РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 533.9.02

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-44-62

Латышев А. В., Юшканов А. А.

Московский государственный областной университет

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ТОК В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ ДВУМЯ ПОПЕРЕЧНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ

Аннотация. Рассматриваются бесстолкновительные классическая и квантовая плазма с произвольной степенью вырождения электронного газа. В плазме распространяются две коллинеарные электромагнитные волны. Требуется найти отклик плазмы на эти волны. Сначала рассматривается случай классической плазмы. Из уравнения Власова получена функция распределения в квадратичном приближении по малым параметрам задачи. Выведена формула для вычисления электрического тока. Затем из кинетического уравнения Вигнера для квантовой плазмы получена функция распределения также в квадратичном приближении. Выведена формула для вычисления электрического тока при произвольной температуре. Показано, что учет нелинейности приводит к появлению продольного электрического тока, направленного вдоль направления распространения волн. Рассмотрен случай малых значений волновых чисел. Этот продольный ток ортогонален известному поперечному току, получаемому при линейном анализе. Показано, что в случае малых значений волновых чисел продольный ток в квантовой плазме совпадает с продольным током в классической плазме.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Вигнера, классическая плазма, квантовая плазма, поперечный и продольный электрический ток, внешние электромагнитные поля.

A. Latyshev, A. Yushkanov
Moscow State Regional University

NON-LINEAR LONGITUDINAL CURRENT IN CLASSICAL AND QUANTUM PLASMAS, GENERATING BY TWO TRANSVERSAL ELECTROMAGNETIC WAVES

Abstract. Collisionless classical and quantum plasmas with an arbitrary degree of degeneration of the electronic gas are considered. In plasma two external collinear electromagnetic waves propagate. It is required to find the response of plasma to these waves. First, the case of classical plasma is considered. The distribution function in the quadratic approximation in the small parameters of the problem is obtained from the Vlasov equation. The formula for calculating the electric current is derived. Then, from the kinetic Wigner equation for quantum plasma we have also obtained the distribution function in the quadratic approximation. The formula for calculating the electric current at an arbitrary temperature is deduced. It is shown that the allowance for the nonlinearity leads to appearance of the longitudinal electric current along the wave propagation direction. This longitudinal current is orthogonal to the known transverse current obtained in the case of the linear analysis. The case of small values of the wave number is considered. It is shown that in the case of small values of the wave numbers, the longitudinal current in quantum plasma coincides with that in classical plasma.

Keywords: Vlasov equation, Wigner equation, classical plasma, quantum plasma, transversal and longitudinal electric current, external electromagnetic waves.

Введение

В настоящей работе с помощью нелинейного анализа выводятся формулы для вычисления электрического тока сначала в классической, а затем и в квантовой бесстолкновительной плазме Ферми-Дирака. При решении кинетических уравнений Власова и Вигнера, описывающих поведение плазмы, мы учитываем, как в разложении функции распределения, так и в разложении силы Лоренца и интеграла Вигнера величины, пропорциональные квадратам векторных потенциалов, составляющих внешнего электрического поля и произведению этих потенциалов.

При таком нелинейном подходе оказывается, что электрический ток имеет две ненулевые компоненты. Одна компонента электрического тока направлена вдоль векторных потенциалов составляющих электромагнитного поля. Эта компонента электрического тока точно такая же, как и в линейном анализе. Это «поперечный» ток. Таким образом, в линейном приближении мы получаем известное выражение поперечного электрического тока.

Вторая ненулевая компонента электрического тока имеет второй порядок малости относительно величин напряженностей составляющих электрического поля. Вторая компонента электрического тока направлена вдоль волнового вектора. Этот ток ортогонален первой компоненте. Это «продольный» ток. Появление продольного тока выявляется проведенным нелинейным анализом взаимодействия электромагнитных полей с плазмой.

Нелинейные эффекты в плазме изучаются уже длительное время [1–10]. В работе Л. Коврижных, В. Цытовича [2] нелинейный ток использовался, в частности, в вопросах вероятности распадных процессов. Отметим, что в этой работе указывается на существование нелинейного тока вдоль волнового вектора (см. формулу (2.9) [2]). В экспериментальной работе [3] выяснен вклад нормальной компоненты поля в нелинейный поверхностный ток в сигнале второй гармоники. В работах [4;5] изучалась генерация нелинейного поверхностного тока при взаимодействии лазерного импульса с металлом.

Квантовая плазма изучалась в работах [10–21]. Столкновительная квантовая плазма начала изучаться в работе Мермина [15]. Затем квантовая столкновительная плазма изучалась в наших работах [16–19]. Нами изучалась квантовая столкновительная плазма с переменной частотой столкновений. В работах [20] и [21] было исследовано генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме Ферми-Дирака [20] и в вырожденной плазме [21].

В настоящей работе выводятся формулы для вычисления электрического тока в квантовой бесстолкновительной плазме при произвольной температуре, то есть при произвольной степени вырождения электронного газа.

1. Уравнение Власова

Будем считать, что в плазме распространяются две электромагнитные волны с напряженностями $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$, $j = 1, 2$.

Предположим, что направления распространения волн коллинеарны, то есть $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$. Кроме того, будет рассмотрен случай, когда направления электрических (и магнитных) полей волн тоже коллинеарны $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_2$ ($\mathbf{H}_1 \parallel \mathbf{H}_2$). Электрические и магнитные напряженности связаны между собой через соответствующие векторные потенциалы:

$$\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{H}_j = \text{rot } \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2.$$

Возьмем уравнение Власова, описывающее поведение бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) f – функция распределения электронов плазмы, $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ ($j = 1, 2$) – компоненты электромагнитного поля, c – скорость света, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электронов, $\mathbf{v}$ – скорость электронов, функция распределения электронов Ферми-Дирака, $f^{(0)} = f_{eq}(\mathbf{r}, v)$ ($eq \equiv \text{equilibrium}$) – локально равновесное распределение Ферми-Дирака,

$$f_{eq}(\mathbf{r}, v) = \left[1 + \exp \left(\frac{\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r})}{k_B T} \right) \right]^{-1} = [1 + \exp(P^2 - \alpha(\mathbf{r}))]^{-1} = f_{eq}(\mathbf{r}, P),$$

$\mathcal{E} = mv^2/2$ – энергия электронов, μ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\mathbf{P} = \mathbf{p}/p_T$ – безразмерный импульс электронов, $p_T = mv_T$, v_T – тепловая скорость электронов, $v_T = \sqrt{2k_B T/m}$, $\alpha = \mu/(k_B T)$ – безразмерный химический потенциал, $k_B T = \mathcal{E}_T = mv_T^2/2$ – тепловая кинетическая энергия электронов.

Ниже нам понадобится абсолютное распределение Ферми-Дирака:

$$f_0(v) = \left[1 + \exp \left(\frac{\mathcal{E} - \mu}{k_B T} \right) \right]^{-1} = [1 + \exp(P^2 - \alpha)]^{-1} = f_0(P).$$

Будем считать, что векторный потенциал $\mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t)$ составляющей электромагнитного поля ортогонален соответствующему волновому вектору $\mathbf{k}_j$, т.е. $\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t) = 0, j = 1, 2$. Это значит, что волновой вектор $\mathbf{k}_j$ ортогонален соответствующей составляющей электрического и магнитного поля: $\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = 0, j = 1, 2$. Для определенности будем считать, что волновые векторы обеих электромагнитных волн направлены вдоль оси x , а составляющие электромагнитного поля направлены вдоль оси y , т.е. $\mathbf{k}_j = k_j(1, 0, 0)$, $\mathbf{E}_j = E_j(x, t)(0, 1, 0)$. Следовательно,

$$\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j, \mathbf{H}_j = \frac{ck_j}{\omega_j} E_j \cdot (0,0,1), [\mathbf{v}, \mathbf{H}_j] = \frac{ck_j}{\omega_j} E_j \cdot (v_y, -v_x, 0),$$

$$E_j = E_j(x, t) = E_{0j} e^{i(k_j x - \omega_j t)} \quad (j = 1, 2),$$

$$e \left(\mathbf{E}_j + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_j] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e}{\omega_j} E_j \left[k_j v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right],$$

а также:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}_j] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \text{так как} \quad \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \sim \mathbf{v}.$$

Уравнение (1.1) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right] = 0. \quad (1.2)$$

Будем искать решение уравнения (1.2) в виде:

$$f = f_0(P) + f_1 + f_2, \quad (1.3)$$

где

$$f_1 = E_1 \varphi_1 + E_2 \varphi_2, \quad (1.4)$$

$$f_2 = E_1^2 \psi_1 + E_2^2 \psi_2 + E_1 E_2 \psi_0. \quad (1.5)$$

2. Первое приближение

В задаче имеется четыре параметра размерности длины $\lambda_j = v_T / \omega_j$ и $l_j = 1/k_j$. Будем полагать, что как на длинах λ_j , так и на длинах l_j изменение энергии электрона под действием соответствующего электрического поля много меньше тепловой энергии электронов $k_B T$, т.е. будем считать малыми параметры $\alpha_j = |eE_j| v_T / (k_B T \omega)$ и $\beta_j = |eE_j| / (k_B T k)$. Будем действовать методом последовательных приближений, считая, что $\alpha_j \ll 1$, $\beta_j \ll 1$. Тогда уравнение (1.2) с помощью (1.3) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} = -e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right] \quad (2.1)$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_2}{\partial x} = -e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right]. \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) получаем:

$$[E_1(-i\omega_1 + ik_1 v_x) \varphi_1 + E_2(-i\omega_2 + ik_2 v_x) \varphi_2] =$$

$$= -e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right].$$

Введем безразмерные параметры $\Omega_j = \omega_j / k_T v_T$, $q_j = k_j / k_T$. Здесь q_j – безразмерное волновое число, $k_T = m v_T / \hbar$ – тепловое волновое число, Ω_j – безразмерная частота колебаний составляющей электромагнитного поля E_j .

В уравнении (2.3) перейдем к безразмерным параметрам. В результате получим уравнение:

$$i[E_1(q_1 P_x - \Omega_1)\varphi_1 + E_2(q_2 P_x - \Omega_2)\varphi_2] = -\frac{e}{k_T p_T v_T} \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\Omega_j} \left[q_j P_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega_j - q_j P_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \right].$$

Заметим, что $\frac{\partial f_0}{\partial P_x} \sim P_x$, $\frac{\partial f_0}{\partial P_y} \sim P_y$. Следовательно,

$$\left[q_j P_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega_j - q_j P_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \right] = \Omega_j \frac{\partial f_0}{\partial P_y},$$

и уравнение (2.4) упрощается:

$$i[E_1(q_1 P_x - \Omega_1)\varphi_1 + E_2(q_2 P_x - \Omega_2)\varphi_2] = -\frac{e}{k_T p_T v_T} (E_1 + E_2) \frac{\partial f_0}{\partial P_y}. \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) находим, что

$$\varphi_j = \frac{ie}{k_T p_T v_T} \cdot \frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_j P_x - \Omega_j}, \quad j = 1, 2. \quad (2.6)$$

Теперь из уравнения (2.6) находим, что

$$f_1 = \frac{ie}{k_T p_T v_T} \cdot \left[\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 P_x - \Omega_2} \right]. \quad (2.7)$$

3. Второе приближение

Перейдем ко второму приближению. В левую часть уравнения (2.2) подставим (1.5). Получим уравнение:

$$\begin{aligned} & E_1^2(-2i\omega_1 + 2ik_1 v_x)\psi_1 + E_2^2(-2i\omega_2 + 2ik_2 v_x)\psi_1 \\ & + E_1 E_2(-i(\omega_1 + \omega_2) + i(k_1 + k_2)v_x)\psi_0 = \\ & = -\frac{eE_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right] - \frac{eE_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_2 - k_2 v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right]. \end{aligned}$$

Перейдем в этом уравнении к безразмерным параметрам и введем обозначения $q = (q_1 + q_2)/2$, $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. Получим уравнение:

$$\begin{aligned} & E_1^2(q_1 P_x - \Omega_1)\psi_0 + E_2^2(q_2 - \Omega_2)\psi_2 + E_1 E_2(q P_x - \Omega)\psi_0 = \\ & = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2} \left\{ \frac{E_1^2}{\Omega_1} \left[q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \right. \\ & \quad + \frac{E_2^2}{\Omega_2} \left[q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \\ & \quad + \frac{E_1 E_2}{\Omega_1} \left[q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) + \frac{\Omega_1 - q_1 P_x}{q_2 P_x - \Omega_2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \\ & \quad \left. + \frac{E_1 E_2}{\Omega_2} \left[q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) + \frac{\Omega_2 - q_2 P_x}{q_1 P_x - \Omega_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из этого уравнения находим:

$$\psi_1 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega_1} \cdot \frac{\Xi_1(\mathbf{P})}{q_1 P_x - \Omega_1}, \quad (3.1)$$

$$\psi_2 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega_2} \cdot \frac{\Xi_2(\mathbf{P})}{q_2 P_x - \Omega_2}, \quad (3.2)$$

$$\psi_0 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2} \cdot \left[\frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \cdot \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} \right], \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_j(\mathbf{P}) &= q_j P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_j P_x - \Omega_j} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}, \\ \Xi_{12}(\mathbf{P}) &= q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) + \frac{\Omega_1 - q_1 P_x}{q_2 P_x - \Omega_2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}, \\ \Xi_{21}(\mathbf{P}) &= q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) + \frac{\Omega_2 - q_2 P_x}{q_1 P_x - \Omega_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}. \end{aligned}$$

Функция распределения во втором приближении по полю построена и определяется равенством (1.3), в котором функция f_1 определяется равенством (1.4), а функция f_2 определяется равенствами (1.5) и (3.1) – (3.3).

4. Плотность поперечного электрического тока

Найдем плотность электрического тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^3 v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int f \mathbf{P} d^3 P. \quad (4.1)$$

Из равенств (1.3) – (1.5) и (4.1) видно, что вектор плотности тока имеет две ненулевые компоненты $\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$. Здесь j_y – плотность поперечного тока, j_x – плотность продольного тока,

$$j_y = e \int v_y f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = e \int v_y f_1 \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^3 v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 P_y d^3P,$$

$$j_x = e \int v_x f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = e \int v_x f_2 \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^3 v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 P_x d^3P.$$

В явном виде поперечный ток равен:

$$j_y = \frac{2ie^2 p_T^3}{(2\pi\hbar)^2 k_T p_T} \int \left(\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} P_y d^3P.$$

Этот ток направлен вдоль электромагнитного поля, его плотность определяется только первым приближением функции распределения. Второе приближение функции распределения вклада в плотность поперечного тока не вносит. Упростим последнюю формулу. Тогда получаем, что:

$$j_x = -\frac{2\pi i e^2 p_T^2}{(2\pi\hbar)^3 k_T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) \ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x. \quad (4.2)$$

5. Плотность продольного электрического тока

Перейдем к исследованию продольного тока. С помощью разложения (1.5) представим продольный ток в виде трех слагаемых: $j_x = j_1 + j_2 + j_3$. Здесь

$$j_j = E_j^2 \frac{2ep_T v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int P_x \psi_j d^3P, \quad j_2 = E_2^2 \frac{2ep_T v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int P_x \psi_2 d^3P.$$

Представим составляющие продольного тока равенствами в явном виде:

$$j_j = -\frac{e^3 p_T E_j^2}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_j} \int \frac{\Xi_j(\mathbf{P}) P_x d^3P}{q_j P_x - \Omega_j},$$

$$j_0 = -\frac{e^3 p_T E_1 E_2}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} \int \left[\frac{1}{\Omega_1} \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} \right] P_x d^3P.$$

Заметим, что в этих выражениях одномерный внутренний интеграл по P_y равен нулю, а внутренние интегралы по P_x вычисляются по частям. Следовательно, предыдущие равенства для составляющих продольного тока упрощаются. Затем внутренний интеграл по переменной P_y проинтегрируем снова по частям. После этого внутренние интегралы в плоскости (P_y, P_z) вычислим в полярных координатах. В результате предыдущие равенства сводятся к одномерному интегралу:

$$j_j = \frac{\pi e^3 E_j^2 p_T q_j}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_j P_x - \Omega_j)^3},$$

$$j_0 = j_{12} + j_{21},$$

$$j_{12} = \frac{\pi e^3 E_1 E_2 p_T q_1 \Omega}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_2 P_x - \Omega_2)(q_1 P_x - \Omega)^2},$$

$$j_{21} = \frac{\pi e^3 E_1 E_2 p_T q_2 \Omega}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_1 P_x - \Omega_1)(q_2 P_x - \Omega)^2}.$$

Найдем числовую плотность (концентрацию) частиц плазмы, отвечающую распределению Ферми-Дирака

$$N = \int f_0(P) \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha - P^2} P^2 dP}{1 + e^{\alpha - P^2}} = \frac{k_T^3}{2\pi^2} l_0(\alpha),$$

где $l_0(\alpha) = \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau$.

В выражении перед интегралами выделим плазменную (ленгмюровскую) частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ и числовую плотность (концентрацию) N , причем последнюю выразим через тепловое волновое число. Получим:

$$\frac{\pi p_T e^3 q_j}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} = \frac{e\Omega_p^2}{p_T k_T} \cdot \frac{k_j}{16\pi l_0(\alpha)} = \sigma_{l,tr} \cdot \frac{k_j}{16\pi l_0(\alpha)}.$$

Здесь $\Omega_p = \omega_p/k_T v_T = \hbar\omega_p/mv_T^2$ – безразмерная плазменная частота, $\sigma_{l,tr}$ – продольно-поперечная проводимость, $\sigma_{l,tr} = e\Omega_p^2/p_T k_T$. Теперь составляющие продольного тока записываются в виде:

$$j_j = E_j^2 \sigma_{l,tr} k_j J_j, \quad j_0 = E_1 E_2 \sigma_{l,tr} (k_1 J_{12} + k_2 J_{21}), \quad (5.1)$$

где

$$J_j = \frac{1}{16\pi l_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_j P_x - \Omega_j)^3},$$

$$J_{12} = \frac{\Omega}{16\pi l_0(\alpha) \Omega_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_2 P_x - \Omega_2)(q_1 P_x - \Omega)^2},$$

$$J_{21} = \frac{\Omega}{16\pi l_0(\alpha) \Omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_1 P_x - \Omega_1)(q_2 P_x - \Omega)^2}.$$

В равенствах (5.1) величины J_1, J_2, J_{12}, J_{21} – безразмерные части плотности продольного тока.

Таким образом, продольная часть тока окончательно равна:

$$j_x = \sigma_{l, tr} [E_1^2 k_1 J_1 + E_2^2 k_2 J_2 + E_1 E_2 (k_1 J_{12} + k_2 J_{21})]. \quad (5.2)$$

Если ввести поперечные поля $\mathbf{E}_j^{\text{tr}} = \mathbf{E}_j - \mathbf{k}_j(\mathbf{E}_j \mathbf{k}_j)/k_j^2$, то равенство (5.2) можно записать в инвариантной форме:

$$j_{\text{long}} = \sigma_{l, tr} [(\mathbf{E}_1^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_1 J_1 + (\mathbf{E}_2^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_2 J_2 + \mathbf{E}_1^{\text{tr}} \mathbf{E}_2^{\text{tr}} (\mathbf{k}_1 J_{12} + \mathbf{k}_2 J_{21})].$$

Перейдем к рассмотрению случая малых значений волнового числа. Из (5.2) вытекает, что при малых значениях волновых чисел для плотности продольного тока получаем:

$$j_x = -\frac{\sigma_{l, tr}}{8\pi} \left[E_1^2 \frac{k_1}{\Omega_1^3} + E_2^2 \frac{k_2}{\Omega_2^3} + 2E_1 E_2 \frac{k_1 + k_2}{\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)} \right]. \quad (5.3)$$

Замечание 1. При вычислении интегралов, входящих в безразмерные части плотности продольного тока, следует воспользоваться известным правилом Ландау. Согласно правилу Ландау, например, для интегралов J_1 и J_2 имеем:

$$J_j = \frac{1}{16\pi l_0(\alpha)} \left[-i \frac{\pi}{2q_j^3} [\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})]''_{r=\Omega_j/q_j} + \text{в.р.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau}{(q_j \tau - \Omega_j)^3} \right].$$

6. Уравнение Вигнера

Покажем, что в случае квантовой плазмы, описываемой кинетическим уравнением Вигнера, также генерируется продольный ток, и вычислим его плотность. Будем считать, что, как и в случае классической плазмы, квантовая плазма находится во внешнем электромагнитном поле. Векторные потенциалы составляющих поля представляют собой бегущие гармонические волны: $\mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$ ($j = 1, 2$). Соответствующие составляющие электрического и магнитного поля $\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$ и $\mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$ ($j = 1, 2$) связаны с векторными потенциалами равенствами $\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j$, $\mathbf{H}_j = \text{rot } \mathbf{A}_j$, $j = 1, 2$. Будем также считать, что векторный потенциал электромагнитного поля ортогонален волновому вектору.

Для определенности будем считать, что волновые векторы составляющих поля направлены вдоль оси x , а электромагнитные поля направлены вдоль оси y , т.е.

$$\mathbf{k}_j = k_j(1, 0, 0), \quad \mathbf{E}_j = E_j(x, t)(0, 1, 0), \quad E_j(x, t) = E_{0j} e^{i(k_j x - \omega_j t)}.$$

Возьмем уравнение Вигнера, описывающее поведение квантовой бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + W[f] = 0 \quad (6.1)$$

с нелинейным интегралом Вигнера:

$$\begin{aligned} W[f] = & \mathbf{p} \sum_{j=1}^2 \frac{ie\mathbf{A}_j}{mc\hbar} \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \frac{\mathbf{k}_j}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \frac{\mathbf{k}_j}{2}, t\right) \right] - \\ & - \frac{ie^2}{2mc^2\hbar} \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_j^2 [f(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}_j, t)] - \\ & - \frac{2ie^2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{2mc^2\hbar} \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t\right) \right]. \end{aligned}$$

Этот интеграл Вигнера построен по аналогии с интегралом Вигнера, выведенным в работе [10] с использованием одного векторного потенциала. В уравнении (6.1) f – аналог квантовой функции распределения электронов плазмы (так называемая функция Вигнера), c – скорость света, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электронов, $\mathbf{v}$ – скорость электронов.

Ниже нам понадобится локально равновесное распределение Ферми-Дирака, $f^{(0)} = f_{eq}(\mathbf{r}, t)$ (eq= equilibrium), $f^{(0)} = \left[1 + \exp \frac{\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r})}{k_B T}\right]^{-1}$, где $\mathcal{E} = mv^2/2$ – энергия электронов, $\mu(\mathbf{r})$ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\alpha = \mu(\mathbf{r})/k_B T$ – безразмерный химический потенциал, v_T – тепловая скорость электронов, $v_T = \sqrt{2k_B T/m}$, $k_B T = \mathcal{E}_T = mv_T^2/2$ – тепловая кинетическая энергия электронов.

В квантовой плазме скорость электронов связана с его импульсом и векторными потенциалами составляющих электромагнитного поля равенством $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{e(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)}{cm}$. Введем безразмерный импульс электронов $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{p_T}$, $p_T = mv_T$ и абсолютное распределение Ферми-Дирака $f_0(P) = 1/(1 + e^{P^2 - \alpha})$. В уравнении (6.1) и в интеграле Вигнера перейдем к безразмерному импульсу. Получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_T \mathbf{P} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{iev_T}{c\hbar} \mathbf{P} \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_j [f(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \mathbf{q}_j/2, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \mathbf{q}_j/2, t)] - \\ - \frac{2ie^2}{2mc^2\hbar} \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_j [f(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \mathbf{q}_j, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \mathbf{q}_j, t)] - \\ - \frac{2ie^2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{2mc^2\hbar} \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}, t\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $\mathbf{q}_j$ – безразмерные волновые числа, $\mathbf{q}_j = \mathbf{k}_j / \mathbf{k}_T$, $\mathbf{k}_T$ – тепловое волновое число, $\mathbf{k}_T = m v_T / \hbar$.

Будем искать решение уравнения (6.2) в виде:

$$f = f_0(P) + f_1 + f_2, \quad (6.3)$$

где

$$f_1 = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2, \quad (6.4)$$

$$f_2 = A_1^2 \psi_1 + A_2^2 \psi_2 + A_1 A_2 \psi_0. \quad (6.5)$$

Будем действовать методом последовательных приближений, считая малыми параметры, введенные ранее в случае классической плазмы, т.е. что $\alpha_j \ll 1$, $\beta_j \ll 1$. В первом приближении ищем решение уравнения Вигнера (6.2) в виде $f = f^{(1)} = f_0(P) + f_1$, где f_1 определяется согласно (6.4). Из уравнения (6.2) получаем, что:

$$f_1 = -\frac{e}{c \hbar k_T} \sum_{j=1}^2 \mathbf{P} \mathbf{A}_j \frac{f_F\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right) - f_F\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right)}{\mathbf{q}_j \mathbf{P}_j - \Omega_j}. \quad (6.6)$$

Здесь $\Omega_j = \omega_j / (v_T k_T)$ – безразмерная частота колебаний составляющей поля $\mathbf{E}_j$.

Во втором приближении ищем решение уравнения Вигнера (6.2) в виде (6.3), в котором f_1 вычисляется согласно (7.1), а f_2 определяется равенством (6.5). Уравнение (6.2) распадается на три уравнения. Из полученных уравнений находим составляющие слагаемые равенства (6.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \psi_0 = & \frac{e^2}{2c^2 p_T^2} (\mathbf{P} \mathbf{A}_1) (\mathbf{P} \mathbf{A}_2) \left[\frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_2 - \Omega_2 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} - \right. \\ & - \frac{f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_2 - \Omega_2 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} + \\ & + \frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_1 - \Omega_1 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} - \\ & \left. - \frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_1 - \Omega_1 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} \right] \frac{1}{\mathbf{P} \mathbf{q} - \Omega} + \\ & + \frac{e^2 A_1 A_2}{2c^2 p_T^2} \frac{f_0(\mathbf{P} + \mathbf{q}) - f_0(\mathbf{P} - \mathbf{q})}{\mathbf{P} \mathbf{q} - \Omega} \end{aligned}$$

и

$$A_j^2 \psi_j = \frac{e^2}{2c^2 p_T^2} \left[(\mathbf{P} \mathbf{A}_j)^2 \frac{f_0(\mathbf{P} + \mathbf{q}_j) - f_0(\mathbf{P} - \mathbf{q}_j)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_j - \Omega + \mathbf{q}_j^2/2} + \right. \\ \left. + \frac{A_j^2}{2} (f_0(\mathbf{P} + \mathbf{q}_j) - f_0(\mathbf{P} - \mathbf{q}_j)) \right] \frac{1}{\mathbf{P} \mathbf{q}_j - \Omega_j}, \quad j = 1, 2.$$

Здесь

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}, \quad \Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}.$$

Таким образом, решение уравнения Вигнера построено и во втором приближении. Оно определяется равенствами (6.3) – (6.6), в которых функции ψ_j ($j = 1, 2$) и ψ_0 определяются двумя последними равенствами.

7. Электрический ток в квантовой плазме

Плотность электрического тока, согласно его определению, равна:

$$\mathbf{j} = e \int f \mathbf{v} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

В работе [10] показано, что в нулевом приближении электрический ток в квантовой плазме равен нулю:

$$j^{(0)} = e \int f_0(P) \mathbf{v} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 0.$$

Поэтому плотность электрического тока в квантовой плазме равна:

$$\mathbf{j} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int (f_1 + f_2) \left[\mathbf{P} - \frac{e(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)}{mcv_T} \right] d^3 P.$$

Это равенство можно представить в виде:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{linear}} + \mathbf{j}^{\text{quadr}}.$$

Здесь

$$\mathbf{j}^{\text{linear}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 \mathbf{P} d^3 P$$

означает часть электрического тока, получаемую в результате линейного анализа с использованием первого приближения функции распределения, а

$$\mathbf{j}^{\text{quadr}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \left[f_2 \mathbf{P} - \frac{e(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)}{mcv_T} f_1 \right] d^3 P$$

означает часть электрического тока, получаемую в результате нелинейного анализа с использованием второго, квадратичного разложения функции распределения.

Итак, электрический ток в квантовой плазме есть сумма двух слагаемых, линейного и квадратичного. Линейное слагаемое есть плотность тока, направленного вдоль векторного потенциала электромагнитного поля (т.е. вдоль вектора напряженности поля). Оно состоит из членов, пропорциональных первой степени векторных потенциалов. Квадратичное слагаемое есть плотность тока, ортогонального линейной плотности тока. Оно направлено вдоль волнового вектора. Квадратичное слагаемое состоит из членов, пропорциональных квадрату векторных потенциалов тока и их произведению.

Представим линейную часть плотности тока в явном виде:

$$\mathbf{j}^{\text{linear}} = - \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3 c \hbar k_T} \sum_{j=1}^2 \int \mathbf{P} (\mathbf{P} \mathbf{A}_j) \frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_j - \Omega_j} d^3 P.$$

Это векторное выражение имеет одну ненулевую компоненту:

$$\mathbf{j}^{\text{linear}} = j_y(0,1,0),$$

где

$$j_y = - \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3 c \hbar k_T} \times \\ \times \sum_{j=1}^2 A_j \int \frac{f_0\left(P_x + \frac{q_j}{2}, P_y, P_z\right) - f_0\left(P_x - \frac{q_j}{2}, P_y, P_z\right)}{P_x q_j - \Omega_j} P_y^2 d^3 P.$$

Здесь введено обозначение:

$$f_0\left(P_x \pm \frac{q_j}{2}, P_y, P_z\right) = \left[1 + \exp\left((P_x \pm \frac{q_j}{2})^2 + P_y^2 + P_z^2\right)\right]^{-1}.$$

Заметим, что интеграл от второго слагаемого в выражении для $\mathbf{j}^{\text{quadr}}$ равен нулю. Поэтому продольный ток в квантовой плазме, генерируемый двумя электромагнитными волнами, равен:

$$\mathbf{j}^{\text{quadr}} = \mathbf{j}^{\text{long}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 \mathbf{P} d^3 P.$$

Таким образом, продольный ток определяется только вторым приближением функции распределения.

Векторное равенство для $\mathbf{j}^{\text{quadr}}$ имеет только одну ненулевую компоненту: $\mathbf{j}^{\text{quadr}} = j_x(1,0,0)$, где

$$j_x = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 P_x d^3 P.$$

Продольный ток представим в виде суммы трех слагаемых:

$$j_x = j_1 + j_2 + j_0. \quad (7.1)$$

Здесь

$$j_l = A_l^2 \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \psi_l P_x d^3P, \quad l = 1, 2, \quad (7.2)$$

$$j_0 = A_1 A_2 \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \psi_0 P_x d^3P. \quad (7.3)$$

Из трех последних равенств (7.2) и (7.3) вытекает, что продольный ток представляет собой сумму трех токов. Первые два тока j_1 и j_2 генерируются соответствующими векторными потенциалами составляющих электромагнитного поля. Их величины пропорциональны квадратам этих векторных потенциалов. Третий ток j_0 , который назовем перекрестным, генерируется взаимодействием электромагнитных волн и пропорционален произведению величин векторных потенциалов.

Представим в явном виде формулы (7.2) для первых двух токов:

$$j_l = A_l^2 \frac{e^3 v_T p_T}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \int \left[\left(\frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P)}{q_j P_x - \Omega_j + q_j^2/2} - \frac{f_0(P) - f_0(P_x - q_j)}{q_j P_x - \Omega_j - q_j^2/2} \right) P_y^2 + \frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P_x - q_j)}{2} \right] \frac{P_x d^3P}{q_j P_x - \Omega_j}.$$

Здесь

$$f_0(P_x \pm q_j) = [1 + \exp((P_x \pm q_j)^2 + P_y^2 + P_z^2)]^{-1}.$$

Преобразуем выражение, стоящее перед интегралом в предыдущей формуле. Для этого воспользуемся связью между концентрацией (числовой плотностью), тепловым волновым числом и химическим потенциалом:

$$N = \frac{k_T^3 l_0(\alpha)}{2\pi^2}, \quad l_0(\alpha) = \int_0^\infty \ln(1 + e^{\alpha - u^2}) du.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} C &= A_l^2 \frac{e^3 v_T p_T}{(2\pi\hbar)^3 c^2} = A_l^2 \frac{2\pi^2 e^3 v_T N}{8\pi^3 c^2 p_T^2 l_0(\alpha)} = -E_l^2 \frac{e \omega_p^2}{16\pi^2 p_T l_0(\alpha) \omega_l} = \\ &= -E_l^2 \frac{e \Omega_p^2}{16\pi^2 p_T l_0(\alpha) \Omega_l}. \end{aligned}$$

Здесь введена безразмерная плазменная частота $\Omega_p = \frac{\omega_p}{v_T k_T}$.

Если ввести продольно-поперечную проводимость $\sigma_{l,tr}$,

$$\sigma_{l,tr} = \frac{e\hbar}{p_T^2} \left(\frac{\hbar\omega_p}{mv_T^2} \right)^2 = \frac{e}{k_T p_T} \left(\frac{\omega_p}{k_T v_T} \right)^2 = \frac{e\Omega_p^2}{k_T p_T},$$

то константа C равна:

$$C = -\frac{E_j^2 k_T \sigma_{l,tr}}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_1 \Omega_2} = -\frac{E_j^2 k_j \sigma_{l,tr}}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_j^2 q_j}, \quad j = 1, 2.$$

Теперь формула для токов j_1 и j_2 может быть представлена как

$$j_m = J_m \sigma_{l,tr} k_m E_m^2, \quad m = 1, 2. \quad (7.4)$$

Здесь J_m – безразмерная плотность тока,

$$J_m = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_j q_j} \times \\ \times \int \left[\left(\frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P)}{q_j P_x - \Omega_j + \frac{q_j^2}{2}} - \frac{f_0(P) - f_0(P_x - q_j)}{q_j P_x - \Omega_j - \frac{q_j^2}{2}} \right) P_y^2 + \right. \\ \left. + \frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P_x - q_j)}{2} \right] \frac{P_x d^3 P}{q_j P_x - \Omega_j}.$$

После длительных преобразований эти интегралы можно свести к одномерным интегралам:

$$J_m = -\frac{1}{16\pi l_0(\alpha) \Omega_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{L(\tau)}{(q_j \tau - \Omega_j) \left[(q_j \tau - \Omega_j)^2 - \frac{q_j^4}{4} \right]} + \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(q_j \tau - \Omega_j)^2 - q_j^4} \right] d\tau.$$

Формулу (7.3) для перекрестного тока представим в виде:

$$j_0 = J_0 \sigma_{l,tr} E_1 E_2 (k_1 + k_2), \quad (7.5)$$

где J_0 – безразмерная часть перекрестного тока, $J_0 = J_1^+ - J_1^- + J_2^+ - J_2^- + J_3$.

Здесь

$$J_1^{\pm} = \int \frac{f_0(P_x + q^{\pm}) - f_0(P_x - q^{\mp})}{q_1 P_x - \Omega_1 \pm q_1 q_2 / 2} \frac{P_y^2 P_x d^3 P}{q P_x - \Omega}, \\ J_2^{\pm} = \int \frac{f_0(P_x \pm q^{\pm}) - f_0(P_x \pm q^{\mp})}{q_2 P_x - \Omega_2 \pm q_1 q_2 / 2} \frac{P_y^2 P_x d^3 P}{q P_x - \Omega}, \\ J_3 = \int \frac{f_0(P_x + q) - f_0(P_x - q)}{q P_x - \Omega} P_x d^3 P,$$

а также введены обозначения $q^\pm = (q_1 \pm q_2)/2$, $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$.

После длительных преобразований предыдущие интегралы можно свести к одномерным интегралам:

$$J_1^\pm = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_1(\tau, q^\pm)}{q_1 \tau - \Omega_1 \pm q_1 q_2/2} \frac{\tau d\tau}{q\tau - \Omega},$$

$$J_2^\pm = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_2(\tau, q^\pm)}{q_2 \tau - \Omega_2 \pm q_1 q_2/2} \frac{\tau d\tau}{q\tau - \Omega},$$

$$J_3 = 2\pi q \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - u^2}) du}{(qu - \Omega)^2 - q^4}.$$

В этих интегралах

$$l_1(\tau, q^\pm) = \int_0^\infty \rho \ln \left(\frac{1 + e^{\alpha - (\tau + q^\pm)^2 - \rho^2}}{1 + e^{\alpha - (\tau - q^\pm)^2 - \rho^2}} \right) d\rho,$$

$$l_2(\tau, q^\pm) = \int_0^\infty \rho \ln \left(\frac{1 + e^{\alpha - (\tau \pm q^\pm)^2 - \rho^2}}{1 + e^{\alpha - (\tau \mp q^\pm)^2 - \rho^2}} \right) d\rho.$$

Таким образом, продольный ток (7.1) окончательно равен:

$$j_x = \sigma_{l, tr} [E_1^2 k_1 J_1 + E_2^2 k_2 J_2 + E_1 E_2 (k_1 + k_2) J_0]. \quad (7.6)$$

Если ввести поперечные составляющие электромагнитного поля:

$$\mathbf{E}_j^{\text{tr}} = \mathbf{E}_j - \frac{\mathbf{k}_j(\mathbf{E}_j \mathbf{k}_j)}{k_j^2} = \mathbf{E}_j - \frac{\mathbf{q}_j(\mathbf{E}_j \mathbf{q}_j)}{q_j^2},$$

то равенство (7.6) можно записать в инвариантной форме:

$$\mathbf{j}^{\text{long}} = \sigma_{l, tr} [(\mathbf{E}_1^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_1 J_1 + (\mathbf{E}_2^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_2 J_2 + \mathbf{E}_1^{\text{tr}} \mathbf{E}_2^{\text{tr}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) J_0]. \quad (7.7)$$

В случае малых значений волновых чисел величины токов, пропорциональных квадратам напряженностей электрических полей, фактически вычислены в нашей работе [20]:

$$j_m = -\frac{\sigma_{l, tr}}{8\pi\Omega_m^3} k_m E_m^2, \quad q_m \rightarrow 0 \quad (m = 1, 2).$$

Опуская вычисления, сообщим без вывода, что при малых значениях волновых чисел для плотности перекрестного тока получаем:

$$j_0 = -\frac{\sigma_{l, tr} E_1 E_2 (k_1 + k_2)}{4\pi\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)}, \quad q_1, q_2 \rightarrow 0.$$

Из двух последних полученных выражений вытекает, что при малых значениях волновых чисел для плотности продольного тока получаем:

$$\mathbf{j}^{\text{long}} = -\frac{\sigma_{l, \text{tr}}}{8\pi} \left[(\mathbf{E}_1^{\text{tr}})^2 \frac{\mathbf{k}_1}{\Omega_1^3} + (\mathbf{E}_2^{\text{tr}})^2 \frac{\mathbf{k}_2}{\Omega_2^3} + 2 \frac{\mathbf{E}_1^{\text{tr}} \mathbf{E}_2^{\text{tr}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)} \right], q_1, q_2 \rightarrow 0.$$

Эта формула в точности совпадает с формулой (5.3) для классической плазмы. Это означает, что при малых значениях волновых чисел величина плотности продольного тока в классической и квантовой плазме совпадает.

Замечание 2. При вычислении сингулярных интегралов, входящих в безразмерные части плотности продольного тока, следует воспользоваться известным правилом Ландау.

Заключение

В настоящей работе решена следующая задача: в квантовой плазме с произвольной степенью вырождения электронного газа, распространяются две электромагнитные волны с коллинеарными волновыми векторами. Уравнение Вигнера решается методом последовательных приближений. Используется квадратичное разложение функции распределения. Оказалось, что учет нелинейности задачи обнаруживает генерирование электрического тока, ортогонального к направлению электрического поля (т.е. направлению известного классического поперечного электрического тока). Найдена величина поперечного и продольного электрических токов. Рассмотрен случай малых значений волновых чисел. Оказалось, что величина продольного тока в классической и квантовой плазме совпадает в случае малых значений волновых чисел.

В дальнейшем авторы намерены рассмотреть задачи о колебаниях плазмы и о скин-эффекте с использованием квадратичного по потенциалу разложения функции распределения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. V. Ginsburg, A. Gurevich. The non-linear phenomena in the plasma which is in the variable electromagnetic field // Uspekhy Fiz. Nauk, 70(2) 1960. P. 201–246 (in Russian).
2. L. Kovrizhnykh, V. Tsytovich. Effects of transverse electromagnetic wave decay in a plasma // Soviet physics JETP. 1965. V. 20. No. 4. P. 978–983.
3. N. Akhmediev, I. Mel'nikov, L. Robur. Second-Harmonic Generation by a Reflecting Metal Surface // Laser Physics. Vol. 4. No. 6. 1994. P. 1194–1197.
4. Бежанов С.Г., Урюпин С.А. Генерация нелинейных токов и низкочастотного излучения при взаимодействии лазерного импульса с металлом // Квант. электроника, 43:11 (2013). С. 1048–1054.
5. Урюпин С.А., Бежанов С.Г. Генерация второй гармоники и тока увлечения быстро греющей металл s-поляризованной волной // Квант. электроника, 40:1 (2010). С. 51–58.

6. V. Zytovich. Nonlinear effects in plasmas // *Uspekhy Fiz. Nauk.* 90(3). 1966. P. 435–489 (in Russian).
7. V. Zytovich. Nonlinear effects in plasmas. Moscow. Publ. Leland. 2014. 287 p. (in Russian).
8. P. Shukla, B. Eliasson. Nonlinear aspects of quantum plasma physics // *Uspekhy Fiz. Nauk*, 53(1) 2010. [V. 180. No. 1. P. 55–82 (2010) (in Russian)].
9. P. Shukla, B. Eliasson. Dispersion properties of electrostatic oscillations in quantum plasmas // *arXiv:0911.4594v1 [physics.plasm-ph]* 24 Nov 2009.
10. Latyshev A., Yushkanov A. Transverse Electric Conductivity in Collisional Quantum Plasma // *Plasma Physics Report.* 2012. Vol. 38. No. 11. P. 899–908.
11. De Andres P., Monreal R., Flores F. Relaxation-time effects in the transverse dielectric function and the electromagnetic properties of metallic surfaces and small particles // *Phys. Rev. B.* 1986. Vol. 34. No. 10. P. 7365–7366.
12. Fuchs R., Kliever K. Surface plasmon in a semi-infinite free-electron gas // *Phys. Rev. B.* 1971. V. 3. No 7. P. 2270–2278.
13. Brodin G., Marklund M., Manfredi G. Quantum Plasma Effects in the Classical Regime // *Phys. Rev. Letters.* 100, (2008). P. 175001-1-175001-4.
14. Manfredi G. How to model quantum plasmas // *arXiv: quant-ph/0505004.*
15. Mermin N. Lindhard Dielectric Functions in the Relaxation-Time Approximation // *Phys. Rev. B.* 1970. V. 1. No. 5. P. 2362–2363.
16. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Transverse electrical conductivity of a quantum collisional plasma in the Mermin approach // *Theor. and Math. Phys.* 175(1): P. 559–569 (2013).
17. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Longitudinal Dielectric Permeability of a Quantum Degenerate Plasma with a Constant Collision Frequency // *High Temperature.* 2014. Vol. 52. No 1. P. 128–128.
18. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Longitudinal electric conductivity in a quantum plasma with a variable collision frequency in the framework of the Mermin approach // *Theor. and Mathem. Physics* 178(1): 131–142 (2014).
19. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Transverse Permittivity of Quantum Collisional Plasma with an Arbitrary Collision Frequency // *Plasma Physics Reports.* 2014. Vol. 40. No. 7. P. 564–571.
20. Латышев А.В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме // *Физика плазмы.* 2015. Т. 41. № 9. С. 778–787.
21. Латышев А.В., Юшканов А.А. Нелинейный продольный ток в максвелловской плазме, возникающий под действием поперечной электромагнитной волны // *Известия РАН. Сер. МЖГ.* 2015. № 6. С. 139–156.