РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.7+517.3+517.926

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-08-20

Петрова В.Т.¹, Сивиркина А.С.², Дмитриева М.Н.³

¹Московский физико-технический институт

²Рязанский институт (филиал) Университета Машиностроения

*³Рязанский государственный медицинский университет
имени академика И.П. Павлова*

ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ

Аннотация. В статье ставится задача классификации произвольных метрик римановых пространств при условии, что их связность обладает свойством функциональной абелевости. Дается ее полное решение.

Ключевые слова: мультипликативный интеграл, функционально абелева функция, пространство аффинной связности, риманово пространство, метрика, матрица связности, жорданова клетка, жорданова матрица.

V. Petrova¹, A. Sivirina², M. Dmitrieva³

¹Moscow Physical Techniques Institute

²Ryazan Institute (branch) of Moscow state engineering University

³Ryazan State Medical University

THE PROBLEM OF CLASSIFYING NON-DIAGONAL RIEMANNIAN METRICS WITH FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION

Abstract. *We have formulated the problem of classifying arbitrary metrics of Riemannian spaces under the condition that their connection has a functional property of commutativity. Its complete solution is presented.*

Key words: *multiplicative integral, functionally Abelian function, space of affine connection, Riemannian space, metric, connection matrix, Jordan block, Jordan matrix.*

В дифференциальной геометрии криволинейный мультипликативный интеграл был впервые применен Шлезингером [2]. Возможность описания геометрических свойств объектов в пространствах аффинной связности в терминах мультипликативного интеграла в значительной мере связана с мультипликативной интегрируемостью в конечном виде матричных функций определенного геометрического истолкования. Специфика этого интеграла определяется непрерывностью значений подынтегральной функции. Если же функция $f(t)$ – функционально абелева [8] (то есть $f(t_1) \cdot f(t_2) = f(t_2) \cdot f(t_1)$), то известно, что $f(t)$ конечно мультипликативно интегрируема [1]. В связи с этим и была поставлена [4] задача выделения римановых пространств, матрицы связности которых функционально абелевы. Настоящая статья продолжит ее решение, начатое в работе В.Т. Петровой [8].

1°. Пусть $g = \|g_{ij}\|$ – матрица недиагональной римановой метрики

$$ds^2 = d_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2.$$

Обозначим $\det g = D$, $g_{11} = a$, $g_{22} = b$, $g_{12} = c$, $x^1 = x$, $y = x^2$.

Матрицы связности в этом случае:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} g^{-1} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ -a_y + 2c_x & b_x \end{vmatrix} = \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} ba_x + ca_y - 2cc_x & ba_y - cb_x \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x & -ca_y + ab_x \end{vmatrix};$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} g^{-1} \begin{vmatrix} a_y & -b_x + 2c_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} ba_y - cb_x & -bb_x - cb_y + 2bc_y \\ -ca_y + ab_x & cb_x + ab_y - 2cc_y \end{vmatrix}.$$

Остановимся на нескольких возможностях:

1. Если матрицы Γ_1 и Γ_2 диагональные, то можно выделить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = 0 \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} -bb_x - cb_y + 2bc_y = 0 \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases};$$

решая которую, получим, что $a_x = 2\frac{a}{c}c_x$, $a_y = 0$, $b_x = 0$, $b_y = 2\frac{b}{c}c_y$, откуда $a = a(x)$, $b = b(y)$ и $c^2 = a(x)b(y)k^2$, где $k \in \mathbb{R}$ – некоторая произвольная постоянная. Заменяя для удобства $a(x)$ на $a^2(x)$ и $b(y)$ на $b^2(y)$ получим метрику:

$$ds^2 = a^2(x)dx^2 + 2ka(x)b(y)dxdy + b^2(y)dy^2, \quad (1)$$

с матрицами связности $\Gamma_1 = \frac{a'}{a}E_1^1$, $\Gamma_2 = \frac{b'}{b}E_2^2$.

А так как матрицы Γ_1 и Γ_2 кратны постоянным и коммутируют, то они, конечно, являются и функционально абелевыми.

2. Если одна из матриц связности функционально кратна жордановой клетке, а вторая – диагональная, то из равенства $[\Gamma_1, \Gamma_2] = 0$ следует, что она кратна скалярной. При этом если $\Gamma_1 = \lambda E$, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = 0 \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \\ -bb_x - cb_y + 2bc_y = \delta D \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} ba_x + ca_y - 2cc_x = \lambda D \\ -ca_y + ab_x = \lambda D \\ ba_y - cb_x = \mu D \\ cb_x + ab_y - 2cc_y = \mu D \end{cases}.$$

Отсюда легко видеть, что $\lambda = \mu = 0$ (а значит, $\Gamma_1 \equiv 0$), $D_x = 0$, $D_y = 0$, $a_x = 0$, $a_y = 0$, $b_x = 0$, $b_y = c\delta$, $c_x = 0$, $c_y = \frac{1}{2}a\delta$, значит, $a = \text{const}$, $b = b(y)$, $c = c(y)$, и $\delta = \delta(y)$. Тогда соответствующая метрика записывается в виде:

$$ds^2 = dx^2 + 2c(y)dxdy + (c^2(y) + D)dy^2. \quad (2)$$

Ее матрицы связности $\Gamma_1 \equiv 0$; $\Gamma_2 = c'(y)E_2^1$ и потому функционально абелевы.

Если же $\Gamma_2 = \lambda E$, то соответствующая система уравнений:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = \delta D \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \\ -bb_x - cb_y + 2bc_y = 0 \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} ba_x + ca_y - 2cc_x = \lambda D \\ -ca_y + ab_x = \lambda D \\ ba_y - cb_x = \mu D \\ cb_x + ab_y - 2cc_y = \mu D \end{cases}.$$

Из нее следует, что $\mu = \delta$ и $\lambda = 0$. Тогда $D_x = 0$, $D_y = 2\delta D$, $a_x = 0$, $a_y = \delta a$, $b_x = \delta c$, $b_y = \delta b$, $c_x = \frac{1}{2}\delta a$, $c_y = \delta c$, а $\delta_x = 0$ и $\delta_y = 0$. Откуда:

$$a = ke^{\delta y}, \quad c = e^{\delta y} \left(\frac{1}{2}\delta kx + m \right), \quad b = \frac{1}{k}e^{\delta y} \left(\left(\frac{1}{2}\delta kx + m \right)^2 + p \right),$$

(где $k, p, m \in \mathbb{R}$, постоянные). Тем самым получена метрика:

$$ds^2 = ke^{\delta y} dx^2 + 2e^{\delta y} \left(\frac{1}{2} \delta kx + m \right) dx dy + \frac{1}{k} e^{\delta y} \left(\left(\frac{1}{2} \delta kx + m \right)^2 + p \right) dy^2,$$

которая постоянным преобразованием переменных может быть упрощена:

$$ds^2 = e^{2y} dx^2 + 2e^{2y} x dx dy + e^{2y} (x^2 + p) dy^2. \quad (3)$$

Ее матрицы связности тоже функционально абелевы: $\Gamma_1 = E_2^1$, $\Gamma_2 = E$.

3. Если обе матрицы связности функционально кратны жордановым клеткам, то соответствующая им система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = \delta_1 D \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \\ -bb_x - cb_y + 2bc_y = \delta_2 D \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} ba_x + ca_y - 2cc_x = \lambda D \\ -ca_y + ab_x = \lambda D \\ ba_y - cb_x = \mu D \\ cb_x + ab_y - 2cc_y = \mu D \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, $\lambda = 0$, $\mu = \delta$, $D_x = 0$, $D_y = \delta_1 D$, $a_x = 0$, $a_y = \delta_1 a$, $b_x = \delta_1 c$, $b_y = \delta_1 b + \delta_2 c$, $c_x = \frac{1}{2} \delta_1 a$, $c_y = \delta_1 c + \frac{1}{2} \delta_2 a$. Откуда получаем, что $\delta_{1x} = 0$, а приравнявая вторые производные b и, соответственно, c , получим, что $\delta_{1y} = \delta_{2x}$ и $\delta_1 \delta_2 = 0$. Но последнее означает, что при $\delta_1 = 0$ будем иметь метрику (2), а при $\delta_2 = 0$ – метрику (3). Таким образом, доказана лемма.

Лемма 1: Существует только три типа недиагональных римановых метрик, матрицы связности которых функционально абелевы и жордановы:

$$1. ds^2 = a^2(x) dx^2 + 2ka(x)b(y) dx dy + b^2(y) dy^2,$$

$$M_{g_1} = \begin{vmatrix} a^2(x) & ka(x)b(y) \\ ka(x)b(y) & b^2(y) \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{a'}{a} E_1^1, & k \in C, \\ \Gamma_2 &= \frac{b'}{b} E_2^2, & |k| = 1. \end{aligned}$$

$$2. ds^2 = dx^2 + 2c(y) dx dy + (c^2(y) + D) dy^2,$$

$$M_{g_2} = \begin{vmatrix} 1 & c(y) \\ c(y) & c^2(y) + D \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv 0, & D \in C, \\ \Gamma_2 &= c'(y) E_2^1, & D \neq 0. \end{aligned}$$

$$3. ds^2 = e^{2y} dx^2 + 2e^{2y} x dx dy + e^{2y} (x^2 + p) dy^2,$$

$$M_{g_3} = e^{2y} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 + p \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv E_2^1, & p \in C, \\ \Gamma_2 &\equiv E, & p \neq 0. \end{aligned}$$

Замечание 1: Тензор кривизны в двумерном случае имеет только одну компоненту: $R_{12} = [\Gamma_1, \Gamma_2] + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y}$, его равенство нулю для найденных метрик очевидно.

Таким образом, все двумерные римановы пространства с недиагональными метриками и функционально абелевыми связностями имеют нулевую

кривизну, если матрицы связности к тому же одновременно во всех точках могут быть приведены к жордановому виду.

При замене координат $x' = C^{-1}(x)x$, где $C = \|c_j^i\|$, матрица метрического тензора преобразуется по закону: $g \rightarrow g' = C^T g(C(x)x')C$, а матрицы связности – по правилу: $\Gamma_i \rightarrow \Gamma'_i = (C^{-1})'_{xi}C + C^{-1}\Gamma_j(C(x)x')C \cdot C_i^j$. Поэтому свойство функциональной абелевости наследуется, если преобразование координат C постоянно.

Согласно В.В. Морозову [7], множество матриц с функциональными элементами и перестановочных между собой есть некоторое множество линейных комбинаций постоянных попарно коммутирующих между собой матриц с функциональными коэффициентами. Если среди этих матриц найдется хотя бы одна со всеми различными собственными значениями, то все они могут быть одновременно приведены к диагональному виду, а значит, приведены к диагональному виду и их линейные комбинации. В нашем случае это следует отнести к матрицам связности, причем, так как диагонализация постоянных матриц достигается постоянным преобразованием, то оно же может быть применено к метрике и матрицам связности в любой точке с сохранением диагональности последних.

Если же среди постоянных попарно коммутирующих матриц, в линейные комбинации которых раскладываются матрицы связности Γ_i , не найдется матрицы со всеми различными собственными значениями, то в двумерном случае их можно одновременно привести к треугольному виду. При этом соответственно преобразованная метрика g' порождает матрицы связности Γ'_i – линейные комбинации приведенных к треугольному виду матриц связности $C^{-1}\Gamma_i C$ метрики g . Откуда следует, что функциональная кратность матрицам треугольного, то есть жорданового вида при этом тоже наследуется. Из этого следует утверждение.

Утверждение 1. Всякая двумерная недиагональная риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ с матрицей $g = \|g_{ij}\|$ имеет функционально абелевы матрицы связности тогда и только тогда, когда найдется такая матрица $C \in GL(2, R)$, что $C^T g(Cx')C = \tilde{g}_k$, где $\tilde{g}_k$ ($k = 1, 2, 3$) определяется леммой 1.

2°. Пусть $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ – n -мерная недиагональная риманова метрика, $n > 2$, $g = \|g_{ij}\|$, $g^{-1} = G = \|G_{ij}\|$. Обозначим i -ю строку матрицы G через $G_i = \|G_{i1}, \dots, G_{in}\|$, для матрицы $\Gamma_{*k} = \|\Gamma_{ijk}\|$, где $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$

j -ый столбец – $\Gamma_{*jk} = \|\Gamma_{1jk} \quad \Gamma_{2jk} \quad \dots \quad \Gamma_{njk}\|^T$. Тогда матрицы связности этой метрики $\Gamma_k = g^{-1}\Gamma_{*k}$. Из симметрии элементов $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ получим $\Gamma_{*jk} = \Gamma_{*kj}$.

i -ый элемент матрицы связности Γ_k будем обозначать λ_k^i , элемент, стоящий непосредственно над ним – δ_k^{i-1} , а E_i – одностолбцовая матрица, у которой все элементы нулевые, кроме i -ого, равного единице, E_j^i – как обычно, матрица со всеми нулевыми элементами, кроме стоящего на пересечении i -ой строки и j -ого столбца, равного единице.

Рассмотрим случаи, когда среди постоянных матриц, в линейные комбинации которых с функциональными коэффициентами раскладываются матрицы связности Γ_i , есть матрицы со всеми различными собственными значениями, и когда таких среди них не найдется.

1. Пусть все Γ_k – диагональны, то есть $\Gamma_k = \sum_{i=1}^n \lambda_k^i E_i^i$, тогда:

$$G_i \Gamma_{*jk} = \begin{cases} \lambda_k^i, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда при $i \neq k$ получим $\lambda_k^i = G_i \Gamma_{*ik} = G_i \Gamma_{*ki} = 0$, то есть $\Gamma_k = \lambda_k^k E_k^k$ и таким образом, матрицы Γ_k могут иметь только одно ненулевое значение λ_k^k . Тогда $G\Gamma_{*k} = \lambda_k^k E_k^k$, а значит, $G\Gamma_{*jk} = 0$ при $j \neq k$, а так как $\det G \neq 0$, то $\Gamma_{*jk} = 0$, откуда получим равенство нулю производных: $\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} = 0$ и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ при $i \neq k$, $j \neq k$, то есть $g_{ii} = g_{ii}(x^i)$, а $g_{ij} = g_{ij}(x^i, x^j)$. Обозначив $g_{ii} = g_i^2(x^i)$, получим для всех $k \leq n$, что $\Gamma_{*kk} = \left\| \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^k} \quad \dots \quad \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k} g_k \quad \dots \quad \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^k} \right\|^T$

Из соотношения же $G\Gamma_{*kk} = \lambda_k^k E_k^k$ будем иметь:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x^k} = \lambda_k^k g_k \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} = \lambda_k^k g_{ik}, \quad (5)$$

откуда следует, что $g_{ik} = g_i(x^i)g_k(x^k)a_{ik}$, причем $a_{ik} \in \mathbb{R}$ и $\det \|a_{ik}\| \neq 0$, а значения диагональных элементов: $\lambda_k^k = \frac{\partial g_k}{\partial x^k} g_k^{-1}$, а $\Gamma_k = \frac{\partial g_k}{\partial x^k} g_k^{-1} E_k^k$.

Очевидно, что матрицы Γ_k , как кратные постоянным коммутирующим матрицам, функционально абелевы и все компоненты тензора кривизны нулевые: $R_{ik} = [\Gamma_i, \Gamma_k] + \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^k} = 0$.

Таким образом, имеем метрику

$$ds^2 = g_i(x^i)g_j(x^j)a_{ij}dx^i dx^j \quad (6)$$

с матрицей $g = \|g_i g_j a_{ij}\|$, причем $\det \|a_{ij}\| \neq 0$.

2. Пусть $\Gamma_k = \sum_{i=1}^n \lambda_k^i E_i^i + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_k^i E_i^{i+1}$.

Аналогично предыдущему случаю получим:

$$G_i \Gamma_{*jk} = \begin{cases} \lambda_k^i, & \text{если } j = i, \\ \delta_k^i, & \text{если } j = i + 1, \\ 0, & \text{если } j \neq i, i + 1. \end{cases}$$

Отсюда $\lambda_1^i = G_i \Gamma_{*i1} = G_i \Gamma_{*1i} = 0$, если $i \neq 1$. А при $k > 1$

$$\lambda_k^i = G_i \Gamma_{*ik} = G_i \Gamma_{*ki} = \begin{cases} \lambda_k^i, & \text{если } k = i, \\ \delta_k^{k-1}, & \text{если } k = i + 1, \\ 0, & \text{если } k \neq i, i + 1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем, что $\Gamma_1 = \lambda_1^1 E_1^1 + \delta_2^1 E_2^1$,

$\Gamma_k = \delta_{k-1}^{k-1} E_{k-1}^{k-1} + \lambda_k^k E_k^k + \delta_k^{k-1} E_{k-1}^k + \delta_k^{k+1} E_{k+1}^k$, а $\Gamma_n = \delta_{n-1}^{n-1} E_{n-1}^{n-1} + \lambda_n^n E_n^n + \delta_n^{n-1} E_{n-1}^n$

($1 < k < n$), то есть каждая матрица связности Γ_k может иметь не более одной ненулевой жордановой клетки вида: $\Gamma_n = \delta_{n-1}^{n-1} E_{n-1}^{n-1} + \delta_n^{n-1} E_{n-1}^n +$

$\lambda_n^n E_n^n$, $\Gamma_1 = \lambda_1^1 E_1^1$ или $\Gamma_k = \begin{bmatrix} \delta_{n-1}^{n-1} & \delta_n^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_n^n & \delta_n^n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Из этого следует, что $[\Gamma_1, \Gamma_i] =$

0 при $i > 3$; если же $s \neq \pm 1, \pm 2$, то $[\Gamma_k, \Gamma_{k+s}] = 0$, и $[\Gamma_j, \Gamma_n] = 0$ при $j < n - 2$.

Приравнивая остальные коммутаторы к нулю, получим, что

$$\begin{aligned} \text{при } 1 < k < n \quad & \delta_k^{k-1} \delta_k^k = 0, \\ & \delta_k^{k-1} \delta_{k+1}^k = 0, \\ \text{при } k < n - 1 \quad & \delta_k^k \delta_{k+2}^{k+1} = 0, \\ \text{при } k < n \quad & \delta_k^k \delta_{k+1}^{k+1} = 0 \text{ и } \lambda_k^k \delta_{k+1}^k + \delta_k^k (\lambda_{k+1}^{k+1} - \delta_k^k) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда из соотношений $\delta_k^k \delta_k^{k-1} = 0$ и $\delta_k^k \delta_{k-1}^{k-1} = 0$ следует, что жордановы клетки могут быть не более, чем двумерны: $\begin{bmatrix} \delta_{k-1}^{k-1} & \delta_k^{k-1} \\ 0 & \lambda_k^k \end{bmatrix}$, или $\begin{bmatrix} \lambda_k^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, или $\begin{bmatrix} 0 & \delta_k^k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Но случай $\Gamma_k = \lambda_k^k E_k^k$ соответствует наличию среди матриц связности диагональных, при этом последнее из условий коммутирования (7) влечет выражение: $\Gamma_{k+1} = \lambda_{k+1}^{k+1} E_{k+1}^{k+1} + \delta_{k+1}^{k+1} E_{k+1}^{k+2}$.

Из системы (7) для двумерной недиагональной жордановой клетки вытекает, что она может встретиться только в последовательности:

$$\Gamma_{k-1} = \lambda_{k-1}^{k-1} E_{k-1}^{k-1} \text{ или } \Gamma_{k-1} = \delta_{k-2}^{k-2} E_{k-2}^{k-2} + E_{k-1}^{k-1}), \Gamma_k = \delta_k^k E_k^{k+1}, \\ \Gamma_{k+1} = \delta_k^k (E_k^k + E_{k+1}^{k+1}) + \delta_{k+1}^k E_k^{k+1}, \text{ а } \Gamma_{k+2} = \delta_{k+2}^{k+2} E_{k+2}^{k+3} \text{ или } \Gamma_{k+2} = \lambda_{k+2}^{k+2} E_{k+2}^{k+2}.$$

Таким образом, в матрицах Γ_i и Γ_{i+1} жордановы двумерные клетки либо расположены одинаково, либо в жордановых формах у них нет одинаковых ненулевых элементов. Перестановкой таких двумерных клеток, т.е. постоянным преобразованием, можем добиться, чтобы при $k > s \geq 2$ матрица $\Gamma_k = \lambda_k^k E_k^k$, а для $0 < k = 2m + 1 < s$ имели бы $\Gamma_k = \delta_k^k E_k^{k+1}$

и $\Gamma_{k+1} = \delta_k^k (E_k^k + E_{k+1}^{k+1}) + \delta_{k+1}^k E_k^{k+1}$. Но тогда $G\Gamma_{*k} = \lambda_k^k E_k^k$ при $k > S$, откуда $\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k} = 2\lambda_k^k g_{kk}$ и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ при $i \neq k, j \neq k$ и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} = \lambda_k^k g_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}$.

Из равенств $G\Gamma_{*k} = \delta_k^k E_k^{k+1}$ и $G\Gamma_{*k+1} = \delta_k^k (E_{k-1}^{k-1} + E_k^k) + \delta_{k+1}^k E_k^{k+1}$ при $k = 2m + 1$ получим, что $\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} = 0$, если $i \neq k + 1$,

$$\frac{\partial g_{k+1, k+1}}{\partial x^k} = 2\delta_k^k g_{k, k+1}, \quad \frac{\partial g_{k, k+1}}{\partial x^k} = 2\delta_k^k g_{kk}, \quad \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} = 0, \text{ если } i \neq k, k + 1, \\ \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^{k+1}} = 2\delta_k^k g_{kk}, \quad \frac{\partial g_{k+1, k+1}}{\partial x^{k+1}} = 2(\delta_k^k g_{k+1, k+1} + \delta_{k+1}^k g_{k, k+1}), \quad \frac{\partial g_{k, k+1}}{\partial x^{k+1}} = 2\delta_k^k g_{kk} + \delta_{k+1}^k g_{kk}.$$

Если же $i \neq k + 1$, то $\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} = 0$, а если $i \neq k, k + 1$, то $\frac{\partial g_{k+1, k+1}}{\partial x^i} = 0$ и $\frac{\partial g_{k, k+1}}{\partial x^i} = 0$.

Т.е. функции $g_{kk}, g_{k, k+1}, g_{k+1, k+1}$ зависят только от переменных x^k, x^{k+1} , и эта зависимость описывается системой уравнений случая 1⁰.3, решения которой известны, причем, как мы видели, с точностью до постоянного преобразования переменных реализуемы только две возможности:

$\delta_k^k = 0, \delta_{k+1}^k = g'_{k, k+1}(x^{k+1})$ – в этом случае будем говорить о клетках типа $\langle 0, g'_{k, k+1} \rangle$, – или $\delta_k^k = 1, \delta_{k+1}^k = 0$ – клетки типа $\langle 1, 0 \rangle$.

В то же время $g_{kk} = g_{kk}(x^k), \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k} = 2\lambda_k^k g_{kk}$ при $k > s$, а если $i > s$ и $j \leq s$, то $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = 0$, кроме того $\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^k} = \lambda_k^k g_{pk}$ при всех $s < k \neq p$. Это означает, что g_{ik} при $k, i > s$ не зависят от переменных с номерами, меньшими $s+1$ и описываются системой (5). Таким образом, получены все значения g_{ik} правой нижней клетки $(n-s) \times (n-s)$ матрицы метрики M_g , и все ее диагональные двумерные клетки. Сделав перестановку этих клеток, например, так, чтобы по

диагонали матрицы M сначала расположить все двумерные клетки типа $\langle 0, g'_{k\ k+1} \rangle$, потом типа $\langle 1, 0 \rangle$, установим канонический тип матрицы метрики ds^2 .

Из этого получим, что, $\Gamma_k = 0$, $\Gamma_{k+1} = g'_{k\ k+1} E_k^{k+1}$ при $k = 2m + 1 < s_1$, а $\Gamma_k = E_k^{k+1}$, $\Gamma_{k+1} = E_k^k + E_{k+1}^{k+1}$ при $s_1 < k = 2p + 1 < s$.

Чтобы заполнить неизвестные пока части матрицы M_g , выпишем системы дифференциальных уравнений для g_{ij} с условиями $1 \leq i \leq s$, $2 \leq j$ и $j \neq i + 1$, выделяя четыре случая, соответствующие заполнениям над двумерными клетками первого и второго типа и столбцы с номерами, превосходящими s .

1) $1 \leq i \leq s_1$, $1 < j \leq s_1$ – диагональные двумерные клетки типа $\langle 0, g'_{k\ k+1} \rangle$, где $k = 2m + 1 < s_1$.

Тогда $\Gamma_{2m+1} \equiv 0$, $\Gamma_{2m+2} = g'_{2m+1\ 2m+2} (x^{2m+2}) E_{2m+2}^{2m+1}$, из чего следует, что $\Gamma_{*i\ 2m+1} \equiv 0$ и $\Gamma_{*2m+2} = g'_{2m+1\ 2m+2} g_{2m+1}$. Приравнявая соответствующие значения Γ_{ijk} к нулю или $g'_{2m+1\ 2m+2} g_{i\ 2m+1}$, получим для $m \neq p$ соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 && \text{при } 2m + 1, 2p + 1 < s_1 \leq s, \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 && \text{при } i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} &= g'_{2m+1\ 2m+2} g_{2p+1\ 2m+1} && \text{при } i \neq 2m + 2 \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 && \text{при } i \neq 2p + 2, \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 2g'_{2p+1\ 2p+2} g_{2p+1\ 2p+2} && \text{и при } i \neq 2p + 2, 2m + 2; \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+2}}{\partial x^{2p+2}} &= g'_{2p+1\ 2p+2} g_{2p+1\ 2m+2}, && \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = 2g'_{2p+1\ 2p+2} g_{2p+2\ 2m+1}. \end{aligned}$$

2) $s_1 < i, j \leq s$ – в этом случае диагональные двумерные клетки типа $\langle 1, 0 \rangle$ и $\Gamma_{2m+1} = E_{2m+1}^{2m+2}$, а $\Gamma_{2m+2} = E_{2m+1}^{2m+1} + E_{2m+2}^{2m+2}$.

Соответствующая система условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p + 2, 2m + 2; \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+1\ 2m+1}, \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p + 2, 2p + 3, 2m + 2; \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^i} &= g_{2p+1\ i}, \quad i = 2p + 2, 2p + 3; \quad \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+1\ 2m+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+1, 2p+2, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2p+2, 2m+1}, \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+1, 2p+2, 2m+1, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2p+1}} &= g_{2p+1, 2m+2}, \quad \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+2, 2m+2}; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+2, 2m+2}.\end{aligned}$$

3) Случай $i \leq s_1$, $s_1 < j \leq s$ соответствует двумерным клеткам на пересечении «строки», содержащей диагональную клетку типа $\langle 0, g'_{k, k+1} \rangle$, и «столбца», содержащего диагональную клетку типа $\langle 1, 0 \rangle$.

Уравнения, задающие элементы g_{ij} в этом случае, такие:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2p+1, 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+1, 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2m+1, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+1, 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} &= \frac{\partial g_{2p+1, 2m+2}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2p+1, 2m+1}; \\ \frac{\partial g_{2p+i, 2m+2}}{\partial x^{2m}} &= g_{2p+i, 2m+2}, \quad i = 1, 2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+2, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+1}} = g'_{2p+1, 2p+2} g_{2p+1, 2p+2}; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2m+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2p+2, 2m+1}; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+1, 2m+1, 2m+2.\end{aligned}$$

4) $j > s$, $1 \leq i \leq s$. Пусть $i \leq s_1$, тогда для $2p+1 < s_1$ и $j > s$ получим при $i \neq j$, то имеет место:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2p+1, j}}{\partial x^i} &= 0 \text{ и } \frac{\partial g_{2p+2, j}}{\partial x^i} = 0, \text{ если } i \neq 2p+2; \\ \frac{\partial g_{2p+1, i}}{\partial x^i} &= \lambda_i^i g_{2p+1, i}; \quad \frac{\partial g_{2p+2, i}}{\partial x^{2p+2}} = g'_{2p+1, 2p+2} g_{2p+1, i}; \quad \frac{\partial g_{2p+2, i}}{\partial x^i} = \lambda_i^i g_{ii}.\end{aligned}$$

Если же $s_1 < 2m+1 \leq s$, то:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2m+1, j}}{\partial x^i} &= 0, \text{ при } i \neq 2m+2, i \neq j; \\ \frac{\partial g_{2m+2, j}}{\partial x^i} &= 0, \text{ при } i \neq 2m+1, 2m+2, i \neq j; \\ \frac{\partial g_{2m+1, j}}{\partial x^{2m+2}} &= \frac{\partial g_{2m+2, j}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2m+1, j}, \quad \frac{\partial g_{2m+2, j}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2m+2, j}, \quad \frac{\partial g_{2m+1, j}}{\partial x^j} = \lambda_j^j g_{2m+1, j},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_{2m+2}^j}{\partial x^j} = \lambda_j^i g_{2m+2}^j.$$

Проинтегрировав эти дифференциальные уравнения, установим зависимость элементов недиагональных клеток от определенных выше элементов диагональных двумерных и одномерных клеток.

Лемма 2: Элементы недиагональных клеток матрицы g метрики ds^2 , матрицы связности которой функционально абелевы и одновременно во всех точках приводимы к жордановому виду, определяются правилом:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} g_{2k+1}^{2m+1} & g_{2k+1}^{2m+2} \\ g_{2k+2}^{2m+1} & g_{2k+2}^{2m+2} \end{matrix} \right\| \\ &= a_{km} \left\| \begin{matrix} g_{2k+1}^{2k+1} \\ g_{2k+2}^{2k+1} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} g_{2m+1}^{2m+1} & g_{2m+1}^{2m+2} \end{matrix} \right\| + b_{km} E_2^2 \\ \text{и} \quad & \left\| \begin{matrix} g_{2k+1}^j \\ g_{2k+2}^j \end{matrix} \right\| = a_{kj} \left\| \begin{matrix} g_{2k+1}^{2k+1} \\ g_{2k+2}^{2k+1} \end{matrix} \right\| g_j \quad \text{при } 2k+1 < S \text{ и } j > S, \\ & a_{km}, a_{kj}, b_{km} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что доказано утверждение.

Утверждение 2: Если матрицы связности n -мерной недиагональной метрики $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, $n > 2$, во всех точках одновременно приводимы к жордановому виду, то:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \sum_{k=0}^S \left((dx^{2k+1})^2 + 2g_{2k+1}^{2k+2} (x^{2k+2}) dx^{2k+1} dx^{2k+2} + \right. \\ & + \left(g_{2k+1}^{2k+2} (x^{2k+2}) + g_{2k+1}^{2k+1} (x^{2k+2}) \right) (dx^{2k+2})^2 \Big) + \\ & + \sum_{k=S+1}^m e^{2x^{2k+2}} \left((dx^{2k+1})^2 + 2x^{2k+1} dx^{2k+1} dx^{2k+2} + \right. \\ & + \left(g_{2k+1}^{2k+2} (x^{2k+1}) + g_{2k+1}^{2k+1} (x^{2k+1}) \right) (dx^{2k+2})^2 \Big) + \\ & + \sum_{k=2m+3}^n g_k^2 (x^k) (dx^k)^2 + 2 \sum g_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (8)$$

где g_{ij} при $j \neq i+1$, $i \leq 2m+1$ или $i \geq 2m+2$ определяются леммой 2.

Замечание 2: Для найденных выше метрик (6) и (8) матрицы связности либо постоянны, либо матрицы Γ_k зависят только от переменной x^k , из этого и коммутирования всех матриц связности следует равенство нулю всех компонент тензора кривизны.

Поскольку при замене координат $x' = C^{-1}(x)x$ соответственно преобразованной метрикой $g'(x')$ порождаются матрицы связности Γ_i' , как линейные комбинации матриц $C^{-1}\Gamma_i C$ и матриц связности Γ_i метрики g , если

С постоянно, то Γ_i' сохраняют как кратность жордановому виду, так и функциональную абелевость. Таким образом, мы имеем возможность в многомерном случае выделить класс метрик, связности которых функционально абелевы, а именно, имеет место теорема.

Теорема: Если найдется $C \in GL(n, \mathbb{R})$, такое, что $C^T g(Cx')C = \tilde{g}(x')$, где $\tilde{g}$ определяется (6) или (8), то матрицы связности этой метрики функционально абелевы.

Известно [3], что если числовая матрица X приведена к жордановому виду и имеет собственные значения λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, u$), то всякая матрица Y , коммутирующая с ней, разбивается на u^2 блоков $Y_{\alpha\beta}$ в соответствии с разбиением на блоки жордановой матрицы X , при этом $Y_{\alpha\beta} = 0$, если $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ и $Y_{\alpha\beta}$ – произвольная правильная треугольная матрица, если собственные значения λ_α и λ_β совпадают. Число параметров в такой матрице Y равно $N = \sum_{\alpha, \beta=1}^u \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ – степень наибольшего общего делителя многочленов $(\lambda - \lambda_\alpha)^{\rho_\alpha}$ и $(\lambda - \lambda_\beta)^{\rho_\beta}$. Если X не имеет равных собственных значений, то коммутирующая с ней матрица треугольная с нулевыми наддиагональными блоками $Y_{\alpha\beta}$. Таким образом, получаем представление об общем блочном виде матриц связности Γ_i при условии приведения к жордановому виду одной из ее компонент разложения в функциональную линейную комбинацию постоянных матриц. Последнее всегда можно считать достигнутым постоянным преобразованием в силу того, что такая компонента постоянна.

Так как Γ_{jk}^i – коэффициенты аффинной связности, согласованной с римановой метрикой, и, значит, $G_i \Gamma_{*jk} = G_i \Gamma_{*kj}$, то намечается возможность перейти к системе дифференциальных $\frac{n^2(n+1)}{2}$ уравнений, описывающих матрицу g .

ЛИТЕРАТУРА:

1. J. Dollard, Ch. Friedman. Product integration with application to differential equations // London: Addison-Wesley Publ. Comp. 1979. P. 254.
2. L. Schlesinger. Parallel Serschiebung und Krümmungstensor // Math. Ann. 1928. V.99. P. 413–434.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
4. Козлов В.А., Паланджанц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и представления групп и алгебр Ли. – Майкоп, 2011. С. 93.

5. Мантуров О.В., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны // Дифференциальная геометрия и алгебры Ли. МОПИ. Деп. в ВИНТИ №2384–84 Деп.
6. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии. 1990. Т. 22. С. 167–215.
7. Морозов В.В. О коммутативных матрицах // Уч. записки КГУ. 1952. Т. 119. №5. С. 17–20.
8. Петрова В.Т. Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Инвариантные тензоры на однородных пространствах. М.: МОПИ, 1988, С. 118–139. Деп. в ВИНТИ № 8355–В 88.
9. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 667 с.
10. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник ТГГПУ. 2010. № 3(21). С. 79–83.