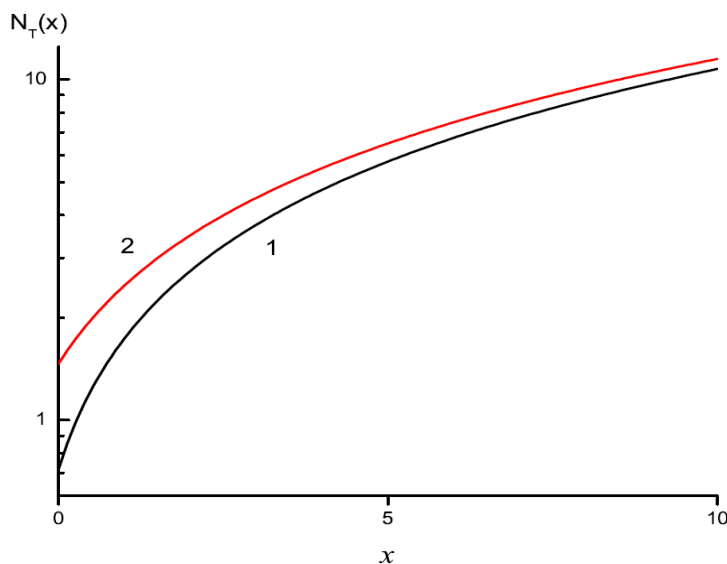


Рис.4. Поведение кинетического коэффициента  $N_T(x)$  (кривая 1), кривая 2 - это асимптотика  $N_{Tas}(x) = 0,7477 + x$ .

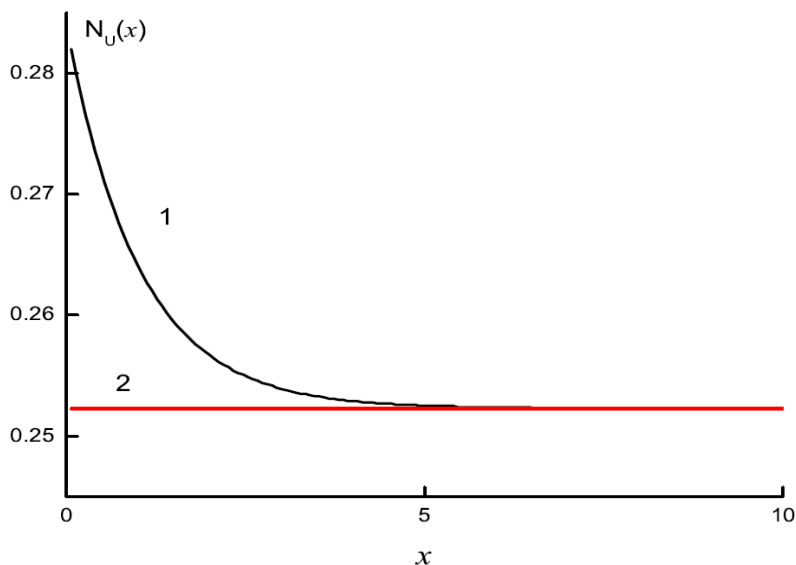


Рис. 5. Поведение кинетического коэффициента  $N_U(x)$  (кривая 1), кривая 2 - это асимптотика  $N_{Uas}(x) = 0,2523$ .

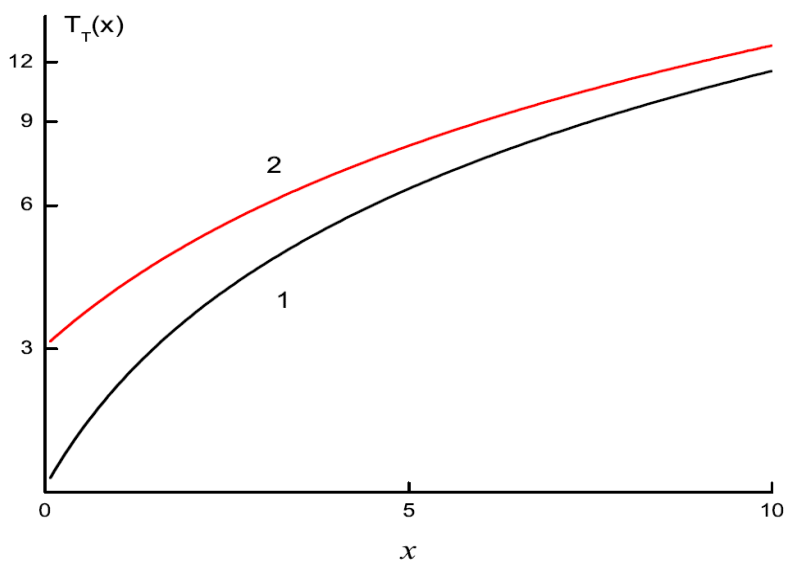


Рис. 6. Поведение кинетического коэффициента  $T_T(x)$  (кривая 1), кривая 2 - это асимптотика  $T_{Tas}(x) = 1,5046 + x$ .

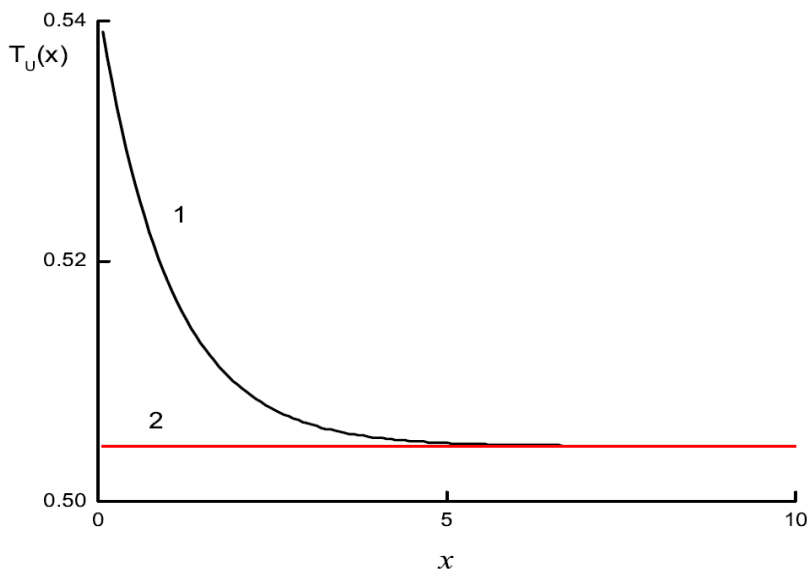


Рис. 7. Поведение кинетического коэффициента  $T_U(x)$  (кривая 1), кривая 2 - это асимптотика  $T_{Uas}(x) = 0,5046$ .

## 6. Заключение

В настоящей работе рассматривается аналитическое решение граничных задач для одномерного кинетического уравнения с частотой столкновений молекул, пропорциональной модулю скорости молекул. Это уравнение является предельным случаем аффинной зависимости частоты столкновений молекул от модуля их скорости.

Рассматривается решение обобщенной задачи Смолуховского – задачи о температурном скачке и слабом испарении (конденсации).

Выведены формулы для вычисления скачка температуры и скачка концентрации. В явном виде получена функция распределения газовых молекул, а также распределения концентрации и температуры в полупространстве  $x > 0$ .

Оказалось, что функция распределения в задаче о слабом испарении является непрерывной при всех скоростях молекул. Проведены все необходимые численные расчеты. Проведено графическое исследование функции распределения отраженных и летящих к стенке молекул, а также всех кинетических коэффициентов.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Бугримов А.Л., Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетическое одномерное уравнение частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика». 2014. № 1, с. 3-15.
2. Бугримов А.Л., Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для одномерного уравнения с частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика». 2014. № 2, с. 3-20.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для одномерного кинетического уравнения с постоянной частотой столкновений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика». 2014. № 3, с. 3-22.
4. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Kinetic equations type Williams and their exact solutions. Monograph. M.: MGOU (Moscow State Regional University), 2004, 271 p. [russian].
5. Latyshev A.V. Application of case' method to the solution of linear kinetic BGK equation in a problem about temperature jump // Appl. math. and mech. 1990. V. 54. Is. 4. P. 581-586. [russian].
6. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Boundary problems for model Boltzmann equation with frequency proportional to velocity of molecules // Izvestiya Russian Academy of Science. Ser. Mechanika, Fluid and Gas (Russian "Fluids Dynamics"). 1996. № 3. 140-153 pp. [russian].
7. Dolgosheina E.B., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of the problem about strong evaporation (condensation) // Izvestiya Russian Academy of Science. Ser. Mechanika, Fluid and Gas (Russian "Fluids Dynamics"). 1993. № 6. 143-155 pp. [russian].
8. Cassell J.S., Williams M.M.R. An exact solution of the temperature slip problem in rarefied gases // Transport Theory and Statist. Physics, 2(1), 81-90 (1972).
9. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump and weak evaporation in molecular gases // J. of experim. and theor. physics. 1998. V. 114. Issue. 3(9). P. 956-971. [russian].
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The Smoluchowski problem in polyatomic gases // Letters in J. of Tech. Phys. 1998. V. 24. 17. P. 85-90. [russian].
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytic solutions of boundary value problem for model kinetic equations // Math. Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and control in condensed Systems and Other Media. Edited by L.A. Uvarova and A.V. Latyshev. Kluwer Academic. New York-Moscow. 2001. P. 17-24.

12. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smolukhowski problem for degenerate Bose gases// Theoretical and Mathematical Physics. Springer New York. Vol. 155, 3, June, 2008, pp. 936 – 948.
13. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases in the presence of the Bose–Einstein condensate // Theor. Math. Phys. 2010. V. 162(1). P. 95–105 [russian].
14. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose–Einstein condensate, Theor. Math. Phys., 165:1 (2010), 1358–1370.
15. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smoluchowski problem for electrons in metal// Theor. Math. Phys. 2005, january, V. 142. 1. С. 93–111. [russian].
16. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smoluchowski problem for metals with mirror-diffusive boundary conditions //Theor. and Math. Phys. October 2009, Volume 161, Is. 1, pp. 1403-1414.
17. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Boundary value problems for quantum gases. Monograph M.: MГОU, 2012, 266 p.[russian].
18. Cercignani C., Frezzoti A. Linearized analysis of a one-speed B.G.K. model in the case of strong condensation// Bulgarian Academy of sci. theor. appl. mech. Sofia. 1988. V.XIX. 3. 19-23 P.
19. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of one-dimensional problem about moderate strong evaporation (and condensation) in half-space// Appl. mech. and tech. physics. 1993. 1. 102-109 p. [russian].