УДК 517.927.25

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-36-43

Сучков М.В., Трифоненков В.П.*Научно-исследовательский ядерный университет (г. Москва)*

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОБЫКНОВЕННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ПРОВЕРКЕ УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ В.А. ИЛЬИНА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Аннотация. В статье устанавливаются оценки собственных функций для обыкновенных дифференциальных операторов четвертого порядка на конечном интервале. С помощью затих оценок и теоремы В.А.Ильина о базисности показывается базисность минимальной и замкнутой в L_p нормированной в L_2 системы собственных функций, отвечающих произвольному самосопряженному расширению рассматриваемого оператора в пространствах L_p .

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор четвертого порядка, оценка собственных функций, базисность в пространствах L_p .

M. Suchkov, V. Trifonenkov*National Research Nuclear University (Moscow)*

ESTIMATIONS OF EIGENFUNCTIONS OF ORDINARY FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR AND THEIR USE WHEN CHECKING THE BASIS PROPERTY CONDITION BY V.A. IL'IN IN L_p SPACES

Abstract. The eigenfunctions of the fourth-order ordinary differential operator are estimated on a finite interval. These estimates and theorem of Il'in basis property are used to prove the basis property of a minimal and closed in L_p and normalized in L_2 system of eigenfunctions corresponding to the arbitrary self-adjoint expansion of the above-mentioned operator in L_p spaces.

Key words: fourth-order ordinary differential operator, estimation of eigenfunctions, basis property in L_p spaces.

Введение

В 1983 г. В.А. Ильиным было получено необходимое и достаточное условие базисности для собственных и присоединенных функций обыкновенного несамосопряженного дифференциального оператора порядка n на любом компакте K основного интервала G в пространствах L_p [1, с. 789–793]. Для несамосопряженного оператора даже для случая $n = 2$ хорошо известно, что это условие не обязано выполняться (например, задача А.А. Самарского – Н.И. Ионкина [3, с. 294–304]). Для неотрицательного самосопряженного расширения оператора второго порядка из работы В. А. Ильина и И. Йо [2, с. 1113–1115] следует, что это условие всегда выполнено. Целью настоящей работы является доказательство выполнения этого условия для самосопряженных расширений обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка.

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L четвертого порядка с действительными коэффициентами на конечном интервале G :

$$Lu(x) = u^{(4)}(x) + p_1(x)u^{(3)}(x) + p_2(x)u^{(2)}(x) + p_3(x)u'(x) + p_4(x)u(x), \quad (1)$$

где $p_s(x) \in C^{(5-s)} \cap L_1(G)$; $s = \overline{1,4}$; $x \in G$.

Собственная функция $u(x)$ оператора (1) определяется следующим образом:

- 1) $u(x) \in C^{(4)}(G) \cap L_\infty(G)$
- 2) $u(x) \not\equiv 0$; $x \in G$
- 3) $\exists$ число λ | $Lu(x) = \lambda u(x)$.

Так как в дальнейшем при проверке условия базисности В.А. Ильина мы будем рассматривать только самосопряженные расширения оператора (1), то можем считать число λ вещественным. Обозначим $\mu = (|\lambda|)^{1/4}$ – арифметический корень. Обозначим через $y_i(x)$ $i = \overline{1,4}$ некоторую фундаментальную систему решений, отвечающих оператору $(L - \lambda)$. Тогда

любая собственная функция оператора (1) с собственным значением λ может быть представлена в виде:

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 C_i y_i(x); x \in G, \quad (2)$$

(C_i – не зависят от x).

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Существует фундаментальная система решений $\{y_i(x)\}_{i=1}^4$ такая, что для коэффициентов C_i в равенстве (2) справедливы оценки:

$$|C_i| \leq \frac{A_i}{\|y_i(x)\|_{L_2(G)}} \|u(x)\|_{L_2(G)}; i = \overline{1,4}; \mu = \sqrt[4]{|\lambda|} \geq \mu_0, \quad (3)$$

где μ_0 – достаточно большое положительное число. Константы A_i не зависят ни от x , ни от μ .

Доказательство.

Случай $\lambda > 0$ рассмотрен в работе [6, с. 85–90], поэтому ограничимся доказательством теоремы только при $\lambda < 0$. Из асимптотических формул Биркгофа [4, с. 88] следует существование такой фундаментальной системы решений $y_i(x)$ $i = \overline{1,4}$, отвечающих оператору $(L - \lambda)$, что:

$$y_i(x) = \overset{\circ}{y}_i(x) \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \quad (4)$$

равномерно для $x \in G$, где $\overset{\circ}{y}_i(x)$ $i = \overline{1,4}$ – фундаментальная система

решений оператора $u^{(4)} - \lambda u$. Выпишем явно функции $\overset{\circ}{y}_i(x)$. Обозначим

через $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}; w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}; w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}};$

$w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$ – все корни четвертой степени из (-1). Тогда $\overset{\circ}{y}_i(x) = e^{w_i \mu x}$

; $i = \overline{1,4}$ и любая собственная функция оператора $\overset{\circ}{L} u = u^{(4)}$ с собственным значением λ может быть представлена в виде:

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 C_i y_i(x) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{w_i \mu x}. \text{ Без ограничения общности будем}$$

считать, что $G = (0, 1)$. (Общий случай $G = (a, b)$ сводится к этому заменой переменной $x = a + (b - a)t$; $t \in (0, 1)$).

Явно найдем $\|u\|_{L_2(0,1)}^2$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(0,1)}^2 &= \int_0^1 u \bar{u} dx = \int_0^1 \left(|C_1|^2 e^{\sqrt{2}\mu x} + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2) + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 e^{i\sqrt{2}\mu x}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 e^{\sqrt{2}\mu x + i\sqrt{2}\mu x}) + |C_2|^2 e^{-\sqrt{2}\mu x} + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 e^{-\sqrt{2}\mu x + i\sqrt{2}\mu x}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 e^{i\sqrt{2}\mu x}) + 2 \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) + |C_3|^2 e^{-\sqrt{2}\mu x} + |C_4|^2 e^{\sqrt{2}\mu x} \right) dx = \\ &= |C_1|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2) + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 \frac{1}{\sqrt{2}\mu(1+i)} (e^{\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) + |C_2|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 \frac{1}{\sqrt{2}\mu(i-1)} (e^{-\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) + |C_3|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + |C_4|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) \geq \\ &\geq |C_1|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) + |C_2|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + |C_3|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + \\ &\quad + |C_4|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) - 2 |\operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2)| - 2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 \frac{1}{2\mu} (e^{\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - 2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 \frac{1}{2\mu} (e^{-\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - \\
& - 2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - 2 \left| \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) \right|. \quad (5)
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся неравенством: $|\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2)| \leq |z_1| \cdot |z_2|$ для комплексных чисел z_1 и z_2 . Тогда:

$$\begin{aligned}
2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2) \right| & \leq 2 |C_1| |C_2| = 2 |C_1| \mu \frac{|C_2|}{\mu} \leq \mu^2 |C_1|^2 + \frac{1}{\mu^2} |C_2|^2, \\
2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq A(|C_1|^2 + \frac{1}{\mu^2} |C_3|^2),
\end{aligned}$$

где константа $A > 0$ – не зависит от μ ,

$$\begin{aligned}
2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 \frac{1}{2\mu} (e^{\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq \frac{e^{\sqrt{2}\mu}}{\mu} \left(1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \frac{1}{2} (|C_1|^2 + |C_4|^2), \\
2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 \frac{1}{2\mu} (e^{-\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq \frac{1}{\mu} \left(1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \frac{1}{2} (|C_2|^2 + |C_3|^2), \\
2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq B(|C_4|^2 + \frac{1}{\mu^2} |C_2|^2),
\end{aligned}$$

где константа $B > 0$ не зависит от μ ,

$$2 \left| \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) \right| \leq \frac{1}{\mu^2} |C_3|^2 + \mu^2 |C_4|^2. \quad (6)$$

Подставляя оценки (6) в (5) и учитывая, что

$$\begin{aligned}
\left\| \overset{\circ}{y}_1(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 & = \left\| \overset{\circ}{y}_4(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1), \\
\left\| \overset{\circ}{y}_2(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 & = \left\| \overset{\circ}{y}_3(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}),
\end{aligned}$$

получаем оценки (3) для оператора $(\overset{\circ}{L} - \lambda)$. Для общего оператора $(L - \lambda)$, повторяя те же рассуждения и учитывая асимптотический вид функций $y_i(x)$ (4), получим оценки (3) в общем случае.

Похожие оценки, но другими методами, получены в работе И.С. Ломова, М.В. Сучкова [5, с. 16–21]. Обратимся теперь к условию базисности В.А. Ильина [1, с. 789–793]. Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – замкнутая в $L_p(G)$ и минимальная система нормированных в $L_2(G)$ собственных функций самосопряженного расширения оператора (1). Тогда, если выполнены условия на спектр этого оператора:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(\lambda_n)^{1/4}| &\leq C_1, \quad C_1 > 0, \\ \sum_{t \leq |\operatorname{Re}(\lambda_n)^{1/4}| \leq t+1} 1 &\leq C_2; \quad C_2 > 0; \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

то система $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_p(K)$, где K – любой компакт интервала G , тогда и только тогда, когда существует постоянная $C(K)$, такая, что выполнено неравенство:

$$\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C(K), \quad (8)$$

где при $1 < p; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, при $p = 1; q = \infty$.

Хорошо известно, что для самосопряженного расширения дифференциального оператора второго порядка неравенство (8) выполняется всегда. Вернемся к оператору четвертого порядка. Пусть сначала $\lambda < 0$. Оценим $\|u_n\|_{L_p(G)}$. Используем теорему, неравенство Минковского и оценки для функций $y_i(x)$. Получим:

$$\|u_n(x)\|_{L_p(G)} \leq C \mu_n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}; \quad p \geq 1$$

(здесь и далее считаем, что $\|u_n(x)\|_{L_2(G)} = 1$). Поэтому неравенство (8):

$$\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq \|u_n(x)\|_{L_p(G)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C_1 \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} = C_1$$

выполняется всегда. Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда, как следует из работы [6, с. 85–90], фундаментальная система решений для оператора (1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{i\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right); \quad y_2(x) = e^{-i\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right); \\ y_3(x) &= e^{-\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right); \quad y_4(x) = e^{\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right). \end{aligned}$$

Опять применяя теорему, неравенство Минковского и учитывая оценки норм этих функций в пространствах L_p , получим:

$$\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \leq C_0 (1 + \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} e^{-\varepsilon \mu_n}); \quad C_0 > 0, \quad \varepsilon > 0$$

(зависит от компакта F),

$$\|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C_1 (1 + \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}).$$

Следовательно, $\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C_2 \quad p \geq 2 \quad (q \leq 2)$.

Поэтому, при $p \geq 2$ и при $\lambda < 0$, и при $\lambda > 0$ неравенство (8) будет выполнено и, следовательно, система $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будет образовывать базис на компакте K в $L_p(K)$ при $p \geq 2$.

Заключение. Полученный результат можно распространить на самосопряженные расширения обыкновенных дифференциальных операторов порядка $2n$. Остался невыясненным вопрос, что будет, когда $1 \leq p < 2$. Повидимому, можно построить пример, показывающий, что в этом случае рассматриваемое условие может и не выполняться, но это пока не сделано.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений по системам экспонент // ДАН СССР. 1983. Т. 273. С. 789–793.
2. Ильин В.А., Йо И. Равномерная оценка собственных функций и оценка сверху числа собственных значений оператора Штурма-Лиувилля // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1113–1115.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Диф. ур. 1977. Т.13. № 2. С. 294–304.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 525 с.
5. Ломов И.С., Сучков М.В. О справедливости необходимого и достаточного условия базисности Ильина для обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов // Использование спектральной теории при решении задач математической физики. М.: МЭИ, 1984. С. 16–21.
6. Сучков М.В. О базисности системы собственных функций, отвечающих обыкновенному дифференциальному оператору четвертого порядка // Теоретико-функциональные методы в задачах математической физики. М.: Энергоатомиздат, 1986. С. 85–90.