УДК 517.95 5

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-29-35

Акимов А.А., Абдуллина Р.И.*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Аннотация. В статье рассматривается проблема построения решения задачи Дарбу для телеграфного уравнения в случае отхода от характеристики. Данная задача возникает при доказательстве существования решения задачи Трикоми, где есть необходимость построения решения задачи Дарбу в явном виде. В статье предварительно построена функция Римана-Адамара и методом вспомогательных функций доказана теорема единственности решения задачи Дарбу. Затем с использованием функции Римана-Адамара было построено решение задачи Дарбу в виде ряда, содержащего функции Бесселя.

Ключевые слова: задача Дарбу, функция Римана-Адамара, телеграфное уравнение.

A. AKIMOV, R. ABDULLINA*Bashkir State University Sterlitamak Branch*

THE SOLUTION OF THE DARBOUX PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH DEVIATION FROM THE CHARACTERISTIC

Abstract. We consider the problem of constructing a solution of the Darboux problem for the telegraph equation for the case with deviation from the characteristic. This problem occurs in proving the existence of the solutions of the Tricomi problem where it becomes necessary to construct a solution of the Darboux problem explicitly. The Riemann–Hadamard function is preliminarily constructed and uniqueness theorem is established for the Darboux problem. Then, using the Riemann–Hadamard function the Darboux problem is explicitly solved in the form of a series containing Bessel functions.

Key words: Darboux problem, the Riemann–Hadamard function, telegraph equation.

В основе математических моделей многих явлений, имеющих место в жидком сосуде, и таких явлений, как сверхзвуковое течение газов, а также в основе ряда других моделей и процессов механики лежат уравнения в частных

производных второго порядка гиперболического типа. Задачи Гурса и Дарбу вместе с задачей Коши и смешанной задачей являются основными локальными краевыми задачами для уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Одним из основных методов решения данных задач является метод Римана. При решении задачи Дарбу методом Римана возникает достаточно сложная задача построения вспомогательной функции, называемой функцией Римана-Адамара. Особенно затруднительно построить данную функцию в случае если граничное условие задается на кривой, не совпадающей с характеристикой. Построению функции Римана-Адамара и затем с помощью нее решению задачи Дарбу в случае отхода от характеристики для телеграфного уравнения посвящена эта статья.

Рассмотрим телеграфное уравнение:

$$L_0 v = v_{xx} - v_{yy} + cv = 0, \quad (1)$$

где c – произвольная действительная постоянная, в области D , ограниченной характеристикой CB ($x - y = 1$) уравнения (1), прямой AC

($kx + y = 0$, $k > 0$), и отрезком AB , лежащим на оси $y = 0$.

Задача D . В области D найти функцию $v(x, y)$, которая удовлетворяет условиям:

$$v(x, y) \in C(\bar{D}) \wedge C^1(D \cup AB) \wedge C^2(D); \quad (2)$$

$$Lv(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D; \quad (3)$$

$$v(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < 1; \quad (4)$$

$$v(x, kx) = \varphi(x), \quad 0 < x < \frac{1}{1+k}, \quad (5)$$

где $\tau(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что задача Дарбу для телеграфного уравнения рассматривалась ранее в работе К.Б. Сабитова [4], но в этой работе кривая AC являлась характеристикой уравнения (1). В данной статье рассмотрен более общий случай, когда кривая AC совпадает с характеристикой только в частном случае.

Определение. Назовем функцию $v(x, y)$ квазирегулярным решением уравнения (1), если выполняются следующие условия:

- i) $v(x, y)$ удовлетворяет условиям (2);

ii) к следующим интегралам можно применить формулу Грина:

$$\int_D \int v L_0 v dx dy, \quad \int_D \int v_x L_0 v dx dy, \quad \int_D \int v_y L_0 v dx dy;$$

iii) граничные интегралы понимаются как пределы интегралов на внутренних кривых при стремлении последних к границе.

Предположим, что v_1, v_2 – два решения **Задачи D** для уравнения (1). Положим $v = v_1 - v_2$. Тогда функция $v(x, y)$ в области D удовлетворяет уравнению (1) и следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} v = 0 \text{ на } AC \\ v = 0 \text{ на } AB \end{cases}.$$

Поэтому для доказательства единственности решения **Задачи D** достаточно показать, что $v = 0$ в D .

Теорема 1. Если $v(x, y)$ – квазирегулярное решение уравнения (1) в области D и $v|_{AB \cup AC} = 0$, тогда, если $c > 0$, то $v(x, y) \equiv 0$ в D .

Доказательство. Доказательство теоремы проведем аналогично работе [1]. Пусть $v = v(x, y)$ квазирегулярное решение уравнения (1) определенное в D . Рассмотрим также интеграл:

$$2 \iint_D (bv_x + av_y)(v_{xx} - v_{yy} + cv) dx dy, \quad (6)$$

где a, b достаточно гладкие функции переменных (x, y) .

В силу (1) этот интеграл равен нулю. Функции a, b выберем таким образом, чтобы выражения, получившиеся после преобразования интеграла с помощью формулы Грина, были неотрицательными и обращались в нуль только, если $v \equiv 0$ в D , что равносильно единственности решения.

Рассмотрим тождества:

$$\begin{aligned} bv_x v_{xx} &= \frac{1}{2} (bv_x^2)_x - \frac{1}{2} b_x v_x^2, \quad av_y v_{yy} = \frac{1}{2} (av_y^2)_y - \frac{1}{2} a_y v_y^2, \\ av_y v_{xx} &= (av_x v_y)_x - \frac{1}{2} (av_x^2)_y + \frac{1}{2} a_y v_x^2 - a_x v_x v_y, \end{aligned}$$

$$bv_x v_{yy} = (bv_x v_y)_y - b_y v_x v_y - \frac{1}{2}(bv_y^2)_x + \frac{1}{2}b_x v_y^2,$$

$$bv_x v = \frac{1}{2}(bv^2)_x - \frac{1}{2}b_x v^2, \quad av_y v = \frac{1}{2}(v^2)_y - \frac{1}{2}a_y v^2.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (6)

$$\oint_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

и используя приведенные выше тождества, получим следующее равенство:

$$J = \iint_D (b_x v_x^2 - a_y v_x^2 + 2a_x v_x v_y + b_x v_y^2 + b_x v^2 + a_y v^2) dx dy +$$

$$+ \int_{AC} + \int_{CB} + \int_{BA} (bv_x^2 + 2av_x v_y + bv_y^2 + bc v^2) dy + (av_y^2 + 2bv_x v_y + av_x^2 - ac v^2) dx =$$

$$= I + J_1 + J_2 + J_3$$

Выберем теперь функции $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ в области D следующим образом: $a = -kb$, $b = c$. Очевидно, что $I = 0$. Из условия $v(x, y) = 0$ на $AB \cup AC$ и факта, что

$$dy = -kdx \text{ (на } AC), \quad dy = dx \text{ (на } CB)$$

получим:

$$J_1 = \int_{\gamma_1} (kb + a)(1 - k^2)v_y^2 dx = 0,$$

$$J_2 = \int_{\gamma_2} [c(1 - k)(v_x + v_y)^2 + c^2 v^2(1 + k)] dx \geq 0,$$

$$J_3 = kc \int_{AB} v_y^2 dx \geq 0.$$

На плоскости (x, y) перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$Lu = u_{\xi\eta} + \frac{c}{4}u = 0,$$

где

$$u(\xi, \eta) = v\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2}(\xi - \eta)\right),$$

а область D отобразится в область

$$\Delta = \left\{ (\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \eta < \alpha\xi < 1, \alpha = \frac{1-k}{1+k} > 1 \right\}$$

и, соответственно, **Задача D'** будет сформулирована так:

Задача D' . В области Δ найти функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет условиям:

$$u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}) \wedge C^1(\Delta \cup \{\eta = \alpha\xi\}) \wedge u_{\xi\eta} \in C(\Delta);$$

$$Lu(\xi, \eta) \equiv 0, (\xi, \eta) \in \Delta,$$

$$u(\xi, \alpha\xi) = \tau(\xi), 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha}; u(\xi, \xi) = \psi(\xi), 0 \leq \xi \leq 1; \psi(0) = \varphi(0).$$

Для решения задачи воспользуемся видоизмененным методом Римана.

Видоизмененный метод Римана предполагает использование функции $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$, известной как функция Римана-Адамара. Построение данной функции можно встретить в работах [2], [5]. В нашем случае функция Римана-Адамара должна удовлетворять следующим условиям.

Рассмотрим следующее тождество:

$$u \cdot LR - R \cdot Lu = \frac{1}{2}(uR_{\eta} - Ru_{\eta})_{\xi} + \frac{1}{2}(uR_{\xi} - Ru_{\xi})_{\eta}. \quad (7)$$

Используя соотношение (7), где u – регулярное решение уравнения (1) в области Δ , а R – функция Римана-Адамара, найденная ранее в работе [2], и применяя к нему формулу Грина по областям ω_k , σ_k , Δ_k , определенным также в работе [2], получим следующее равенство:

$$0 = \int_{(\cup \partial \Delta_i \cup \partial \omega_k \cup \partial \sigma_m)} (uR_{\xi} - Ru_{\xi})d\xi - (uR_{\eta} - Ru_{\eta})d\eta = \\ = I_{ED} + I_{DC} + I_{CA} + I_{AE},$$

где $D = (\xi_0, \eta_0)$, $C = \left(\frac{\eta_0}{\alpha}, \eta_0\right)$, $B = \left(\frac{\xi_0}{\alpha}, \xi_0\right)$, $A = (0, 0)$, $E = (\xi_0, \xi_0)$.

Преобразуя интегралы $I_{ED}, I_{DC}, I_{CA}, I_{AE}$, будем иметь:

$$I_{ED} = uR_1|_E^D = uR_1(D) - uR_1(E) = u(\xi_0, \eta_0) - \tau(\xi_0)$$

$$I_{DC} = -uR_1|_D^C = -uR_1(C) + uR_1(D) = -\psi\left(\frac{\eta_0}{\alpha}\right) + u(\xi_0, \eta_0).$$

Так как $d\eta = \alpha d\xi$ на AC , тогда:

$$I_{AC} = \int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha}} u[(R_\xi - \alpha(R_\eta)]d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\xi_0, \eta_0) - P_n(\eta_0, \xi_0)],$$

где $P_n(s, \mu) = \frac{c(\mu - \alpha^{2n-1}s)}{2} \int_0^{\frac{\mu}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^n t - \mu)(t\alpha^{1-n} - s)}\right)}{\sqrt{(\alpha^{n-1}t - \alpha^{2n-2}s)(\alpha^n \xi - \mu)}} \tau(t) dt.$

Аналогично на AE , $d\eta = d\xi$. Поэтому:

$$I_{AE} = \int_0^{\xi_0} u(R_\xi - R_\eta) d\xi = \frac{c(\eta - \xi)}{2} \int_0^{\xi} \frac{J_1\left(\sqrt{c(t - \xi)(t - \eta)}\right)}{\sqrt{(t - \xi)(t - \eta)}} \psi(t) dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [Q_n(\xi_0, \eta_0) - Q_n(\eta_0, \xi_0)],$$

где $Q_n(s, \mu) = \frac{c(\mu - \alpha^{2n}s)}{2} \int_0^{\frac{\mu}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^n t - \mu)(t\alpha^{-n} - s)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}s)(\alpha^n \xi - \mu)}} \psi(t) dt.$

В силу приведенных вычислений окончательный вид решения задачи D' в координатах $(\xi, \eta) \in \Delta$ будет иметь вид:

$$u(\xi, \eta) = \tau(\xi) + \psi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) + \frac{c(\eta - \xi)}{2} \int_0^{\xi} \frac{J_1\left(\sqrt{c(t - \xi)(t - \eta)}\right)}{\sqrt{(t - \xi)(t - \eta)}} \psi(t) dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\xi, \eta) - P_n(\eta, \xi) + Q_n(\xi, \eta) - Q_n(\eta, \xi)] \quad (8)$$

Теорема 2. Если функции $\tau(\xi) \in C^1\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha > 1$, $\psi(\xi) \in C^2[0, 1]$ и

$c > 0$, тогда существует единственное решение **Задачи D'** , которое определяется по формуле (8).

Построение функции Римана-Адамара и задачи Дарбу в явном виде в случае отхода от характеристики позволяет найти общую формулу обращения интегрального уравнения с заданным ядром. Для этого достаточно выписать два решения задачи Дарбу – одно с условием на характеристике, а второе с условием на заданной кривой, не совпадающей с характеристикой. Данная методика позволяет обобщить результаты теории дробно-линейного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Акимов А.А. О единственности решения задачи типа Неймана для уравнения Чаплыгина // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика (Электронный журнал) 2013. № 4. URL: <http://vestnik-mgou.ru/Articles/View/486>.
2. Акимов А.А. Построение функции Римана-Адамара задачи Дарбу для телеграфного уравнения // Сборник научных трудов Sworld. 2014. Т.29. №4. С.48–50.
3. Акимов А.А., Галиаскарова Г.Р. Об одном соотношении задачи Дарбу для уравнения Трикоми // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. 2010. № 12 (54). С. 113–115.
4. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
5. Wood D.H. Simple Riemann functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 82. No. 5. Pp. 737–739.