

УДК 530.1:539.12

**Зверев Н.В.***Московский государственный областной университет***ОДНОРОДНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПОЛЯ И КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ  
ФЕРМИОННЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ МОДЕЛИ  
В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ–ВРЕМЕНИ**

*Аннотация.* Исследовано влияние однородных составляющих электромагнитного поля на фермионные корреляторы (корреляционные функции) в кулоновской фазе  $U(1)$  модели в четырехмерном дискретном пространстве-времени с конечным числом точек. Показано, что эти составляющие поля нарушают необходимое критическое поведение фермионных корреляторов. В результате устранения данных составляющих электромагнитного поля с использованием процедуры фиксации калибровки критическое поведение фермионных корреляторов восстанавливается.

*Ключевые слова:*  $U(1)$  модели, фермионы, однородные составляющие поля, решетка пространства-времени.

**N. Zverev***Moscow State Regional University***UNIFORM COMPONENTS OF A FIELD AND A CRITICAL BEHAVIOR OF  
FERMION CORRELATION FUNCTIONS IN  
A DISCRETE SPACE–TIME MODEL**

*Abstract.* We have studied the influence of uniform components of the electromagnetic field on fermion correlators (correlation functions) in the Coulomb phase of the  $U(1)$  model in the four-dimensional discrete space-time with a finite number of points. The uniform components of the field are shown to violate the necessary critical behavior of the fermion correlators. After elimination of the uniform electromagnetic field components with use of a gauge fixing procedure, the critical behavior of fermion correlators is restored.

*Key words:*  $U(1)$  models, fermions, uniform components of field, space-time lattice.

Для изучения явления невыхода кварков из адронов, а также электромагнитного взаимодействия при больших энергиях применяют метод решетки, т. е. аппроксимацию непрерывного пространства-времени дискретной совокупностью точек [1]. Электромагнитное взаимодействие в этом методе описывают  $U(1)$  моделью [1; 2]. Фундаментальная величина данной модели – действие, имеет вид:

$$S = S_G + S_F,$$

где  $S_G$  описывает фотоны, а  $S_F$  – фермионные частицы (фермионы):

$$S_G = \beta \sum_{\substack{x, \mu, \nu \\ \mu < \nu}} \operatorname{Re} \left( 1 - U_{x, \mu} U_{x+\mu, \nu} U_{x+\nu, \mu}^* U_{x, \nu}^* \right), \quad S_F = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{x, y} \bar{\psi}_x^f M_{xy}[U] \psi_y^f.$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $\mu$ ,  $\nu$  – соответственно точки и направления четырехмерного пространства-времени (решетки):

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4); \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4); \\ x_\mu, y_\mu = 1, 2, \dots, N_\mu; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4;$$

$N_\mu$  – число точек решетки вдоль направления  $\mu$ , при этом  $\mu = 1, 2, 3$  обозначают направления пространства, а  $\mu = 4$  – направление времени. Далее, величина

$U_{x, \mu} = \exp(iA_{x, \mu})$  – волновая функция фотонов с потенциалом  $A_{x, \mu}$  в области  $A_{x, \mu}$

$\in (-\pi, \pi]$ ;  $\psi_x^f$  и  $\bar{\psi}_x^f$  – волновые функции фермионов, являющиеся антиперестановочными при произведении друг с другом;  $N_f$  – число поколений фермионов; параметр  $\beta = 1 / e^2$  – обратный квадрат заряда;  $M_{xy}[U]$  – фермионная матрица:

$$M_{xy}[U] = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} \left\{ (1 - \gamma_{\mu}) U_{x, \mu} \delta_{x+\mu, y} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{y, \mu}^* \delta_{y+\mu, x} \right\},$$

$\gamma_{\mu}$  – матрицы Дирака размером  $4 \times 4$ ;  $\kappa = 1 / (8 + 2m)$  – хоппинг-параметр, зависящий от массы  $m$  фермионов. На волновые функции фотонов и фермионов накладываются следующие граничные условия:

$$U_{x+N_{\nu}, \mu} = U_{x, \mu}, \quad \psi_{x+N_{\nu}}^f = \pm \psi_x^f, \quad \bar{\psi}_{x+N_{\nu}}^f = \pm \bar{\psi}_x^f,$$

где у фермионов знак «+» выбирают для направлений  $\nu = 1, 2, 3$ , а знак «-» для  $\nu = 4$ .

При теоретическом изучении элементарных частиц работают в системе единиц, в которой постоянную Планка и скорость света полагают равными  $\hbar = c = 1$ . Кроме того, при выполнении численных расчетов работают с безразмерными величинами. И для этого временно полагают шаг решетки  $a$ , т. е. наименьшее расстояние между соседними точками по каждому конкретному направлению, равным  $a = 1$ . Впоследствии при теоретическом анализе полученных численных значений восстанавливают шаг решетки  $a$ , и

для получения осмысленных физических результатов выполняют переход к непрерывному пределу, т. е. устремляют  $a \rightarrow 0$ .

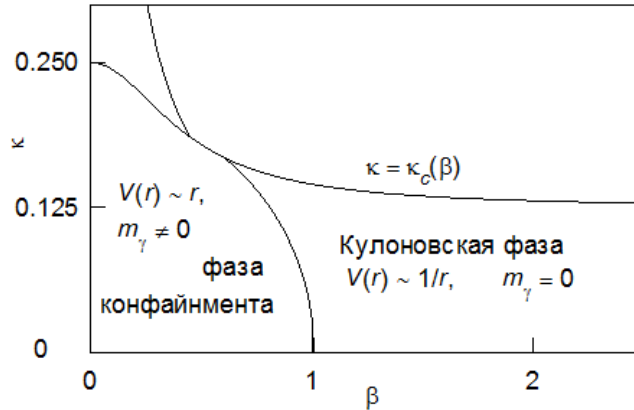


Рис. 1. Фазовая структура  $U(1)$  модели [2].  $V(r)$  – потенциал взаимодействия неподвижных точечных зарядов на расстоянии  $r$  друг от друга,  $m_\gamma$  – масса фотона.

В случае изучения электромагнитного взаимодействия данную  $U(1)$  модель рассматривают в области кулоновской фазы (рис. 1), т. е. в области параметров  $\beta$  и  $\kappa$ , в которой потенциал взаимодействия неподвижных заряженных частиц имеет кулоновский вид, а массы фотонов равны нулю [2]. Правильное описание свойств частиц в непрерывном пределе нулевого шага решетки ( $a \rightarrow 0$ ) требует выбора параметров  $\beta$  и  $\kappa$  вблизи линии раздела фаз  $\kappa = \kappa_c(\beta)$  (рис. 1) [2; 3]. На этой линии решеточные корреляторы (корреляционные функции) имеют характерные сингулярные, или критические свойства, а физические массы и энергии частиц в единицах шага решетки, получаемые с помощью данных функций, равны нулю [2; 3].

Однако при численном исследовании данной  $U(1)$  модели в кулоновской фазе было обнаружено [4] отсутствие необходимого сингулярного поведения у корреляторов фотонов и несоставных фермионов. Поэтому такие корреляционные функции на решетке неверно описывают свойства этих частиц. В работе [5] выяснено, что причиной отсутствия правильного поведения фотонного коррелятора являются однородные составляющие  $\phi_\mu$  электромагнитного поля  $A_{x,\mu}$ :

$$\phi_\mu = \frac{1}{V} \sum_x A_{x,\mu},$$

где  $V$  – полное число точек пространства-времени («объем» решетки пространства-времени):  $V = N_1 N_2 N_3 N_4$ . Однородные составляющие электромагнитного поля представляют собой составляющие этого поля (моды), имеющие нулевые импульсы. В обычном, бесконечном непрерывном пространстве-времени, такие составляющие поля не влияют на корреляторы электромагнитного поля и фермионных частиц. Однако в случае дискретного пространства-времени с конечным числом точек данные составляющие электромагнитного поля оказывают влияние на эти корреляционные функции.

Было предложено устранять данные составляющие из  $A_{x,\mu}$  чередованием вычитания  $\phi_\mu$ :

$$U_{x,\mu} \rightarrow U_{x,\mu} \exp(-i\phi_\mu), \quad (1)$$

и процедуры фиксации калибровки Лоренца на решетке:

$$U_{x,\mu} \rightarrow g_x U_{x,\mu}, \quad U_{x-\mu,\mu} \rightarrow U_{x-\mu,\mu} g_x^* : \quad \sum_{x,\mu} \text{Re} U_{x,\mu} \rightarrow \max. \quad (2)$$

Здесь  $g_x$  – произвольные комплексные числа с  $|g_x| = 1$ .

В работе [6] исследовано в кулоновской фазе влияние однородных составляющих  $\phi_\mu$  электромагнитного поля на следующие фермионные корреляторы:

$$\Gamma(\tau, U) = \frac{1}{4V} \text{Re tr} \sum_{x,y} \gamma_4 M_{xy}^{-1}[U],$$

$$\Pi(U) = \frac{1}{4V} \text{Tr}(M^+[U]M[U])^{-1}, \quad \overline{\psi\psi}(U) = \frac{1}{4V} \text{Tr} M^{-1}[U].$$

Здесь в случае функции  $\Gamma$  суммирование ведется по всем  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  и  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , и при этом  $y = (y, x_4 + \tau)$ ;  $\text{tr}$  – след в пространстве матриц Дирака, а  $\text{Tr}$  – след в пространстве матриц Дирака и точек пространства-времени. Вычислялись средние значения  $\langle \Gamma(\tau) \rangle$ ,  $\langle \Pi \rangle$  и  $\langle \overline{\psi\psi} \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по всем полям  $U_{x,\mu}$  либо с весом  $\exp(-S_G[U]) \det^{N_f} M[U]$  (динамические фермионы), либо с весом  $\exp(-S_G[U])$  (статические фермионы). Оба этих подхода вычислений средних значений дают в кулоновской фазе примерно одинаковые результаты.

При вычислении  $\langle \Pi \rangle$  и  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  либо использовалась процедура (1) и (2) устранения однородных составляющих поля  $\phi_\mu$ , либо эта процедура не использовалась и однородные составляющие поля не удалялись. А при вычислении  $\langle \Gamma(\tau) \rangle$  либо удалялись однородные составляющие поля  $\phi_\mu$  с использованием (1) и (2), либо однородные составляющие поля не удалялись, но использовалась процедура (2) фиксации калибровки Лоренца. В случае динамических фермионов число поколений  $N_f = 2$ . Число точек решетки по пространственным направлениям выбиралось одинаковым, т. е.  $N_1 = N_2 = N_3$ , и поэтому «объем» решетки  $V = N_1^3 \times N_4$ .

По значениям  $\langle \Gamma(\tau) \rangle$  вычислялись эффективные фермионные массы  $m_{\text{eff}}(\tau)$  согласно формуле:

$$m_{\text{eff}}(\tau) = \exp E(\tau) - 1, \quad \frac{\text{ch}[E(\tau)(\tau + 1 - N_4/2)]}{\text{ch}[E(\tau)(\tau - N_4/2)]} = \frac{\langle \Gamma(\tau + 1) \rangle}{\langle \Gamma(\tau) \rangle}.$$

По  $m_{\text{eff}}(\tau)$  находились значения физических фермионных масс  $m_f$  в единицах шага решетки как равные  $m_{\text{eff}}(\tau)$  на горизонтальных участках данных зависимостей [3].

Типичные результаты расчетов  $\langle \Pi \rangle$  и  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  в зависимости от  $\kappa$  представлены на рис. 2. Видно, что однородные составляющие поля нарушают (скрывают) требуемое сингулярное поведение этих функций вблизи линии раздела фаз  $\kappa = \kappa_c(\beta)$ . После устранения однородных составляющих поля сингулярное поведение этих функций восстанавливается.

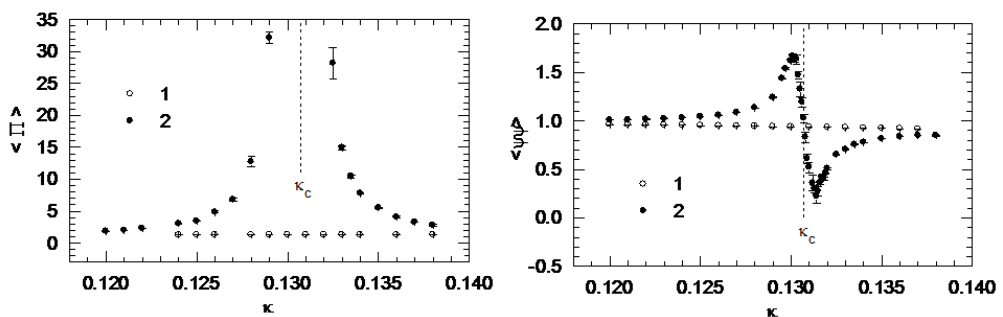


Рис. 2. Зависимости  $\langle \Pi \rangle$  и  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  от  $\kappa$ : 1 – в поле с однородными составляющими, 2 – в поле без однородных составляющих. Параметр  $\beta = 2$ , «объем» решетки пространства-времени  $6^3 \times 12$ , динамические и статические фермионы, значение  $\kappa_c(\beta) = 0.1307 \pm 0.0002$ .

На рис. 3 представлены типичные результаты расчетов  $m_{\text{eff}}$  в зависимости от  $\tau$ . Видно, что  $m_{\text{eff}}(\tau)$  в поле без однородных составляющих практически постоянны и равны фермионным массам  $m_f$ . В поле с однородными составляющими массы  $m_f$ , определенные как значения  $m_{\text{eff}}(\tau)$  на гладких горизонтальных участках зависимости, не стремятся к нулю при  $\kappa \rightarrow \kappa_c(\beta)$  [4].

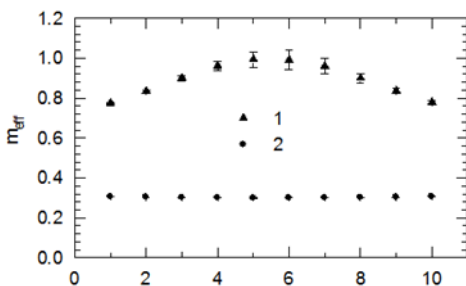


Рис. 3. Зависимость  $m_{\text{eff}}$  от  $\tau$ : 1 – в поле с однородными составляющими, 2 – в поле без однородных составляющих. Параметры  $\beta = 2$ ,  $\kappa = 0.122$ , «объем» решетки пространства-времени  $6^3 \times 12$ , динамические и статические фермионы.

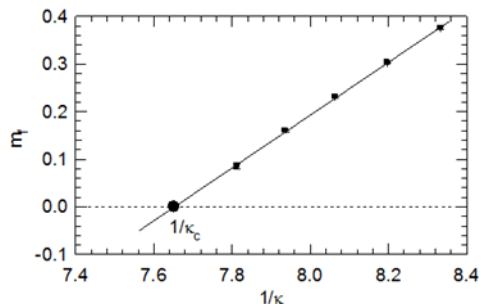


Рис. 4. Зависимость  $m_f$  от  $1/\kappa$  в поле без однородных составляющих. Параметр  $\beta = 2$ , «объем» решетки пространства-времени  $6^3 \times 12$ , динамические и статические фермионы, значение  $\kappa_c(\beta) = 0.1307 \pm 0.0001$ .

На рис. 4 представлены типичные результаты расчетов зависимости фермионных масс  $m_f$  от  $1/\kappa$  в поле без однородных составляющих. Видно, что при  $\kappa \rightarrow \kappa_c(\beta)$  справедлива аппроксимирующая зависимость

$$m_f \sim 1/\kappa - 1/\kappa_c(\beta),$$

а массы  $m_f$  удовлетворяют условию  $m_f \rightarrow 0$  при  $\kappa \rightarrow \kappa_c(\beta)$ .

Таким образом, однородные составляющие поля скрывают требуемое критическое поведение фермионных корреляторов вблизи линии раздела фаз. Однородные составляющие электромагнитного поля необходимо устранять при исследованиях математических моделей фермионов методом решетки.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Wilson K. Confinement of quarks // *Phys. Rev. D*. 1974. V. 10. P. 2445–2459.
2. DeGrand T., Toussaint D. Topological excitations and Monte Carlo simulation of Abelian gauge theory // *Phys. Rev. D*. 1980. V. 22. P. 2478–2489.
3. Montvay I., Muenster G. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994.
4. Nakamura A., Plewnia M. Gauge fixing ambiguity and photon propagators in compact  $U(1)$  lattice gauge theory // *Phys. Lett. B*. 1991. V. 255. P. 274–278.
5. Bogolubsky I., Mitrjushkin V., Mueller-Preussker M., Peter P. Lorentz gauge and Gribov ambiguity in the compact lattice  $U(1)$  theory // *Phys. Lett. B*. 1999. V. 458. P. 102–108.
6. Zverev N. Influence of the Uniform Components of the Gauge Field on the Fermion Correlation Functions in the Lattice  $U(1)$  Model // *Phys. Scripta*. V. 72. 2005. P. 19–22.