УДК 512.579

Апраксина Т.В., Кожухов И.Б.
Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва)

ЗАМЕЧАНИЯ О ДИАГОНАЛЬНЫХ ПОЛИГОНАХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛУГРУПП

Аннотация. Рассматриваются диагональные полигоны и биполигоны над инвариантными слева или справа полугруппами. Доказано, что диагональный правый полигон $(S \times S)_S$ такой полугруппы S не является конечно порождённымв случае, когда полугруппа S инвариантна слева или справа. Более того, доказывается, что для биполигонов ${}_S(S \times S)_S$ данное утверждение неверно. Кроме того, построен пример бесконечной простой справа (а значит, инвариантной справа) сократимой справа полугруппы S, у которой диагональный биполигон ${}_S(S \times S)_S$ является циклическим.

Ключевые слова: диагональный полигон, биполигон, полигон над полугруппой, инвариантная справа (слева) полугруппа, диагональный ранг полугруппы.

T. Apraksina, I. Kozhukhov

National Research University of Electronic Technology (Moscow, Russia)

NOTES ON DIAGONAL ACTS OVER INVARIANT SEMIGROUPS

Abstract. The diagonal acts and biacts over right or left invariant semigroups are considered. It is proved that the diagonal right act $(S \times S)_S$ of such semigroup S is not finitely generated in case of invariant right or left invariant semigroup.Moreover, it is proved that this statement is wrong in case of biacts ${}_S(S \times S)_S$.Besides an example is constructed where S is an infinite right simple (and therefore right invariant) right cancellative semigroup and the biacts ${}_S(S \times S)_S$ is cyclic.

Keywords: diagonal act, biact, act over a semigroup, right (left) invariant semigroups, diagonal rank of semigroup.

В работе [6] (теорема 6.1) было доказано, что диагональный полигон $(S \times S)_S$ бесконечной коммутативной полугруппы S не может быть конечно порождённым. В [5] (теорема 4.8) этот результат был существенно усилен, а именно, $(S \times S)_S$ не является конечно порождённым для бесконечной полугруппы S удовлетворяющей некоторому нетривиальному полугрупповому тождеству. В другом направлении обобщение упомянутого выше результата Галлагера состояло в доказательстве того, что для бесконечной инвариантной слева полугруппы S единицей полигон $(S \times S)_S$ не является конечно порождённым (теорема 3.3 из [2], теорема 4.4 из [5]). Цель данной работы — доказать без предположения о наличии в полугруппе единичного элемента, что диагональный правый полигон $(S \times S)_S$ не является конечно порождённым в случае, когда полугруппа S инвариантна слева или справа. Кроме того, мы доказываем, что для биполигонов $(S \times S)_S$ данное утверждение неверно. А именно, строим пример полугруппы S, которая бесконечна, проста справа (а значит, инвариантна справа) и сократима справа, а диагональный биполигон $(S \times S)_S$ является циклическим. Построение примера состоит в некотором упрощении примера из [1], который, в свою очередь, основывался на идеях, использовавшихся в доказательствах леммы 4.1 и теоремы 4.3 из [7].

Для произвольной полугруппы S мы, как обычно, полагаем $S^1 = S$, если S имеет единицу, и $S^1 = S \cup \{1\}$, если S не имеет единицы. Полугруппа S называется *инвариантной слева*, если любой её левый идеал является двусторонним. Инвариантные справа полугруппы определяются двойственным образом. Инвариантность слева полугруппы S очевидно, равносильна следующему условию: $\forall a, x \in S\ \exists y \in S^1\ ax = ya$. Далее, *правым полигоном*[8] над полугруппой S называется множество X, на котором действует полугруппа S, то есть определено отображение $(x,s) \mapsto xs$ такое, что выполняется тождество $(xs)s' = x(ss')$ для $x \in X$, $s, s' \in S$.*Левый полигон* Y над полугруппой S определяется двойственным образом, то есть как отображение $S \times Y \to Y$, $(s,y) \mapsto sy$, причём $s(s'y) = (ss')y$ для $y \in Y$, $s, s' \in S$. Если множество X является левым полигоном над полугруппой S и правым полигоном над полугруппой T, то оно будет называться *биполигоном* в случае, когда выполняется условие $(sx)t = s(xt)$ при $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$. Если S — полугруппа, то множество $S \times S$ будет являться правым полигоном над S относительно действия $(x,y)s = (xs, ys)$ при всех $x, y, s \in S$, левым относительно действия $s(x,y) = (sx, sy)$, а также биполигоном. Назовём их соответственно *правым, левым диагональными полигонами*, а также *диагональным биполигоном*. Будем обозначать их $(S\times S)_S$, $(S\times S)_S$, $(S\times S)_S$.

Подмножество $A\subseteq S\times S$ будем называть *порождающим множеством* полигона $(S\times S)_S$, если $AS^1=S\times S$. Аналогично определяются порождающие множества диагонального левого и диагонального биполигона. Если никакое собственное подмножество порождающего множества не является порождающим, то оно называется *неприводимым*. Известно, что неприводимое порождающее множество является минимальным по мощности ([3], теорема 1). *Правым диагональным рангом* полугруппы S будем называть мощность минимального порождающего множества полигона $(S\times S)_S$. Аналогичным образом определяются *левый диагональный ранг* и *бидиагональный ранг* полугруппы. Будем обозначать их $\operatorname{rdr} S$, $\operatorname{ldr} S$ и $\operatorname{bdr} S$ соответственно (см. [5]).

Теорема 1. *Если S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и бидиагональный ранг bdr$S<\infty$, то $S=A\cup N$, где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — идеал полугруппы S или пустое множество.*

Доказательство. Пусть S — бесконечная инвариантная слева полугруппа, у которой $\operatorname{bdr} S<\infty$. Далее пусть $\{(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)\}$ — система образующих диагонального биполигона ${}_S(S\times S)_S$. Мы имеем: $S\times S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}S^1(a_i,b_i)S^1$. Отсюда $S=S^1a_1S^1\cup\ldots\cup S^1a_nS^1$. Без ограничения общности мы можем считать, что $S^1a_1S^1$ — максимальный среди идеалов $S^1a_iS^1$. Положим $N=\{x\in S\mid a_1\notin S^1xS^1\}$. Очевидно, N, если оно непусто, является идеалом полугруппы S. Докажем, что в этом случае N — максимальный идеал. Пусть $y\notin N$. Тогда $a_1\in S^1yS^1$. Кроме того, $y\in S^1a_iS^1$ для некоторого i. Отсюда $S^1a_1S^1\subseteq S^1yS^1\subseteq S^1a_iS^1$. Ввиду максимальности идеала $S^1a_1S^1$ имеем: $S^1a_1S^1=S^1a_iS^1=S^1yS^1$. Следовательно, $y\in S^1a_1S^1$. Это означает, что $S=S^1a_1S^1\cup N$, то есть N — максимальный идеал.

Предположим, что $N\neq\varnothing$. Тогда полугруппа $\overline{S}=S/N$ не имеет идеалов, кроме $\overline{S}$ и $\{0\}$. Следовательно, по лемме 2.26 из [4] либо $\overline{S}$ — 0-простая полугруппа, либо $\overline{S}$ — двухэлементная полугруппа с нулевым умножением. Если имеет место второй случай, то $S=\{a_1\}\cup N$, причём $a_1^2\in N$. Так как S бесконечна, то N также бесконечно. Пусть $u\in N$. Имеем: $(a_1,u)=s(a_i,b_i)t$ для некоторых $i\le n$ и $s,t\in S^1$. Так как $\overline{S}^2=\{0\}$, то $s=t=1$, откуда $u=b_i$. Таким образом, элементов b_i бесконечно много, что противоречит условию. Наши рассуждения показывают, что $\overline{S}$ — 0-простая полугруппа.

Ввиду инвариантности слева $S^1aS^1=S^1a$. Следовательно, $S=S^1a_1\cup\ldots\cup S^1a_n$. Положим $A=S\setminus N$. Пусть $x\in A$. Ранее было доказано, что в этом случае $S^1xS^1=S^1a_1S^1$. Следовательно, $S^1x=S^1a_1$. Отсюда $\overline{S}^1x=\overline{S}^1a_1$. Это показывает, что $\overline{S}$ — 0-простая слева полугруппа. Хорошо известно, что в этом случае нуль полугруппы $\overline{S}$ изолированный (то есть $xy\neq 0$ при $x,y\neq 0$), а множество $\overline{S}\setminus\{0\}$ является простой слева полугруппой. Таким образом, A — простая слева полугруппа.

Докажем, что A бесконечна. Пусть $|A|<\infty$. Тогда N бесконечно. Пусть $a\in A,u\in N$. Имеем: $(a,u)=s(a_i,b_i)t$ при некоторых $i\le n$ и $s,t\in S^1$. Так как $sa_it\in A$, то $s,t\in A^1$, поэтому $u=sb_it\in A^1b_iA^1$. Таким образом, $N\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A^1b_iA^1$, то есть N — конечное множество, что противоречит предыдущему. Итак, $S=A\cup N$, где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — идеал.

В случае $N=\varnothing$, рассуждая аналогично предыдущему, мы получаем, что $S=A$ — бесконечная простая слева полугруппа. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и $bdrS\le 2$, то S простая слева.*

Доказательство. По теореме 1 $S=A\cup N$, где A — простая слева, $N=\varnothing$ или N — идеал. Если $N\neq\varnothing$, то в системе образующих биполигона

${}_S(S\times S)_S$ должны быть обязательно пары вида $(a,a'),\ (a,u),\ (u,a)$ для некоторых $a,a'\in A,\ u\in N,$ откуда $\operatorname{bdr} S\geq 3.$ Следовательно, $N=\varnothing.$

Теорема 2. *Если* S *— бесконечная инвариантная слева полугруппа, то* $rdrS=\infty.$

Доказательство. Предположим, что S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и $\operatorname{rdr} S<\infty.$ Тогда $\operatorname{bdr} S<\infty,$ откуда по теореме 1 получаем, что $S=A\cup N,$ где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — пустое множество или идеал. Если $\{(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)\}$ — множество образующих правого диагонального полигона $(S\times S)_S$, то нетрудно видеть, что те пары $(a_i,b_i),$ где $a_i,b_i\in A,$ будут образовывать порождающее множество полигона $(A\times A)_A.$ Пусть это будут пары $(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k).$ Имеем: $(a_1,b_1)A^1\cup\ldots\cup(a_k,b_k)A^1=A\times A.$ Отсюда $A=a_1A^1\cup\ldots\cup a_kA^1.$ Так как A простая слева, то $Aa=A$ для всех $a\in A.$ Следовательно, $a_1=sa_1$ для некоторого $s\in A$. Далее, $s=a_{i_1}t$ при некоторых $i_1\leq k$ и $t\in A^1.$ Кроме того, $a_1=ua_{i_1}$ при некотором $u\in A.$ Таким образом, $a_1=a_{i_1}tua_{i_1}$, то есть $a_1\in a_{i_1}Aa_{i_1}$. Рассуждая аналогично, получим $a_{i_1}\in a_{i_2}Aa_{i_2}$, $a_{i_2}\in a_{i_3}Aa_{i_3}$ и т.д. Так как количество a_i конечно, то мы будем иметь $a_{i_{m+d}}=a_{i_m}$ при некоторых $m,d>0.$ Следовательно, $a_{i_m}\in a_{i_m}Aa_{i_m}$. Это влечёт, что a_{i_m} — регулярный элемент полугруппы $A.$ Значит, A имеет идемпотент. По теореме, двойственной теореме 1.27 из [4], простая слева полугруппа с идемпотентом является левой группой, то есть $A\cong L\times G,$ где L — полугруппа левых нулей, а G — группа. Так как L и G являются гомоморфными образами полугруппы $A,$ то $\operatorname{rdr} L<\infty$ и $\operatorname{rdr} G<\infty.$ Нетрудно видеть, что в этом случае L и G — конечные полугруппы. Таким образом, $|A|<\infty,$ а это противоречит ранее доказанному. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* S *— бесконечная инвариантная слева полугруппа, то* $\operatorname{ldr} S=\infty.$

Доказательство. Пусть S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и $\operatorname{ldr} S < \infty$. Тогда также $\operatorname{bdr} S < \infty$. По теореме 1 $S = A \cup N$, где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — идеал. Очевидно, $\operatorname{ldr} A < \infty$.

Итак, A — бесконечная полугруппа, $Aa = A$ для всех $a \in A$ и $\operatorname{ldr} A < \infty$. Для $a \in A$ положим $\rho_a = \{(x, y) \in A \times A \mid ax = ay\}$. Для $a, b \in A$ имеем: $a = ub, b = va$ при некоторых $u, v \in A$. Поэтому $(x, y) \in \rho_a \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_b$, то есть ρ_a не зависит от a. Следовательно, $\rho_a = \{(x, y) \in A \times A \mid \forall u\ ux = uy\}$. Нетрудно проверить, что ρ_a — конгруэнция полугруппы A. Обозначим ρ_a через ρ. Докажем, что фактор-полугруппа A/ρ бесконечна. Пусть $|A/\rho| < \infty$. Возьмём любое $b \in A$. Тогда $(b^i, b^j) \in \rho$ при некоторых $i \neq j$. Отсюда $ub^i = ub^j$ при всех $u \in S$. Взяв $u = b$, получим: $b^{i+1} = b^{j+1}$. Так как $i \neq j$, то b — элемент конечного порядка, а значит, b^k — идемпотент при некотором $k \in \mathrm{N}$. Снова воспользуемся тем фактом, что простая слева полугруппа с идемпотентом является левой группой, то есть $A \cong L \times G$, где L — полугруппа левых нулей, а G — группа. Но в этом случае, так как L или G бесконечно, $\operatorname{ldr} A = \infty$. Таким образом, $|A/\rho| = \infty$. Положим $\overline{A} = A/\rho$. Проверим, что полугруппа $\overline{A}$ сократима слева. Пусть $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a}\,\overline{c}$. Тогда $(ab, ac) \in \rho$. Это влечёт, что $uab = uac$ при всех u. Отсюда $(b, c) \in \rho_{ua}$, а значит, $\overline{b} = \overline{c}$. Обозначим полугруппу $\overline{A}$ снова буквой A, убрав «старое» A из рассмотрения. Таким образом, A — простая слева сократимая слева бесконечная полугруппа и $\operatorname{ldr} A < \infty$. Пусть $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ — система образующих полигона ${}_A(A \times A)$. Возьмём любой элемент $a \in A$. Мы имеем: $(a, a^2) = s_1(a_{i_1}, b_{i_1})$ при некоторых s_1, i_1. Отсюда $a = s_1 a_{i_1}, a^2 = s_1 b_{i_1}$, то есть $s_1 a_{i_1} a = s_1 b_{i_1}$, а значит, $a_{i_1} a = b_{i_1}$. Далее, $(a, a^3) = s_2(a_{i_2}, b_{i_2})$, откуда $a_{i_2} a^2 = b_{i_2}$. Для любого k мы будем иметь $a_{i_k} a^k = b_{i_k}$. Но индексы $i_k \leq n$ при всех k, поэтому $i_k = i_t$ при некоторых $k \neq t$. Мы получаем: $a_{i_k} a^k = b_{i_k} = a_{i_k} a^t$. Сократив на a_{i_k}, получим: $a^k = a^t$. Отсюда получаем, что A имеет идемпотент. Следовательно, A – левая группа. Значит, $\operatorname{ldr} A = \infty$, что противоречит ранее установленному. Теорема доказана.

Так как простые слева (справа) полугруппы являются инвариантными слева (справа), то мы получаем следующее следствие из теорем 2, 3 и двойственных к ним.

Следствие 2. *Бесконечная простая справа или слева полугруппа имеет бесконечные диагональные левый и правый ранги.*

Итак, мы установили, что диагональный левый и диагональный правый ранги любой бесконечной инвариантной слева или справа полугруппы всегда бесконечны. Однако, бидиагональный ранг таких полугрупп может равняться единице, как показывает следующее утверждение. Но для его доказательства нужно провести предварительные рассуждения.

Пусть X — множество и $\alpha, \beta : X \to X$ — отображения. Построим ориентированный двудольный граф $G(\alpha, \beta)$, у которого множеством вершин является объединение двух непересекающихся копий множества X, а рёбрами – пары вида $(x, x\alpha)$ и $(x, x\beta)$, где $x \in X$. Отметим, что начало и конец каждого ребра принадлежатразным экземплярам множества X. Нетрудно видеть, что в случае, когда α и β инъективны, компоненты связности графа $G(\alpha, \beta)$ могут быть лишь следующих видов:

$K_n^{(1)} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$, где $x_1\alpha = y_1, \ldots, x_n\alpha = y_n, x_1\beta = y_2, \ldots, x_{n-1}\beta = y_n, x_n\beta = y_1$;

$K_n^{(2)} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n+1}\}$, где $x_1\alpha = y_1, \ldots, x_n\alpha = y_n, x_1\beta = y_2, \ldots, x_n\beta = y_{n+1}$;

$K^{(3)} = \{x_n, y_n \mid n \in \mathrm{N}\}$, где $x_n\alpha = y_n, x_n\beta = y_{n+1}$ при $n \in \mathrm{N}$;

$K^{(4)} = \{x_n, y_n \mid n \in \mathrm{N}\} \cup \{y_0\}$, где $x_n\alpha = y_n, x_n\beta = y_{n-1}$ при $n \in \mathrm{N}$;

$K^{(5)} = \{x_n, y_n \mid n \in \mathrm{Z}\}$, где $x_n\alpha = y_n, x_n\beta = y_{n+1}$ при $n \in \mathrm{Z}$.

Отсюда видно, что существует лишь счётное число попарно неизоморфных компонент связности.

Предложение 1. *Пусть X – счётное множество, представленное в виде непересекающегося объединения счётных подмножеств: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots$ Обозначим через S полугруппу всех инъективных отображений $\alpha : X \to X$ таких, что $X\alpha \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_n$ для некоторого n (зависящего от α). Тогда S – бесконечная простая справа (а значит, и инвариантная справа) сократимая справа полугруппа, причём $bdr\ S = 1$.*

Доказательство. Так как S состоит из инъективных отображений, то S сократима справа. Докажем, что S проста справа. Пусть $\alpha, \beta \in S$. Тогда $X\beta \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_n$ при некотором n. Положим $x\gamma = (x\alpha^{-1})\beta$ для $x \in X\alpha$. Тогда γ – инъективное отображение $X\alpha \to X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Отобразим остальные элементы $(x \in X \setminus X\alpha)$ взаимно однозначно на множество X_{n+1}. Тогда получим инъективное отображение $\gamma : X \to X_1 \cup \ldots \cup X_{n+1}$. Очевидно, $\gamma \in S$ и $\alpha\gamma = \beta$.

Осталось доказать, что $\mathrm{bdr}\, S = 1$. Так как множество X_1 счётно и количество возможных неизоморфных компонент связности графов $G(\alpha, \beta)$ также счётно, то существуют инъективные отображения $\alpha_0, \beta_0 : X_1 \to X_1$ такие, что граф $G(\alpha_0, \beta_0)$ имеет счётное число компонент каждого класса изоморфных возможных компонент. Продолжим отображения α_0, β_0 на всё множество X так, чтобы α_0, β_0 осуществляли вложение множества $X_2 \cup X_3 \cup \ldots$ в множество X_2. Понятно, что в этом случае $\alpha_0, \beta_0 \in S$.

Докажем, что (α_0, β_0) – порождающий элемент диагонального биполигона ${}_S(S \times S)_S$. Пусть $\alpha, \beta \in S$ – произвольные элементы. Требуется построить отображения $\gamma, \delta \in S$ такие, что $\gamma(\alpha_0, \beta_0)\delta = (\alpha, \beta)$.

Построим вначале отображение γ. Пусть $K_1, K_2, \ldots$ – компоненты связности графа $G(\alpha, \beta)$. Отобразим множество $\{K_1, K_2, \ldots\}$ инъективно в множество компонент графа $G(\alpha_0,\beta_0)$ так, чтобы K_i отображалась в изоморфную ей компоненту K'_i, – это возможно ввиду строения графа $G(\alpha_0,\beta_0)$. Пусть $K_i \subseteq G(\alpha,\beta)$ отображается в $K'_i \subseteq G(\alpha_0,\beta_0)$. По условию $K_i \cong K'_i$. Мы можем считать, что K_i имеет рёбра (x_j, y_j), а K'_i – (u_j, v_j). Положим $x_j\gamma = u_j$ для всех j. Аналогичные действия проделаем для других компонент графа $G(\alpha,\beta)$. Очевидно, мы получим инъективное отображение $\gamma : X \to X_1$. Ясно, что $\gamma \in S$.

Построим теперь отображение δ. Положим $v_j\delta = y_j$ для всех j. Тем самым δ будет определено на множестве $X_1\alpha_0 \cup X_1\beta_0 \subseteq X_1$. По определению полугруппы S для некоторого n мы имеем $X\alpha \cup X\beta \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Доопределим δ на множество $X \setminus (X_1\alpha_0 \cup X_1\beta_0)$, например, так, чтобы это множество взаимно однозначно отображалось на множество X_{n+1}. Тогда δ будет вложением X в $X_1 \cup \ldots \cup X_{n+1}$. Следовательно, $\delta \in S$.

Проверим, что $\gamma\alpha_0\delta = \alpha$ и $\gamma\beta_0\delta = \beta$. Пусть $x \in X$. Тогда $x\gamma \in X_1$. Пусть $x\alpha = y$, $x\beta = y'$. С учётом построения отображения γ имеем: $x\gamma \in K'_i$. Посмотрим, какому классу изоморфизма принадлежат компоненты K_i и K'_i. Если, например, $K_i \cong K'_i \cong K_n^{(1)}$, то $x = x_j$, $y = y_j$, $y' = y_t$, где $t = j+1$ при $j < n$ и $t = 1$ при $j = n$. При этом $K_i = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$, $K'_i = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$. По определению отображения γ мы имеем: $x\gamma = u_j$. Кроме того, $u_j\alpha_0 = v_j$, $u_j\beta_0 = v_t$, $v_j\delta = y_j$, $v_t\delta = y_t$. Отсюда получаем: $x\gamma\alpha_0\delta = u_j\alpha_0\delta = v_j\delta = y_j = x\alpha$ и аналогично $x\gamma\beta_0\delta = x\beta$. Случаи, когда $K_i \cong K_n^{(2)}, K^{(3)}, K^{(4)}$ или $K^{(5)}$ рассматриваются аналогично. Следовательно, $x\gamma\alpha_0\delta = x\alpha$ и $x\gamma\beta_0\delta = x\beta$. Такимобразом, $\gamma(\alpha_0,\beta_0)\delta = (\alpha,\beta)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Апраксина Т. В., Барков И. В., Кожухов И. Б. Два примерадиагональных биполигонов. Фунд. иприкл. матем. 2013. Т. 18. Вып. 3. С. 3–9.
2. Барков И.В., Кожухов И.Б. Свойства диагональных полигонов и биполигонов. Уч. ЗапискиОрловскогогос. ун-та. 2012. Т. 6 (50). С. 45–51.
3. Карташов В.К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр. Дискрет. матем. 2008. Т. 20. № 4. С. 79–84.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: «Мир», 1972. 287 с.
5. Apraksina T.V., Barkov I.V., Kozhukhov I.B. Diagonal ranks of semigroups. Semigroup Forum (в печати).
6. Gallagher P. On the finite and non-finite generation of diagonal acts. Commun. Algebra. 2006. V. 34. P. 3123–3137.
7. Gallagher P., Ruškuc N. Generation of diagonal acts of some semigroups of transformations and relations. Bull. Austral. Math. Soc. 2005. V. 72. P. 139–146.
8. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. Berlin — New York: W. de Gruyter. 2000.