УДК 538.945

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-83-91

Алиев И.Н., Меликянц Д.Г.*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

О ТЕОРЕМАХ ПОЙНТИНГА И АБРАГАМА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ЛОНДОНОВ *

Аннотация: Как сейчас хорошо известно, последовательная теория явления сверхпроводимости должна быть квантовой, однако феноменологическая электродинамика сверхпроводников может быть построена на базе классических представлений, причем, несмотря на крупные успехи в объяснении явления сверхпроводимости, элементарная классическая теория требует существенных уточнений и усовершенствований. С учетом сказанного важно вновь проанализировать базовые законы электродинамики жидкости сверхпроводящих электронов. В настоящей работе выведены в системе СИ теоремы Пойнтинга (закон сохранения энергии) и Абрагама (закон сохранения импульса). Показано, что объемная плотность механического импульса жидкости сверхпроводящих электронов в непосредственном виде не входит в конечный результат. Она учитывается через тензор напряжений электронной жидкости. Заметим, что также учтен чисто конвективный поток импульса, который втекает внутрь объема вместе с электронной жидкостью.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, уравнения Лондонов, сверхпроводящие электроны, плотность потока энергии, тензор электромагнитных напряжений, электромагнитный механический импульс, тензор напряжений жидкости.

I. Aliev, D. Melikyants*Bauman Moscow State Technical University*

POYNTING AND ABRAHAM THEOREMS IN THE ELECTRODYNAMICS OF LONDON SUPERCONDUCTORS

Abstract. As is now well known, a consistent theory of superconductivity should be quantum; however, the phenomenological electrodynamics of superconductors can be built on the basis of classical concepts and, despite major successes in explaining the phenomenon of superconductivity, elementary classical theory requires significant refinements and

© И.Н. Алиев, Д. Меликянц, 2015.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (Проект №3.1526.2014/К).

improvements. With the above-said taken into account, it is important to re-examine the basic laws of electrodynamics of fluids of superconducting electrons. Using the SI system, the Poynting theorem (the energy conservation law) and Abraham theorem (the law of conservation of momentum) are derived. It is shown that the bulk density of the mechanical momentum of the fluid of superconducting electrons in the direct form is not included in the final result. It is taken into account by using the electronic stress tensor of the fluid. Note that a purely convective momentum flux, which flows inside the volume together with the e-liquid, is considered.

Keywords: *Maxwell's equations, London equations, superconducting electrons, energy flux density, stress tensor of electromagnetic, electromagnetic and mechanical momentum, stress tensor of the fluid.*

Рассмотрим, как выглядят теоремы сохранения энергии и импульса в классической теории сверхпроводимости. За основу мы возьмем уравнения Максвелла. Классическая электродинамика сверхпроводников совершенно необычна и своеобразна, если ее сравнивать с классической электродинамикой нормальных, несверхпроводящих материалов. Вместе с тем, следует подчеркнуть, что все равно и для сверхпроводников выполняются фундаментальные законы электродинамики, то есть справедливы общие уравнения Максвелла. Конечно, можно было бы сомневаться в применимости этих уравнений к сверхпроводникам. Однако, как показало все развитие теории сверхпроводимости, можно с определенностью сказать, что общие уравнения Максвелла справедливы и для сверхпроводников. Представляется поистине удивительным, что эти замечательные уравнения обладают столь универсальной применимостью буквально ко всем физическим явлениям окружающей природы. Они абсолютны и строги всегда. Хотя мы до конца не понимаем еще заложенный в них глубокий смысл. Пока что, оказывается, вообще невозможно добавить к ним никаких поправочных членов. Можно изменять только материальные соотношения, характеризующие различные среды. Как известно, их три:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

причем последнее выражает закон Ома (σ - проводимость), который в случае сверхпроводников не работает. Поэтому обычную систему уравнений Максвелла замыкают на уравнения Лондонов и получают полную систему уравнений классической теории сверхпроводимости. Указанный подход в

настоящее время считается общепринятым, несмотря на существенные несообразности, о которых шла речь в разобранный ранее работе [1].

1. Посмотрим, как выглядит закон сохранения энергии в электродинамике Лондонов. Для этого рассмотрим первую пару уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Под $\vec{j}$ здесь понимается плотность тока сверхпроводящих электронов. Для получения простых в физическом понимании соотношений примем, что выполняются первые два соотношения (1), причем, не вникая подробно в значения проницаемостей, считаем, что рассматриваемая структура однородна (диамагнетизм сверхпроводников общеизвестен). Рассматриваемое допущение само по себе является достаточно сильным, однако общепринятым. Тогда система приобретает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Здесь $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}$ – скорость распространения электромагнитных волн в

среде. Далее, по стандартной процедуре, умножаем первое уравнение на $\vec{B}$, второе – на $\vec{E}$ и вычтем из одного уравнения другое. После несложных преобразований получаем соотношение:

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -(\vec{j}, \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}\vec{H}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} \right),$$

представляющее собой, по существу, теорему Пойнтинга. Так как рассматриваемая среда сверхпроводящая, воспользуемся уравнениями

Лондонов. Из первого из них имеем: $\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \vec{j})$, где $\Lambda = \frac{m}{e^2 n}$ (n –

концентрация сверхпроводящих электронов) – так называемая постоянная Лондонов. Тогда:

$$(\vec{j}, \vec{E}) = \Lambda \left(\vec{j}, \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Lambda j^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{2e^2 n} e^2 n^2 v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(n \frac{mv^2}{2} \right).$$

Таким образом, теорема Пойнтинга в нашем случае приобретает вид:

$$-div[\vec{E}, \vec{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}\vec{H}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\Lambda j^2}{2} \right),$$

физический смысл которой вполне понятен: поток электромагнитной энергии, *втекающей* через поверхность образца, идет на увеличение энергии электромагнитного поля и кинетической энергии сверхпроводящих электронов

($n \frac{mv^2}{2}$ – объемная плотность кинетической энергии). Напомним, что,

согласно одному из постулатов электродинамики Максвелла, выражение $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ представляет собой вектор объемной плотности потока энергии электромагнитного поля.

2. Рассмотрим теперь закон сохранения импульса (теорема Абрагама [2]) применительно к электродинамике сверхпроводников Лондонов. Введем тензор электромагнитных напряжений [3]:

$$\begin{aligned} T_{ik} &= T_{ik}^B + T_{ik}^E, \\ T_{ik}^B &= H_i B_k - \frac{1}{2} (\vec{H}, \vec{B}) \delta_{ik}, \\ T_{ik}^E &= E_i D_k - \frac{1}{2} (\vec{E}, \vec{D}) \delta_{ik}. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\frac{\partial B_k}{\partial x_k} \equiv div \vec{B} = 0$, и (2) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}^B}{\partial x_k} &= B_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + H_i \frac{\partial B_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{H}, \vec{B}) = B_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x_i} = \\ &= \mu \mu_0 \left[H_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - H_k \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right] = \mu \mu_0 [rot \vec{H}, \vec{H}]_i. \end{aligned}$$

Докажем последнее соотношение:

$$\begin{aligned} [\text{rot}\vec{H}, \vec{H}]_i &= \varepsilon_{ijk} (\text{rot}\vec{H})_j H_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{j\alpha\beta} H_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\beta = \varepsilon_{jki} \varepsilon_{j\alpha\beta} H_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\beta = \\ &= (\delta_{k\alpha} \delta_{i\beta} - \delta_{k\beta} \delta_{i\alpha}) H_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\beta = \frac{\partial H_i}{\partial x_k} H_k - \frac{\partial H_k}{\partial x_i} H_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее:

$$\frac{\partial T_{ik}^B}{\partial x_k} = [\text{rot}\vec{H}, \vec{B}]_i = [\vec{j}, \vec{B}]_i + \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right]_i.$$

Аналогично, с учетом (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}^E}{\partial x_k} &= D_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + E_i \frac{\partial D_k}{\partial x_k} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x_i} = \\ &= E_i \text{div} \vec{D} - \varepsilon \varepsilon_0 [\text{rot} \vec{E}, \vec{E}]_i = E_i \text{div} \vec{D} - \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{D} \right]_i. \end{aligned}$$

Собирая полученные выражения, с учетом того, что $\text{div} \vec{D} = \rho_s$, $\rho_s = en$ – объемная плотность электрических зарядов сверхпроводящих электронов, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= [\vec{j}, \vec{B}]_i + \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right]_i + E_i \rho_s - \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{D} \right]_i = [\vec{j}, \vec{B}]_i + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s = \\ &= [\vec{j}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s + \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}, \vec{H}]_i = [\vec{j}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s + \frac{1}{v^2} \frac{\partial S_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = [\vec{j}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s + \frac{\partial g_i}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь $\vec{g} = \frac{1}{v^2} [\vec{E}, \vec{H}]$ – объемная плотность механического импульса электромагнитного поля.

Далее воспользуемся уравнениями Лондонов, учитывая, что мы имеем дело со сверхпроводником:

$$\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \vec{j}), \quad \vec{B} = -\text{rot}(\Lambda \vec{j}).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= -\Lambda [\vec{j}, \text{rot} \vec{j}]_i + \rho_s \Lambda \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial g_i}{\partial t}, \\ \rho_s \Lambda \frac{\partial j_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(en \frac{m}{e^2 n} env_i \right) = \frac{\partial}{\partial t} (mnv_i). \end{aligned}$$

Введя $\vec{g}_s = mn\vec{v}$ – объемную плотность механического импульса жидкости сверхпроводящих электронов, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\Lambda [\vec{j}, \text{rot} \vec{j}]_i + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i). \quad (5)$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести следующий тензор:

$$S_{ik} = \Lambda j_i j_k - \frac{\Lambda}{2} j^2 \delta_{ik}.$$

С учетом того, что $\frac{\partial j_k}{\partial x_k} \equiv \text{div} \vec{j} = 0$, далее рассмотрим:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \Lambda \frac{\partial j_i}{\partial x_k} j_k + \Lambda j_i \frac{\partial j_k}{\partial x_k} - \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial j^2}{\partial x_i} = \Lambda \left(j_k \frac{\partial j_i}{\partial x_k} - j_k \frac{\partial j_k}{\partial x_i} \right) = -\Lambda [\vec{j}, \text{rot} \vec{j}]_i.$$

Последнее преобразование легко проверяется по аналогии с выводом формулы (3). Подставляя полученный результат в (5), получаем:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i). \quad (6)$$

Для того, чтобы выяснить физический смысл последнего соотношения, обратимся к гидродинамическому подходу Лондонов системы сверхпроводящих электронов, в основу которой положена модель идеальной несжимаемой жидкости, несущей электрический заряд. Подробную запись этой модели с анализом всех приближений, допущений и связанных физических неточностей можно посмотреть в [1, (1)].

Уравнение Эйлера в этом случае приобретает вид:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_s [\vec{v}, \vec{B}]_i + \rho_s E_i, \quad (7)$$

где $\rho = nm$ – объемная плотность сверхпроводящих электронов. С учетом несжимаемости электронной жидкости: $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$, $\vec{g}_s = mn\vec{v}$ и $\vec{j} = en\vec{v} = \rho_s \vec{v}$

уравнение (7) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_{ik} + \rho v_i v_k) + [\vec{j}, \vec{B}]_i + \rho_s E_i$$

или, что то же самое:

$$\frac{\partial g_{si}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = [\vec{j}, \vec{B}]_i + \rho_s E_i,$$

где $\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$ – тензор напряжений электронной жидкости. Отметим одно важное обстоятельство. Для корректного получения второго уравнения Лондонов нами было принято вынужденно бездоказательное предположение о равенстве нулю давления сверхпроводящих электронов [1, (10)]. Для дальнейшего анализа вернемся к уравнению (7), которое перепишем в другом виде:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} - [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}]_i = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{en}{mn} [\vec{v}, \text{rot} \vec{j}]_i \Lambda + \frac{en}{mn} E_i.$$

Отсюда, учитывая, что $\Lambda = \frac{m}{e^2 n}$, получаем:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{e}{m} E_i. \quad (8)$$

Вернемся к промежуточному тензору S_{ik} :

$$S_{ik} = \Lambda j_i j_k - \frac{\Lambda}{2} j^2 \delta_{ik} = \frac{m}{e^2 n} \left(n^2 e^2 v_i v_k - \frac{1}{2} n^2 e^2 v^2 \delta_{ik} \right) = \rho v_i v_k - \frac{1}{2} \rho v^2 \delta_{ik}.$$

Далее:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2}. \quad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) исключим слагаемое $-\rho \frac{\partial v^2}{\partial x_i} \frac{1}{2}$:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{e}{m} mn E_i.$$

Объединив полученное уравнение с (6), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) - en E_i + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i) = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - en E_i + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i) = \\ &= \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - en \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda_j) + \frac{\partial g_{si}}{\partial t} + \frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - en \frac{m}{e^2 n} \frac{\partial}{\partial t} (env_i) + \frac{\partial g_{si}}{\partial t} + \frac{\partial g_i}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} (mnv_i)} + \cancel{\frac{\partial g_{si}}{\partial t}} + \frac{\partial g_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Получили в дифференциальной форме закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_i}{\partial t}.$$

Для того, чтобы вскрыть физический смысл последнего соотношения, проинтегрируем его с использованием теоремы Гаусса по некоторому фиксированному объему V , ограниченному поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV - \int_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV &= \int_V \frac{\partial g_i}{\partial t} dV, \\ \oint_S (T_{ik} - \Pi_{ik}) n_k dS &= \frac{d}{dt} \int_V g_i dV. \end{aligned}$$

Итак, физический смысл полученного закона сохранения достаточно прост: втекающий в образец посредством электромагнитного поля механический импульс идет на увеличение механического импульса электромагнитного поля внутри образца. Интересно отметить, что, в отличие от других форм записи полученного закона [2], объемная плотность механического импульса жидкости сверхпроводящих электронов в непосредственном виде не вошла в конечный результат. Она учтена через тензор напряжений электронной жидкости. Заметим, что также учтен чисто конвективный поток импульса, который втекает внутрь объема вместе с электронной жидкостью.

Мы приносим благодарности В.В. Толмачеву, при обсуждении с которым статьи [5] и родилась идея настоящего исследования, А.М. Макарову и А.Н. Морозову за постоянный интерес к работе и С.О. Юрченко, дискуссии с которым явно обогатили рассматриваемый материал.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алиев И.Н., Копылов И.С. Применение метода множителей Лагранжа к вычислению магнитного поля постоянного тока // Динамика сложных систем. 2015. № 4. С. 12–27.
2. M. Abragam, R. Becker. Theorie der Elektrizität, Bd.1 Einführung in die Maxwellsche theorie der Elektrizität, Leipzig, 1932 [М. Абрагам, Р. Беккер. Теория электричества. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 281 с.].
3. Скобельцын Д.В. О тензоре импульс-энергии электромагнитного поля // УФН. 1973. Т. 110. Вып. 2. С. 253–292.
4. Джексон Д. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
5. M. Llano, V. Tolmachev. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // Physica. 2003. V. A317. P. 546–564.