УДК 533.72

Кузьмин М.К.
Московский государственный областной университет

АНАЛИЗ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧЕСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ ОДИНОЧНЫХ КАПЕЛЬ ВОДЫ

Аннотация: найдены формулы для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель интегрированием уравнений, полученных по начальному и конечному предельным значениям скорости изменения радиуса аэрозольной капли. Проведен численный анализ этих формул рассмотрением процесса нестационарного испарения одиночных капель воды в воздушную среду. Указаны возможности упрощения найденных формул в зависимости от начальных размеров испаряющихся капель воды.
Ключевые слова: нестационарный процесс испарения, аэрозольные капли, время полного испарения, одиночные капли воды.

M. Kuzmin
Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

ANALYSIS OF THE FORMULAS FOR CALCULATING THE TIME OF COMPLETE EVAPORATION OF SINGLE DROPLETS OF WATER

Abstract. Formulas for calculating the time of complete evaporation of aerosol droplets by integrating the equations obtained for the initial and final limits the rate of change of the radius of the aerosol droplets. The numerical analysis of these formulas by considering the process of unsteady evaporation of single droplets of water into the air. Lists features found simplify formulas depending on the initial size of the evaporating water droplets.
Key words: nonstationary evaporation process, aerosol droplets, the time for complete evaporation, single droplets of water.

В статье [1] рассматривалась модель нестационарного процесса испарения аэрозольной капли с учетом следующих факторов: теплоты фазового перехода вещества капли, коэффициентов испарения и поверхностного натяжения.

Характеристикой рассматриваемого процесса может служить скорость нестационарного изменения радиуса капли. В упомянутой статье получено следующее выражение для скорости изменения радиуса капли

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)}=\frac{\varepsilon Dnm_1\kappa}{\rho_i R^2}\left[\frac{1}{g_2}+\frac{1}{\sqrt{Da}}\sum_{j=1}^{2}C(\beta_j)\varphi(\beta_j,t)\right], \qquad (1)$$

Важно подчеркнуть, что в этой формуле (1) переменная t — время может принимать значения от 0 до + ∞, то есть эта формула справедлива для всех значений времени.

Отметим, что символом (σ) в формуле (1) отмечен факт учета поверхностного натяжения поверхности капли. Учет этого фактора приобретает особое значение с уменьшением радиуса (или то же самое с увеличением кривизны поверхности) сферической капли. Укажем и другие принятые в статье обозначения:

$$C(\beta_j)=\frac{R^2\beta_j^2-R(\sqrt{D}+\sqrt{a}\,)\beta_j+\sqrt{Da}}{g_0\beta_j^2-g_2},\ \varphi(\beta_j,t)=\exp(\beta_j^2 t)\,erfc\left(\beta_j\sqrt{t}\right),$$

далее: $D=nm_2D_{12}/\rho_e$, где D_{12} — коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси; $n=n_1+n_2$; n_1, m_1 и n_2 , m_2 — концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно, ρ_e — плотность парогазовой смеси; a — коэффициент температуропроводности бинарной смеси. В формулу (1) также входят: q — удельная теплота фазового перехода вещества капли, κ — коэффициент теплопроводности парогазовой смеси, α – коэффициент испарения, $v=\sqrt{kT_0/2\pi m_1}$ — одна четвертая средней абсолютной тепловой скорости молекул пара, причем $T\,(r,t)_{|t=0}=T_0$, $T\,(r,t)_{|r\to\infty}=T_\infty=T_0$, k — постоянная Больцмана. Кроме того использованы обозначения:

$$k_\sigma=\frac{2m_1\sigma}{kT_0\rho_i},\ k_q=\frac{qm_1-kT_0}{kT_0^2},$$

в которые входят: ρ_i — плотность вещества капли, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\varepsilon=\alpha v(c_{10}-c_{1s0})$, $\kappa_{q\sigma}=c_{1s0}k_q\gamma$, где $c_1(r,t)_{|t=0}=c_{10}$, $c_1(r,t)_{|r\to\infty}=c_{1\infty}=c_{10}$, $c_{1s0}=\overline{c}_{1s0}\left(1+\dfrac{k_\sigma}{R}\right)$ (черта над буквой указывает на концентрацию насыщенных паров вещества капли), $\gamma=Dm_1nq$, .

Наконец, последняя группа обозначений:

$$\delta = g_0 p + g_1\sqrt{p} + g_2,\;\; g_0 = \kappa\sqrt{D/a},$$

$$g_1 = \alpha\nu\left(\kappa\sqrt{D} + \kappa_{q\sigma}\sqrt{a}\right)/\sqrt{Da} + g_0\left(\sqrt{D}+\sqrt{a}\right)/R,$$

$$g_2 = \left[D\kappa + \alpha\nu R\left(\kappa + \kappa_{q\sigma}\right)\right]/R^2,$$

$$\delta = g_0\left(\sqrt{p}+\beta_1\right)\left(\sqrt{p}+\beta_2\right).$$

Недостатком полученной формулы (1) является ее громоздкость для проведения численных расчетов. Поэтому представляет интерес рассмотрение асимптотических приближений выражения (1) при больших и малых значениях времени t, которые намного проще этого выражения.

Преобразуем выражение правой части равенства (1) к виду

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i}\left[\frac{D\kappa}{D\kappa + \alpha\nu R\left(\kappa+\kappa_{q\sigma}\right)} - \frac{g_0}{\sqrt{D_\delta}}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left(\beta_j - \frac{\sqrt{D}+\sqrt{a}}{R} + \frac{\sqrt{Da}}{R^2\beta_j}\right)\varphi(\beta_j,t)\right] \quad (2)$$

Так как $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(\beta_j,t) = 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(\beta_j,t) = 0$, то, обозначив

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_0^{(\sigma)},\;\; \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty^{(\sigma)},$$

по формуле (2) получаем равенства

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i}\cdot\frac{D\kappa}{D\kappa + \alpha\nu R\left(\kappa+\kappa_{q\sigma}\right)}, \quad (4)$$

правые части, которых определяют соответственно начальное и конечное (предельные) значения скорости изменения радиуса аэрозольной капли.

Полученные равенства будем рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых радиус капли $R = R(t)$, зависящий от времени, выступает в качестве искомой функции. Отметим, что правые части обоих уравнений (3) и (4) зависят от функции $R(t)$.

Проинтегрируем дифференциальные уравнения (3) и (4) при выполнении начального условия

$$R(t)_{|\,t=0} = R_0.$$

Получаем соответственно:

$$R_0 - R + \frac{k_\sigma}{b}\ln\left|\frac{bR + k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right| = a_1 bt, \qquad (5)$$

$$\frac{R_0^2 - R^2}{2} + \frac{1}{\overline{\kappa_0}}\left(\frac{D\kappa}{\alpha\nu} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}\right)\left(R_0 - R + \frac{k_\sigma}{b}\ln\left|\frac{bR + k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right|\right) = a_2 t, \qquad (6)$$

где

$$a_1 = \frac{\alpha\nu n m_1 \overline{c_{1s0}}}{\rho_i},\ \ a_2 = \frac{D\kappa n m_1(\overline{c_{1s0}} - c_{10})}{\rho_i \overline{\kappa_0}},\ \ b = 1 - \frac{c_{10}}{\overline{c_{1s0}}},$$

$$\overline{\kappa_0} = \kappa + \kappa_q \gamma \overline{c_{1s0}},\ \ \kappa_0 = \kappa + \kappa_q \gamma c_{10}.$$

Из соотношений (5) и (6) найдем формулы для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель. Они будут соответствовать уравнениям (3) и (4), полученным по начальному и конечному (предельным) значениям скорости изменения радиуса аэрозольной капли. Отразим это в обозначениях:

$$\left(t_{п.исп.}\right)_0^{(\sigma)} = \frac{\rho_i\left(R_0 + \frac{k_\sigma}{b}\ln\left|\frac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right|\right)}{\alpha\nu n m_1(\overline{c_{1s0}} - c_{10})}, \qquad (7)$$

$$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} = \frac{\rho_i}{D\kappa n m_1(\overline{c_{1s0}} - c_{10})}\left[\frac{\overline{\kappa_0}R_0^2}{2} + \left(\frac{D\kappa}{\alpha\nu} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}\right)\left(R_0 + \frac{k_\sigma}{b}\ln\left|\frac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right|\right)\right]$$

(8)

Для анализа полученных формул (7), (8) будем рассматривать процесс нестационарного испарения ($b > 0$) одиночных капель воды в воздушную среду 50 % влажности при двух значениях температуры 293 *K*, 323 *K*, когда давление среды *P* = 0,1 *МПа*. При этом, основываясь на данных, приведенных в книге [2] для коэффициента испарения воды, полагаем, что $\alpha = 0{,}034$ при *T* = 293 *K* и $\alpha = 0{,}026$ при *T* = 323 *K*. Для всех других физических величин используем значения, приведенные в справочнике [3].

Формула (8) такова, что она позволяет вычислять время полного испарения аэрозольной капли с учетом достаточно большого числа факторов, влияющих на этот процесс. В частности, отметим, что выражение (7) не содержит коэффициента диффузии. Будем считать формулу (8) основной.

Поскольку эта формула не очень проста для проведения вычислений, будем искать возможности ее упрощения в зависимости от начальных размеров испаряющихся капель.

При вычислении времени полного испарения достаточно крупных водяных капель, начальные радиусы которых $R_0 \geq 10^{-6}\,м$ в формуле (8) можно отбрасывать выражения, содержащие k_σ. В этом убеждает нас таблица 1 численных результатов.

Таблица 1.

T,K	$\dfrac{D\kappa}{\alpha\nu}\cdot 10^7$	$\dfrac{\kappa_0 k_\sigma}{b}$	R_0, м	$-\dfrac{k_\sigma}{b}\ln\left\lvert\dfrac{k_\sigma}{bR_0+k_\sigma}\right\rvert$
293	1,3023	0,0012	10^{-5}	$0{,}0018\cdot 10^{-5}$
			10^{-6}	$0{,}0133\cdot 10^{-6}$
			10^{-7}	$0{,}0833\cdot 10^{-7}$
			10^{-8}	$0.3734\cdot 10^{-8}$
323	1,2104	0,0032	10^{-5}	$0{,}0016\cdot 10^{-5}$
			10^{-6}	$0{,}0116\cdot 10^{-6}$
			10^{-7}	$0{,}0739\cdot 10^{-7}$
			10^{-8}	$0{,}3428\cdot 10^{-8}$

Таким образом, для вычисления времени полного испарения достаточно крупных капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \geq 10^{-6}\,м$ приемлема формула

$$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(0)} = \frac{\rho_i R_0}{nm_1(\overline{c_{1s0}} - c_{10})}\left(\frac{\overline{\kappa_0} R_0}{2D\kappa} + \frac{1}{\alpha\nu}\right). \qquad (9)$$

Для подтверждения сказанного приведем еще таблицу 2 численных значений (время указано в секундах).

Таблица 2.

T, K	293		323	
R_0, $м$	$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)}$	$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(0)}$	$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)}$	$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(0)}$
10^{-6}	$0{,}3067 \cdot 10^{-1}$	$0{,}3100 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1011 \cdot 10^{-1}$	$0{,}1019 \cdot 10^{-1}$
10^{-5}	1,0181	1,0186	0,4828	0,4830

Из численных значений последней строки таблицы 2 видно, что вычисленные по разным формулам (8) и (9) значения времени полного испарения капель воды при $R_0 = 10^{-5}\,м$ отличаются лишь на весьма малые величины, хотя формула (9) значительно проще основной формулы (8).

Обратим внимание на слагаемые, расположенные в последних скобках выражения (9). Первое слагаемое $\dfrac{\overline{\kappa_0} R_0}{2D\kappa}$, в частности, зависит от коэффициента диффузии, а второе определяется величиной, характеризующей поток первого компонента, отводимый через слой Кнудсена с поверхности капли.

Соотношение вкладов этих слагаемых в общее время полного испарения капли может быть разным в зависимости от начального размера рассматриваемой капли, ибо первое слагаемое зависит от радиуса капли, а второе нет. Для оценки этого соотношения приведем численные значения выражений $\dfrac{\overline{\kappa_0}}{2D\kappa}$, $\dfrac{1}{\alpha v}$:

$$\frac{\overline{\kappa_0}}{2D\kappa}_{|T=293K} = 0{,}6840 \cdot 10^5, \quad \frac{\overline{\kappa_0}}{2D\kappa}_{|T=323K} = 1{,}7784 \cdot 10^5; \tag{10}$$

$$\frac{1}{\alpha v}_{|T=293K} = 0{,}2008, \quad \frac{1}{\alpha v}_{|T=323K} = 0{,}2501. \tag{11}$$

Формула (8) связана формулой (7) соотношением

$$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} = \left(1 - \frac{\alpha v \kappa_0 k_\sigma}{bD\kappa}\right)\left(t_{п.исп.}\right)_0^{(\sigma)} + \frac{\rho_i \overline{\kappa_0} R_0^2}{2D\kappa n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}.$$

Вычисления показывают, что значения выражения $\dfrac{\alpha v \kappa_0 k_\sigma}{bD\kappa}$ намного меньше единицы:

$$\frac{\alpha v \kappa_0 k_\sigma}{bD\kappa}_{|T=293K} = 0{,}00095, \quad \frac{\alpha v \kappa_0 k_\sigma}{bD\kappa}_{|T=323K} = 0{,}00143.$$

Поэтому можно положить

$$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \left(t_{п.исп.}\right)_0^{(\sigma)} + \frac{\rho_i \overline{\kappa_0} R_0^2}{2D\kappa n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}.$$

Используя выражение (7) приходим к соотношению

$$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \frac{\rho_i R_0}{n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}\left(\frac{1}{\alpha v} + \frac{\overline{\kappa_0} R_0}{2D\kappa}\right) + \frac{\dfrac{\rho_i k_\sigma}{b} \ln\left|\dfrac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right|}{\alpha v n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}.$$

Численные значения (10). (11) позволяют убедиться в том, что для достаточно мелких капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \le 10^{-7}\,м$ справедливо соотношение $\dfrac{\overline{\kappa_0} R_0}{2D\kappa} \ll \dfrac{1}{\alpha v}$. Поэтому при $R_0 \le 10^{-7}\,м$ можно положить

$$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \frac{\rho_i \left(R_0 + \dfrac{k_\sigma}{b} \ln\left|\dfrac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right|\right)}{\alpha v n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})},$$

то есть

$$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \left(t_{п.исп.}\right)_0^{(\sigma)}.$$

Итак, показали, что для вычисления времени полного испарения достаточно мелких капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \le 10^{-7}\,м$, приемлема формула (7). Подтверждением сказанному служит следующая таблица значений времени полного испарения капель (время указано в секундах).

Таблица 3.

T, K	293		323	
R_0, $м$	$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)}$	$\left(t_{п.исп.}\right)_0^{(\sigma)}$	$\left(t_{п.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)}$	$\left(t_{п.исп.}\right)_0^{(\sigma)}$
10^{-7}	$0{,}2196 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2120 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5929 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5514 \cdot 10^{-3}$
10^{-8}	$0{,}1455 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1449 \cdot 10^{-3}$	$0{,}3949 \cdot 10^{-4}$	$0{,}3913 \cdot 10^{-4}$

Из численных значений последней строки таблицы 3 видно, что вычисленные по разным формулам (8) и (7) значения времени полного испарения капель воды при $R_0 = 10^{-8}\,м$ отличаются лишь на весьма малые величины.

Таким образом, выяснили, что при вычислении времени полного испарения капель воды в воздушную среду (при температуре от 293 K до 323 K) вместо основной формулы (8) для капель достаточно больших размеров, начальные радиусы которых $R_0 \geq 10^{-6}\,м$, можно использовать формулу (9), а для капель, начальные радиусы которых $R_0 \leq 10^{-7}\,м$, приемлема формула (7).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учетом зависимости давления насыщенного пара от кривизны поверхности. //Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика – математика, 2012. № 3. С. 39 – 49.
2. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. М.: Химия, 1972. 304 с.
3. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.