

# РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

---

УДК 530.1:514.8

*Алиев И.Н., Самедова З.А.*

*Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана*

## **ОПТИКО МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ И ТРАЕКТОРИЯ КВАНТА**

*Аннотация. В рамках специфичной модели дисперсионной связи между энергией и импульсом получено уравнение траектории релятивистских частиц (в частности, квантов). Выявлена полная аналогия с уравнениями для классических частиц (полученных из вариационного принципа механики) и лучей (выведенных из принципа Ферма). Сформулирована проблема дальнейшего развития задачи, связанная с конкретизацией вида потенциальной энергии кванта.*

*Ключевые слова: дисперсионное соотношение, вариационный принцип механики, принцип Ферма.*

*I. Aliev, Z. Samedova*

*Bauman Moscow State Technical University (Moscow, Russia)*

## **OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY AND QUANTUM TRAJECTORY**

*Abstract. Equation trajectory relativistic particles (in particular, quanta) received within the specific model of the dispersion relation between the energy and momentum. Revealed a complete analogy with the equations for classical particles (obtained from the variational principle of mechanics) and rays (derived from Fermat's principle). We formulate the problem of further development of the tasks associated with a particular form of the potential energy of the quantum.*

*Key words: dispersion relation, the variational principle of mechanics, Fermat's principle.*

Недавние исследования эволюции возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся жидкостей [1–2] показали возможность существования при определенных условиях дисперсионного соотношения в виде модуля линейной функции. На рис.1 представлен

фрагмент рисунка из работы [2]. Эта специфическая линейная связь между энергией и импульсом привела к идее приложить подобный подход к поведению кванта (фотона) и, применив к этой модели оптико-механическую аналогию, вывести уравнения траектории кванта. В связи с тем, что работа носит чисто квазиклассический характер и квантовость существует только в самом понятии кванта, фигурирующем в условиях приближения нашей задачи как частица, возникает аналогия с разобранными классическими, механическими и оптическими задачами, а также наложениями ограничений на структуру рассматриваемого объекта, поэтому в данном приближении достаточно обойтись понятием траектории, не рассматривая неопределенность координаты.

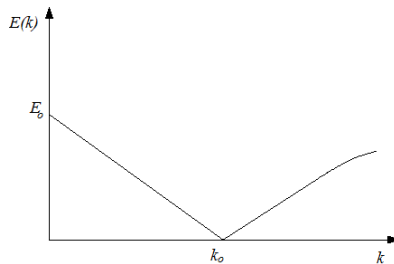


Рис. 1 Характерный вид энергетического спектра электрорипплов.  
( $E_0$  – энергия,  $k$  – волновое число)

Исходя из этой гипотезы попробуем представить энергию кванта в виде

$$E = c|\vec{p}| + U(\vec{r}) \quad (1)$$

и проанализируем к каким выводам может привести подобное предположение. Здесь  $c$  – некоторая константа, а структура второго слагаемого будет обсуждена в конце статьи. Для дальнейшего анализа воспользуемся вариационным принципом механики [3].

В начале напомним, что в классической механике предполагаются два различных подхода в постановке задач.

1. Требуется определить закон движения частицы в последующие моменты времени, если даны начальные условия:  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ ;  $\dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}_0$ .

2. Требуется определить закон движения частицы, если заданы ее положения в моменты времени 0 и  $T$ :  $\vec{r}(0) = \vec{r}_A$ ;  $\vec{r}(T) = \vec{r}_B$ .

Знаменательно, что уравнения движения при этом имеют один и тот же вид:

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\text{grad}U(\vec{r})$$

(естественно, что сила предполагается потенциальной).

Далее рассмотрим нерелятивистскую материальную частицу массы  $m$ , движущуюся в потенциальном поле с потенциалом  $U(\vec{r})$ . Уравнение ее движения имеет вид  $\dot{\vec{p}} = -\text{grad}U$ . Из этого уравнения и закона сохранения энергии  $\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) = E$ , вводя единичный вектор  $\vec{\tau} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ , касательный к

траектории движения, несложно вывести соотношение

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{2m[E - U(\vec{r})]}}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dl} \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))} \right) = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\text{grad}U.$$

Далее:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \left( \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))} \frac{d\vec{r}}{dl} \right) \frac{dl}{dt} &= -\text{grad}U; \\ \frac{d}{dl} \left( \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))} \frac{d\vec{r}}{dl} \right) &= -\frac{1}{v} \text{grad}U = -\frac{\text{grad}U}{\sqrt{2(E - U)/m}} = \\ &= -\frac{2m \text{grad}U}{2\sqrt{2m(E - U)}} = \text{grad} \left( \sqrt{2m(E - U)} \right); \\ \frac{d}{dl} \left( \sqrt{2m(E - U)} \frac{d\vec{r}}{dl} \right) &= \text{grad} \left( \sqrt{2m(E - U)} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Полученное уравнение (2) совпадает с уравнением для траектории оптического луча в векторном виде, полученное исходя из вариационного принципа Ферма  $\frac{d}{dl} \left( n \frac{d\vec{r}}{dl} \right) = \text{grad}n$  (вывод можно посмотреть, например, в [3]), если считать, что показатель преломления среды  $n$  пропорционален

выражению  $\sqrt{2m(E-U)}$  (заметим, однако, что  $n$  – безразмерная величина, а  $\sqrt{2m(E-U)}$  имеет размерность импульса).

Попробуем обобщить полученный результат для релятивистского случая.

Если записать закон сохранения энергии для кванта электромагнитного поля в виде (1) трактуя  $\vec{p}$  как импульс, а  $U(\vec{r})$  – как потенциальную энергию кванта, то удастся получить уравнение, аналогичное (2) ( $c$  – в этом случае скорость света в вакууме). В самом деле, из аналога второго закона Ньютона

$$\dot{\vec{p}} = -\text{grad}U \quad (3)$$

с учетом очевидных соотношений

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = c\vec{\tau} \text{ и } \frac{dl}{dt} = c \quad (4)$$

получаем уравнение

$$c \frac{d\vec{p}}{dl} = -\text{grad}U,$$

где  $dl$  – элемент длины дуги, а импульс  $\vec{p}$ , как обычно, направлен по касательной к траектории:  $\vec{p} = p\vec{\tau}$ .

Далее:

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau} = \frac{c\vec{p}}{E-U(\vec{r})};$$

$$\vec{p} = \frac{1}{c}(E-U(\vec{r})) \frac{d\vec{r}}{dl};$$

$$\frac{d}{dl} \left[ (E-U(\vec{r})) \frac{d\vec{r}}{dl} \right] = -\text{grad}U;$$

$$\frac{d}{dl} \left[ (E-U(\vec{r})) \frac{d\vec{r}}{dl} \right] = \text{grad}(E-U(\vec{r})).$$

Полученное таким образом выражение является уравнением для световых лучей, если считать, что показатель преломления среды  $n(\vec{r})$  пропорционален  $(E-U(\vec{r}))$ . Заметим, в отличие от (2),  $n$  вновь безразмерная величина, но  $(E-U)$  имеет размерность энергии.

В заключение покажем, как из предложенных механических уравнений для кванта (3) и (4) можно получить закон сохранения энергии. Рассмотрим очевидные преобразования:

$$\frac{d}{dt}(c|\vec{p}|) = c \frac{d}{dt}(\sqrt{\vec{p}\vec{p}}) = c \frac{\dot{\vec{p}}\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}\vec{p}}} = c \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = c \frac{d\vec{p}}{dl} \frac{dl}{dt} \vec{\tau} = -\nabla U \vec{\tau} \frac{dl}{dt} - \frac{dU}{dl} \frac{dl}{dt} = -\frac{dU}{dt},$$

из которых следует, что  $\frac{d}{dt}(c|\vec{p}| + U(\vec{r})) = 0$ , и, следовательно,

$$c|\vec{p}| + U(\vec{r}) = \text{const} = E.$$

Знаменательно, что при выводе нигде не использовалось понятие массы, что и позволило применить полученный результат к кванту.

Остается открытым вопрос о том, как трактовать потенциальную энергию для кванта и, соответственно, соотношение (1). Затронутый вопрос постоянно находится в поле зрения исследователей. Так, на последних конференциях по релятивизму и гравитации в ряде работ рассматривались схожие проблемы, однако существенного прогресса в вопросе трактовки потенциальной энергии добиться не удалось, одной из причин при этом является достаточно сложная математическая запись результатов [4–6]. Видимо, в рамках специальной теории относительности эта гипотеза не может быть разрешена принципиально. Однако отмеченная аналогия с механическим уравнением (2), как нам кажется, позволяет ввести вышеуказанные допущения.

Авторы выражают благодарность за содействие в выполнении этой работы С.О. Юрченко и Российскому министерству образования и науки (проект № 3.1526.2014/К).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Aliev I.N., Yurchenko S.O. Evolution of Perturbations of Chargedraемого Interface between Immiscible Inviscid Fluids in the Interelectrode Gap. *Fluid Dynamics*, 2010. Vol. 45. № 5. P. 817–826.
2. Юрченко С.О., Алиев И.Н. О квантовании поверхностных возмущений невязкой жидкости в однородном внешнем электрическом поле. *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. «Естественные науки»* 2011. № 3. С. 84–89.
3. Алиев И.Н., Толмачев В.В.. *Опτικο-механическая аналогия и уравнение Шредингера*. М.: Издательство МГТУ, 1998. С. 80.
4. Tuoma Suntola. Relativity defines the locally available share of total energy. *Proceeding of International Scientific Meeting PIRT-2006. London-2006*. P. 430–439.
5. Shestakov J.I. The scalar mode of gravitation. *Proceeding of International Scientific Meeting PIRT-2009. Moscow-2009*. P. 462–466.
6. Rowlands P. A critical value for dark energy. *Proceeding of International Scientific Meeting PIRT-2013. Moscow-2013*. P. 260–166.